

Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

01.11.2022

Лекция

Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

Цели:

1. **Образовательная:** сформировать у студентов представление о системах линейных уравнений, рассмотреть метод решения систем линейных уравнений методом обратной матрицы.

2. **Воспитательная:** воспитать логическое мышление, внимание.

3. **Развивающая:** развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал лекции на тему: «Решение систем линейных уравнений методом обратной матрицы» формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

1) Матричный метод.

2) Алгоритм решения системы уравнений матричным методом.

Матричный метод решения - метод решения с помощью обратной матрицы систем линейных алгебраических уравнений с ненулевым определителем.

Если выписать коэффициенты при неизвестных величинах x_i в матрицу A , неизвестные величины собрать в вектор столбец X , а свободные члены в вектор столбец B , то систему линейных алгебраических уравнений можно записать в виде следующего матричного уравнения $A \cdot X = B$, которое имеет единственное решение только тогда, когда определитель матрицы A не будет равен нулю. При этом решение системы уравнений можно найти следующим способом $X = A^{-1} \cdot B$, где A^{-1} - обратная матрица.

Матричный метод решения состоит в следующем.

Пусть дана система линейных уравнений с n неизвестными:

[illegible]

Её можно переписать в матричной форме: $AX = B$, где A — основная матрица системы, B и X — столбцы свободных членов и решений системы соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Умножим это матричное уравнение слева на A^{-1} — матрицу, обратную к матрице A : $A^{-1}(AX) = A^{-1}B$

Так как $A^{-1}A = E$, получаем $X = A^{-1}B$. Правая часть этого уравнения даст столбец решений исходной системы. Условием применимости данного метода (как и вообще существования решения неоднородной системы линейных уравнений с числом уравнений, равным числу неизвестных) является невырожденность матрицы A . Необходимым и достаточным условием этого является неравенство нулю определителя матрицы A : $\det A \neq 0$.

Для однородной системы линейных уравнений, то есть когда вектор $B = 0$, действительно обратное правило: система $AX = 0$ имеет нетривиальное (то есть не нулевое) решение только если $\det A = 0$. Такая связь между решениями однородных и неоднородных систем линейных уравнений носит название альтернативы Фредгольма.

Пример решения неоднородной системы линейных алгебраических уравнений.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z = 4; \\ 2x - y + 5z = 23; \\ x + 7y - z = 5; \end{cases}$$

Убедимся в том, что определитель матрицы, составленный из коэффициентов при неизвестных системы линейных алгебраических уравнений не равен нулю.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 5 \\ 1 & 7 & -1 \end{vmatrix} = 3 - 14 + 10 - 1 - 105 + 4 = -103;$$

Следующим шагом будет вычисление алгебраических дополнений для элементов матрицы, состоящей из коэффициентов при неизвестных. Они понадобятся для нахождения обратной матрицы.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 5 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -34;$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = 7;$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = 15;$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 7 & -1 \end{vmatrix} = -5;$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} = -2;$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -19;$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 5 \end{vmatrix} = 9;$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = -17;$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7;$$

Теперь найдём союзную матрицу и транспонируем её, потом подставим в формулу для нахождения обратной матрицы.

$$C^* = \begin{pmatrix} -34 & 7 & 15 \\ -5 & -2 & -19 \\ 9 & -17 & -7 \end{pmatrix};$$

$$(C^*)^T = \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix};$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} \cdot (C^*)^T$$

Подставляя переменные в формулу, получаем:

$$A^{-1} = \frac{1}{-103} \cdot \begin{pmatrix} -34 & -5 & 9 \\ 7 & -2 & -17 \\ 15 & -19 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix};$$

Найдем неизвестные. Для этого перемножим обратную матрицу и столбец свободных членов.

$$X = A^{-1} \cdot B;$$

$$X = \begin{pmatrix} \frac{34}{103} & \frac{5}{103} & -\frac{9}{103} \\ -\frac{7}{103} & \frac{2}{103} & \frac{17}{103} \\ -\frac{15}{103} & \frac{19}{103} & \frac{7}{103} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 23 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Итак, **x=2; y=1; z=4.**

Домашнее задание

Разобрать пример решения системы уравнений и решить систему уравнений матричным способом:

$$\begin{cases} 2x - 3y + 2z = 1 \\ x + y + z = 3 \\ x + y - 2z = 0 \end{cases}.$$

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru