ЗАДАНИЯ
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

IX класс

1. Решите уравнение $\sqrt{x^2-9x+3}+\dfrac{25}{\sqrt{x^2-9x+3}}=-x^2-4x+6$.

2. Найдите все пары натуральных чисел k и n таких, что $n^5+n^4+n^3+2^k\cdot n^2+2^k\cdot n+2^k=2016$.

3. На стороне AC остроугольного треугольника ABC как на диаметре построена окружность, пересекающая стороны AB и BC в точках K и L соответственно. Отрезки AL и CK пересекаются в точке O. Пусть точка P – середина отрезка BO. Найдите $\angle$KPL, если площадь треугольника KBL составляет $\frac{1}{4}$ площади треугольника ABC.

4. Пять команд A, B, C, D, E провели турнир по футболу. Каждая команда сыграла со всеми остальными по одному разу. Места, занятые командами, распределились в следующем порядке: A, B, C, D, E. При этом количества очков у команд, занявших соседние места, отличаются ровно на 1. Сколько очков набрала каждая команда? Привести пример такого турнира. В футболе за победу команде начисляется 3 очка, за ничью – 1 очко, за поражение – 0 очков.

5. Дана треугольная пирамида. Отметим 10 точек: 4 вершины пирамиды и 6 середин ее ребер. Можно ли в отмеченные точки записать числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел на каждом из шести ребер пирамиды были одинаковыми.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика

IX класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. ***Решение:***

Поскольку слагаемые в левой части уравнения неотрицательны, то применим к левой части неравенство Коши ($a+b\ge 2\sqrt{ab}$, для $a,b\ge 0$):

$$\sqrt{x^2-9x+3}+\frac{25}{\sqrt{x^2-9x+3}}\ge 2\sqrt{\sqrt{x^2-9x+3}\cdot\frac{25}{\sqrt{x^2-9x+3}}}=10.$$

Итак, $\sqrt{x^2-9x+3}+\frac{25}{\sqrt{x^2-9x+3}}\ge 10$. (1)

Преобразуем правую часть исходного уравнения:

$-x^2-4x+6=10-x^2-4x-4=10-(x^2+4x+4)=10-(x+2)^2\le 10$. (2)

С учетом (1) и (2) получаем, что исходное уравнение равносильно системе:

$$\begin{cases}\sqrt{x^2-9x+3}+\frac{25}{\sqrt{x^2-9x+3}}=10,\\ 10-(x+2)^2=10.\end{cases}$$

Из второго уравнения получаем x = –2. Проверка показывает, что это значение удовлетворяет первому уравнению.

***Ответ*: –2.**

***2. Решение*:**

Выполним преобразования:

$n^3(n^2+n+1)+2^k(n^2+n+1)=2016$.

$(n^2+n+1)(n^3+2^k)=2016$.

Заметим, что 2016= $2^5\cdot 3^2\cdot 7$. Далее, $n^2+n+1=n(n+1)+1$. Число $n(n+1)$ представляет собой произведение двух последовательных натуральных чисел, одно из которых будет четным. Поэтому число $n(n+1)$ – четное, а число $n(n+1)+1$ – нечетное при любом натуральном n.

Число 2016 имеет следующие нечетные делители: 1, 3, 7, 9, 21 и 63. Заметим также, что число n^3+2^k должно быть четным (в противном случае произведение двух нечетных чисел даст нечетное число). Получаем, что n должно быть число четным. Рассмотрим следующие случаи.

1) $n^2+n+1=1$, что не выполняется ни при каком натуральном n.

2) $n^2+n+1=3$, откуда n=1 – нечетное.

3) $n^2+n+1=7$, откуда n=2, и $2^3+2^\kappa=2016:7=288$, $2^\kappa=280$. Однако никакая натуральная степень двойки не дает 280.

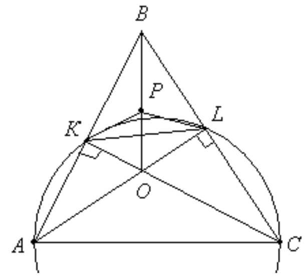
4) $n^2+n+1=9$, что невозможно при натуральных n.

5) $n^2+n+1=21$, откуда n=4, и $4^3+2^\kappa=2016:21=96$, $2^\kappa=32$, κ = 5. Получили решение: n=4, κ=5.

6) $n^2+n+1=63$, что невозможно при натуральных n.

***Ответ*: *n*=4, *к*=5.**

3. ***Решение:***



Поскольку углы ALC и AKC вписанные и опирающиеся на диаметр, то $\angle ALC=\angle AKC=90°$, т.е. AL и CK – высоты треугольника ABC.

Так как треугольник ABC – остроугольный, то треугольники LBK и ABC подобны с коэффициентом подобия, равным $cosB$. т.е. $\frac{S_{\Delta KBL}}{S_{\Delta ABC}}=\cos^2 B$.

Но по условию $\frac{S_{\Delta KBL}}{S_{\Delta ABC}}=\frac{1}{4}$, т.е. $\cos^2 B=\frac{1}{4}$, $\cos B=\frac{1}{2}$, т.е. $\angle B=60°$.

Рассмотрим четырехугольник KBLO. Так как $\angle BKO+\angle BLO=90°+90°=180°$, то около этого четырехугольника можно описать окружность. Причем, отрезок BO – будет диаметром этой окружности ($\angle BKO=90°$), а его середина точка является центром этой окружности. Итак, $\angle KBL$ является вписанным, а $\angle KPL$ – соответствующим ему центральным. Тогда $\angle KPL=2\angle KBL=120°$.

Ответ: **120°.**

4. ***Решение:***

Всего на турнире было сыграно $\frac{5\cdot 4}{2}=10$ матчей. В каждой игре разыгрывалось 2 очка (если игра закончилась вничью) или 3 очка (если игра завершилась победой одной из команд). Таким образом, сумма очков, набранных командами, находится в пределах от 20 до 30. Пусть команда E набрала n очков, тогда команды D, C, B, A набрали соответственно $n+1$, $n+2$, $n+3$ и $n+4$ очка. Сумма очков равна $5n+10$.

Эта сумма должна быть больше 20 (все игры не могли закончиться вничью, иначе все команды набрали бы поровну очков), но меньше 30 (если все игры закончились победой одной из команд, то количество очков у каждой команды было бы кратно 3, что противоречит условию).

Имеем: $20<5n+10<30$, откуда $2<n<4$. Т.е. $n=3$. Итак, команды A, B, C, D и E набрали соответственно 7, 6, 5, 4, 3 очка. Ниже приведен пример такого турнира:

						Очков
A	***	0	3	3	1	7
B	3	***	1	1	1	6
C	0	1	***	3	1	5
D	0	1	0	***	3	4
E	1	1	1	0	***	3

5. ***Решение:***

Предположим, что можно в отмеченные точки записать числа 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 так, чтобы суммы чисел на каждом из шести ребер пирамиды были одинаковыми. Пусть в вершинах пирамиды записаны числа a, b, c, d, а в серединах ребер – u, v, w, x, y, z. Вычислим сумму чисел на каждом из шести ребер и найдем их общую сумму. С одной стороны, в силу предположения, эта сумма делится на 6. С другой стороны, эта сумма равна:

$$3(a+b+c+d)+(u+v+w+x+y+z)=2(a+b+c+d)+(a+b+c+d+u+v+w+x+y+z)$$

Так как 0+1+2+3+4+5+6+7+8+9=45 не делится на 6, то и вся сумма не делится на 6. Получили противоречие. Это доказывает то, что предположение неверно и числа расставить нельзя.

Ответ: нельзя