ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

ΗΜΕΡΗΣΙΩΝ ΚΑΙ ΕΣΠΕΡΙΝΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΛΥΚΕΙΩΝ

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ

ΣΑΒΒΑΤΟ 09 ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΥ 2023

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

ΘΕΜΑ Α

Α1. Έστω f μια συνάρτηση, η οποία είναι συνεχής σε ένα διάστημα Δ . Αν f΄(x) > 0, για κάθε εσωτερικό σημείο x του Δ, τότε να δείξετε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα σε όλο το διάστημα Δ.

Μονάδες 7

Α2. Πότε η ευθεία y = l λέγεται οριζόντια ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f στο +∞;
Μονάδες 4

Α3. Να διατυπώσετε το Θεώρημα του Fermat. Μονάδες 4

Α4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, τη λέξη Σωστό, αν η πρόταση είναι σωστή, ή Λάθος, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

α) Αν f ,g είναι δύο συναρτήσεις και ορίζονται οι σύνθετες συναρτήσεις g ⊠ f και f ⊠ g, τότε οι g ⊠ f και f ⊠ g, δεν είναι υποχρεωτικά ίσες.

β) Ισχύει ότι $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sigma\upsilon\nu x-1}{x}=1$

γ) Εάν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο x_o και η συνάρτηση g είναι συνεχής στο $f(x_o)$, τότε η σύνθεσή τους f ⊠ g, είναι συνεχής στο x_o.

δ) Αν η f είναι συνεχής συνάρτηση στο [α, β] , με $\int_\alpha^\beta f(x)dx=0$, τότε κατ' ανάγκη θα είναι f(x) =0

για κάθε x ∈ [α, β].

ε) Αν $\lim\limits_{x\to x_o} f(x)=+\infty$, τότε f(x) > 0 κοντά στο x_o .

ΘΕΜΑ Β

Δίνονται οι συναρτήσεις g,h: $(0,+\infty)\to R$ με τύπους $g(x)=\dfrac{e^x+1}{e^x-1}$ και h(x) = lnx.

Β 1. Να προσδιορίσετε τη συνάρτηση f = g ⊠ h. Μονάδες 6

Β 2. Αν f(x) = $\frac{x+1}{x-1}$, x > 1 , να αποδείξετε ότι η f αντιστρέφεται και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι f = f^{-1} (όπου f^{-1} είναι η αντίστροφη της συνάρτησης f).
Μονάδες 6

Β 3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f . Μονάδες 6

Β 4. Να εξετάσετε αν η εξίσωση f(x) = συν x έχει λύση στο (1,+∞). Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ

Δίνεται η συνάρτηση f : [1, 2]→R , η οποία είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο πεδίο ορισμού της και για την οποία ισχύουν:

- f(1) = 0
- f(2) = 2
- f ‘ (2) = 1
- f ‘ ‘ (x) < 0 για κάθε x∈[1,2].

Γ 1. Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της f

i. έχει κοινό σημείο με την ευθεία ($ε_1$): y = - x +2 (μονάδες 3) και

ii. εφάπτεται στην ευθεία ($ε_2$): y = x (μονάδες 3)

Μονάδες 6

Γ 2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f αντιστρέφεται και να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης. Μονάδες 6

Γ 3. Να αποδείξετε ότι $\frac{f(x)}{x-1} > \frac{2-f(x)}{2-x}$, για κάθε x ∈(1, 2). Μονάδες 7

Γ 4. Να αποδείξετε ότι:

i. f(x) ≥ 2x - 2, για κάθε x∈[1,2]. Μονάδες 2

ii. $1 < \int_1^2 f(x)dx < \frac{3}{2}$ Μονάδες 4

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται η συνάρτηση f: R→R με f(x) = $\begin{cases} e^x & x \geq 0 \\ -e^{-x}+2 & x<0 \end{cases}$

Δ 1. Να αποδείξετε ότι η εφαπτομένη (ε) της γραφικής παράστασης της f σε σημείο Α $\left(x_1, f\left(x_1\right)\right)$

με x_1 > 0, η οποία διέρχεται από την αρχή των αξόνων Ο(0,0), έχει εξίσωση y = ex.

Μονάδες 5

Δ 2. Να αποδείξετε ότι η ευθεία (ε) του ερωτήματος Δ1 και η γραφική παράσταση της f έχουν, εκτός από το σημείο επαφής Α , ακριβώς ένα ακόμα κοινό σημείο Β $\left(x_o, f\left(x_o\right)\right)$.

Μονάδες 8

Δ 3. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της f και την εφαπτομένη της, (ε) του ερωτήματος Δ 1, ανάμεσα στις ευθείες $x = x_o$ και $x = 1$.

Να δώσετε την απάντησή σας ως συνάρτηση του x_o.

Μονάδες 6

Δ 4. Δύο κινητά ξεκίνησαν ταυτόχρονα από το σημείο Β του ερωτήματος Δ2. Το ένα κινήθηκε κατά μήκος του ευθύγραμμου τμήματος ΒΟ , όπου Ο είναι η αρχή των αξόνων, και το άλλο κινήθηκε κατά μήκος της γραφικής παράστασης της f , έτσι ώστε οι τεταγμένες των θέσεών τους να παραμένουν ίσες μεταξύ τους κάθε χρονική στιγμή. Ποια είναι η μέγιστη δυνατή απόσταση ανάμεσα στα κινητά κατά τη διάρκεια της κίνησής τους;

Μονάδες 6