

Exercice 1 (9 Pts)

1- Les déformations principales [3.5 Pts]

$$\bar{\epsilon} = [90 \ 120 \ 0 \ 120 \ -30 \ 0 \ 0 \ 0] 10^{-6}$$

Donc $\epsilon_3 = 0$ est une déformation principale, et pour déterminer les deux autres en trace le cercle de Mohr en utilisant les point A et B. **..0,5**

$$A(9 \cdot 10^{-5}, 12 \cdot 10^{-5}), B(-3 \cdot 10^{-5}, -12 \cdot 10^{-5}) \text{ ..0,5}$$

L'intersection du cercle de Mohr avec l'axe des abscisses donne les valeurs principales :

$$\epsilon_1 = 0.16 \cdot 10^{-3} \text{ ..1}, \epsilon_2 = -0.1 \cdot 10^{-3} \text{ ..1}$$

2- L'allongement unitaire suivant $\vec{n}$ (1 pts)

$$\epsilon_{nn} = \epsilon_{ij} n_i n_j = \vec{n} \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{n} \text{ ..0,5 donc :}$$

$$\epsilon_{nn} = 1.28 \cdot 10^{-4} \text{ ..0,5}$$

3- La distorsion angulaire entre $\vec{n}$ et $\vec{t}$ (1,5 pts)

$$\text{On a } \vec{n} \cdot \vec{t} = 0 \text{ ..0,5 donc :}$$

$$\delta\theta = 2\vec{t} \cdot \vec{\epsilon} \cdot \vec{n} \text{ ..0,5 on obtient :}$$

$$\delta\theta = -1.82 \cdot 10^{-4} \text{ rad ..0,5}$$

4- la déformation volumique locale [1 Pts] :

$$\frac{\Delta V}{V} = \text{Trace}(\bar{\epsilon}) = \epsilon_{ii} \text{ ..0,5}$$

$$\text{donc } \frac{\Delta V}{V} = 60 \cdot 10^{-6} \text{ ..0,5}$$

5- le tenseur de contraintes [2 Pts]

Avec $\sigma_{ij} = \lambda \epsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \epsilon_{ij}$ on aboutit à :

$$\bar{\sigma} = 10^{-6} [60\lambda + 180\mu \ 240\mu \ 0 \ 240\mu \ 60\lambda \ -60\mu \ 0 \ 0 \ 0 \ 60\lambda + 180\mu \ 0 \ 0 \ 0 \ 60\lambda - 60\mu \ 0 \ 0 \ 0 \ 60\lambda + 180\mu]$$

$$\text{A.N: } (\lambda = 100 \text{ GPa}, \mu = 80 \text{ GPa})$$

$$\bar{\sigma} = [20.4 \ 19.2 \ 0 \ 19.2 \ 1.2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 6] \text{ MPa ..1}$$

Exercice 2 (6 Pts)

1- La fonction de contraintes ϕ : (0,5 pts)

$$\text{on a } \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^4} + \frac{\partial^4 \phi}{\partial y^4} + 2 \frac{\partial^4 \phi}{\partial x^2 \partial y^2} = 0 \text{ ...0,5}$$

Donc c'est une fonction de contraintes d'Airy.

2- Le tenseur de contraintes (1,5 pts):

$$\text{On a } \sigma_{11} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}, \sigma_{22} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}, \sigma_{21} = -\frac{\partial^2 \phi}{\partial x \partial y}$$

Donc on déduit:

$$\sigma_{11} = 6ay \text{ ..0,5}, \sigma_{22} = 0 \text{ ..0,25}, \sigma_{12} = 0 \text{ ..0,25}$$

Pour déterminer a on prend la condition de contrainte au niveau de $x=a$:

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6ay & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ à } x=a \Rightarrow \bar{\sigma} = \begin{bmatrix} 6a^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ ..0,25}$$

on déduit $a = K/6$ et finalement le tenseur de

$$\bar{\sigma} = \begin{bmatrix} K^2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

contrainte devient **..0,25**

3- Le tenseur de déformations (1,5 pts):

En utilisant la loi de Hooke on obtient:

$$\epsilon_{11} = K \cdot y / E \text{ ..0,5}; \epsilon_{22} = -v \cdot K \cdot y / E \text{ ..0,5}; \epsilon_{12} = 0 \text{ ..0,5}$$

4- Le champ de déplacements: (2,5 pts)

Les déplacements u_x et u_y sont fonction de x et y

$$\text{On a } \epsilon_{11} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \text{ et } \epsilon_{22} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \text{ on obtient:}$$

$$u_1 = K \cdot y \cdot x / E + f(y) \text{ ...0,25}$$

$$u_2 = -v \cdot K \cdot y^2 / 2E + G(x) \text{ ...0,25}$$

pour obtenir les fonctions $f(y)$ et $g(x)$ on utilise ϵ_{12} :

$$\epsilon_{12} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial y} + \frac{\partial u_2}{\partial x} \right) / 2 = 0$$

En arrangeant cette expression et en séparant les variables on trouve:

$$-\frac{dG}{dx} + \frac{K \cdot x}{E} = \frac{df}{dy} = C_1 \text{ ...0,5}$$

Donc on obtient

$$f(y) = C_1 y + C_2 \text{ ...0,25}$$

$$G(x) = \frac{K \cdot x^2}{2E} - C_1 x + C_3 \text{ ...0,25}$$

Et finalement on obtient les déplacements

$$u_1(x, y) = K \cdot y \cdot x / E + C_1 y + C_2 \text{ ...0,5}$$

$$u_2(x, y) = -v \frac{K y^2}{2E} + \frac{K x^2}{2E} - C_1 x + C_3 \text{ ...0,5}$$

Exercice 3 (5 Pts)

1) la matrice du gradient de déplacements [1 pts]

$$G_{11} = du_1/dX_1 = (1.75 - 0.75) / 150 = 0.0067;$$

$$G_{22} = du_2/dX_2 = (0.25 - (-0.5)) / 100 = 0.0075$$

$$G_{12} = du_1/dX_2 = (0 - 0.75) / 100 = 0.005;$$

$$G_{21} = du_2/dX_1 = (-1.25 - (-0.5)) / 150 = 0.0075$$

$$\bar{G} = 10^{-3} [6.7 \ -5 \ -7.5 \ 7.5]$$

2) tenseur des déformations et des rotations [1.5 pts]

$$\bar{\epsilon} = \frac{\bar{G} + \bar{G}^T}{2} = 10^{-3} [6.67 \ -6.25 \ -6.25 \ 7.5] \text{ ..0,75}$$

$$\bar{\omega} = \frac{\bar{G} - \bar{G}^T}{2} = 10^{-3} [0 \ 1.2 \ -1.2 \ 0] \text{ ..0,75}$$

3) variation de surface [1.5 pts]

$$\text{Aire OABC: } A_i = 100 \times 150 = 15000 \text{ mm}^2$$

$$\text{Aire O'A'B'C': } A_f = 101.5 \times 151.75 - 2 \times (0.75 \times 0.75) - 2 \times (0.5 \times 151 \times 0.75) - 2 \times (0.5 \times 100.75 \times 0.75)$$

$$A_f = 15213 \text{ mm}^2 \text{ ..0,5}$$

Variation relative de volume (surface)

$$\Delta A / A = (15213 - 15000) / 15000 = 0.01417 \text{ ..0,5}$$

$$\text{Trace}(\epsilon) = 0.00667 + 0.00750 = 0.01417 \text{ ..0,5}$$

Les variations sont les mêmes

$$4) \text{ Variation relative de la diagonale AC [1 pts]:}$$

$$\text{La longueur initiale: } AC = (100^2 + 150^2)^{1/2} =$$

$$180.2776 \text{ mm}$$

$$\text{La longueur déformée: } A'C' = (101.5^2 + 151.75^2)^{1/2} =$$

$$182.5659 \text{ mm ..0,5}$$

Variation relative :

$$\Delta AC / AC = (182.5659 - 180.2776) / 180.2776$$

$$= 0.0127 \text{ ..0,5}$$