

ÉCOLE NATIONALE DES PONTS ET CHAUSSEES,
ÉCOLES NATIONALES SUPÉRIEURES DE L'AÉRONAUTIQUE ET DE L'ESPACE,
DE TECHNIQUES AVANCÉES, DES TÉLÉCOMMUNICATIONS,
DES MINES DE PARIS, DES MINES DE SAINT-ETIENNE, DES MINES DE NANCY,
DES TÉLÉCOMMUNICATIONS DE BRETAGNE,
ÉCOLE POLYTECHNIQUE (OPTION T.A.)

CONCOURS D'ADMISSION 1994

PHYSIQUE

PREMIÈRE ÉPREUVE
OPTIONS M et P'
(Durée de l'épreuve : 3 heures)

Les candidats sont priés de mentionner de façon apparente sur la première page de la copie : **PHYSIQUE I.**

L'énoncé de cette épreuve, commune aux candidats des options M et P', comporte 6 pages.

L'épreuve est constituée de deux problèmes indépendants entre eux et que l'on pourra aborder dans l'ordre qu'on voudra.

On étudie dans ce problème le fonctionnement et la mise en œuvre de circuits présentant le phénomène de résistance différentielle négative, c'est-à-dire tels que le rapport $r = \Delta e / \Delta i$ des petites variations de tension et de courant autour d'un point de repos soit négatif. Les amplificateurs opérationnels AO (fig.1a) intervenant dans les divers montages auront des courants d'entrée i_1 et i_2 nuls et leur impédance d'entrée sera considérée comme infinie.

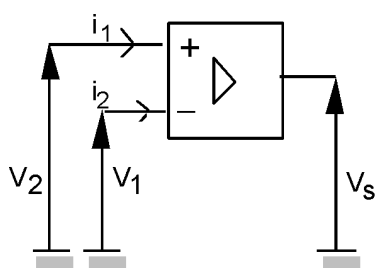


fig.1 a : Notations pour AO

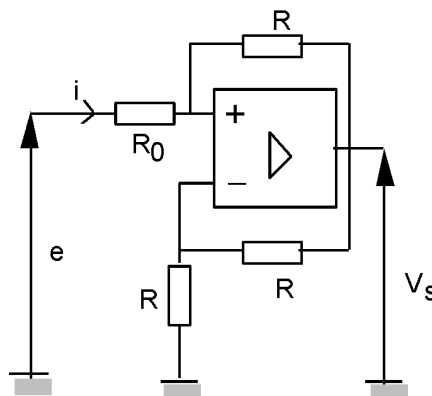


fig. 1b : Circuit pouvant exhiber $r = \Delta e / \Delta i < 0$

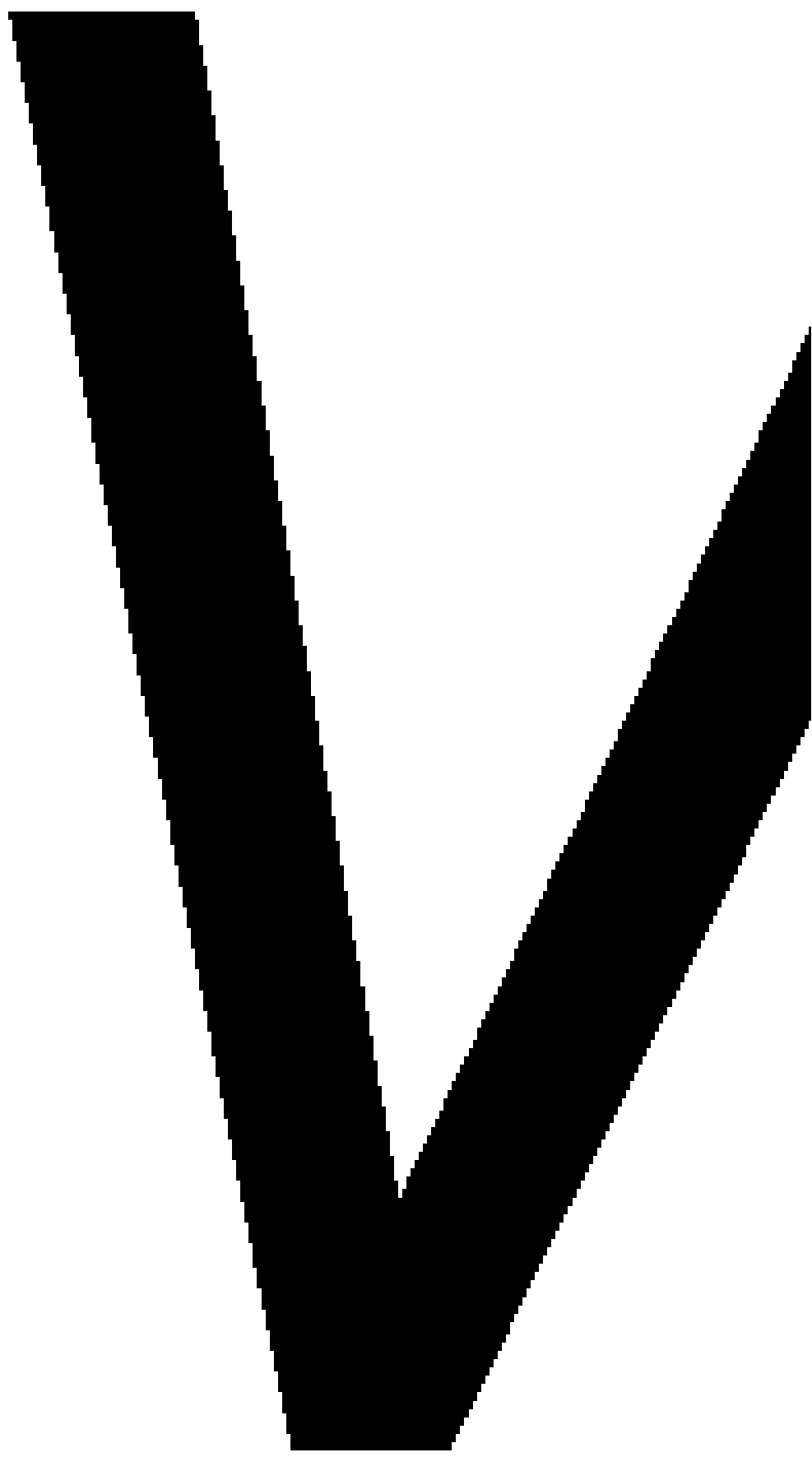
Première partie : Réalisation de circuits d'impédance différentielle négative

On considère d'abord que le gain des amplificateurs est infini ; dans ces conditions, le régime linéaire de fonctionnement se caractérise par $V_1 = V_2$; autrement, la tension de sortie est $V_s = \text{signe}(V_2 - V_1) \times E$ (régime dit de saturation, $E = 15V$ = tension de saturation).

I-1) Déterminer la relation $i(e)$ dans le circuit de la figure 1b, d'abord en régime linéaire, puis en régime de saturation. Pour quelles inégalités portant sur

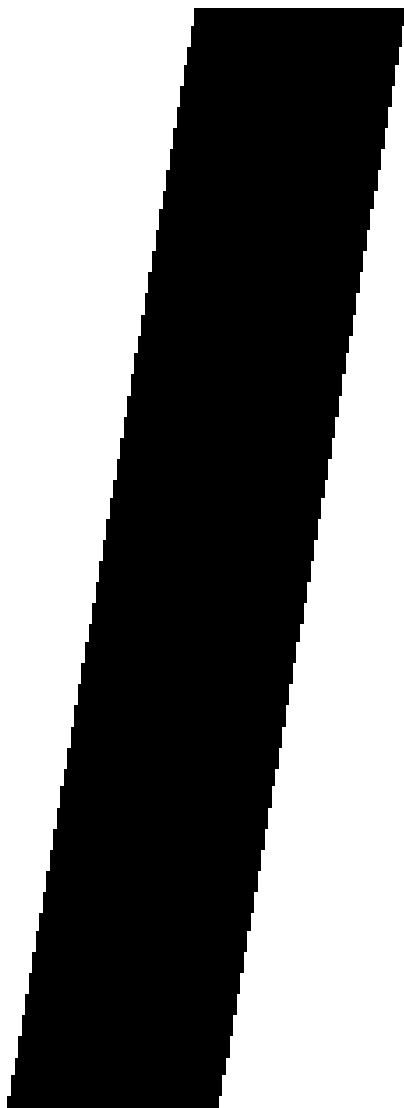
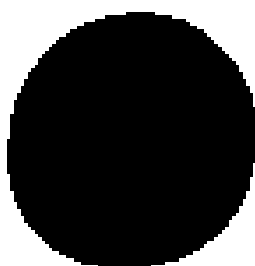
e

ce dernier régime est-il possible (distinguer les cas



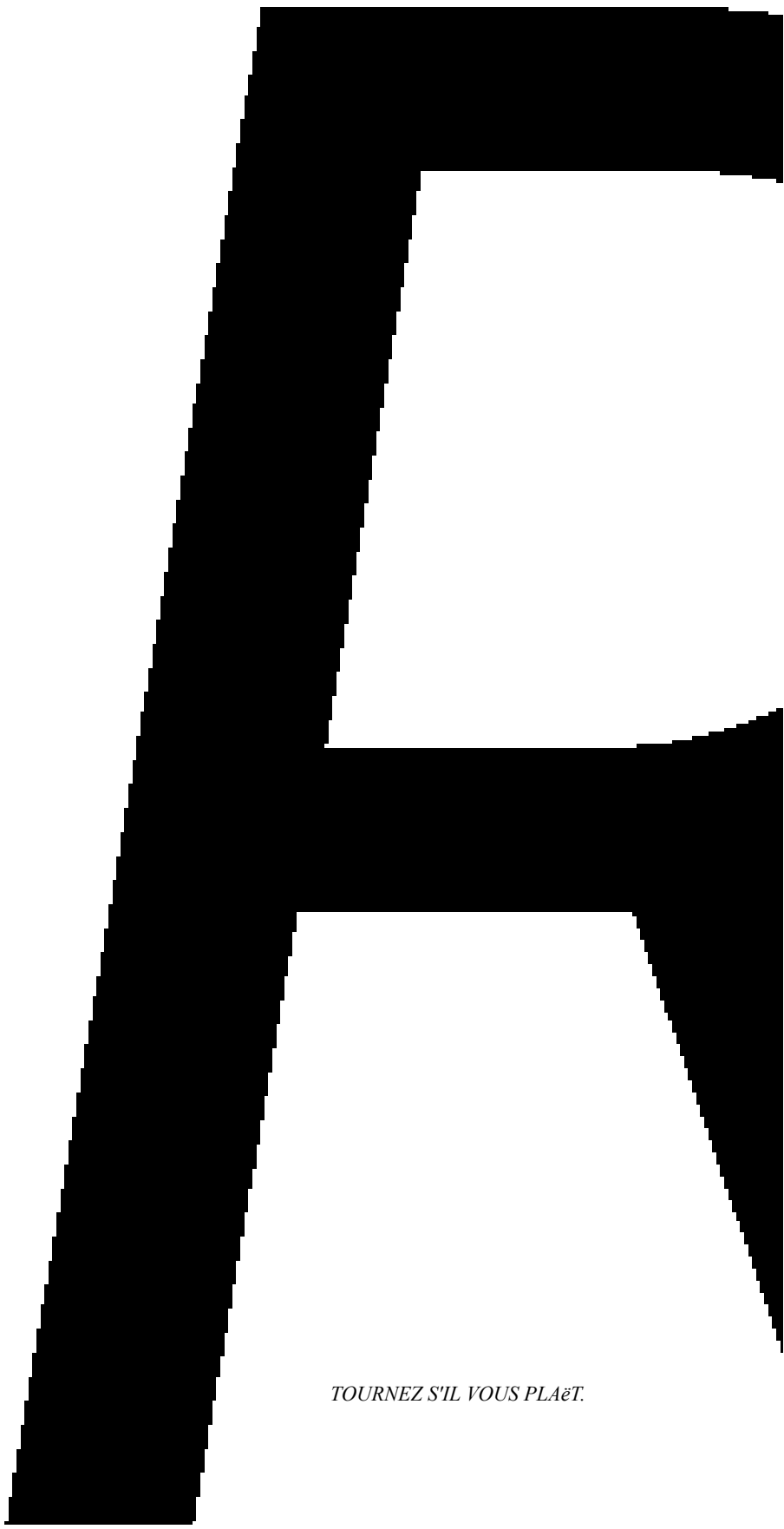
) ?

I -2) Représenter le graphe complet de la relation



lorsque

.



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

, en précisant les points particuliers et les différents domaines de fonctionnement.

On considère maintenant que la tension de sortie des amplificateurs opérationnels s'exprime en fonction de la tension d'entrée par

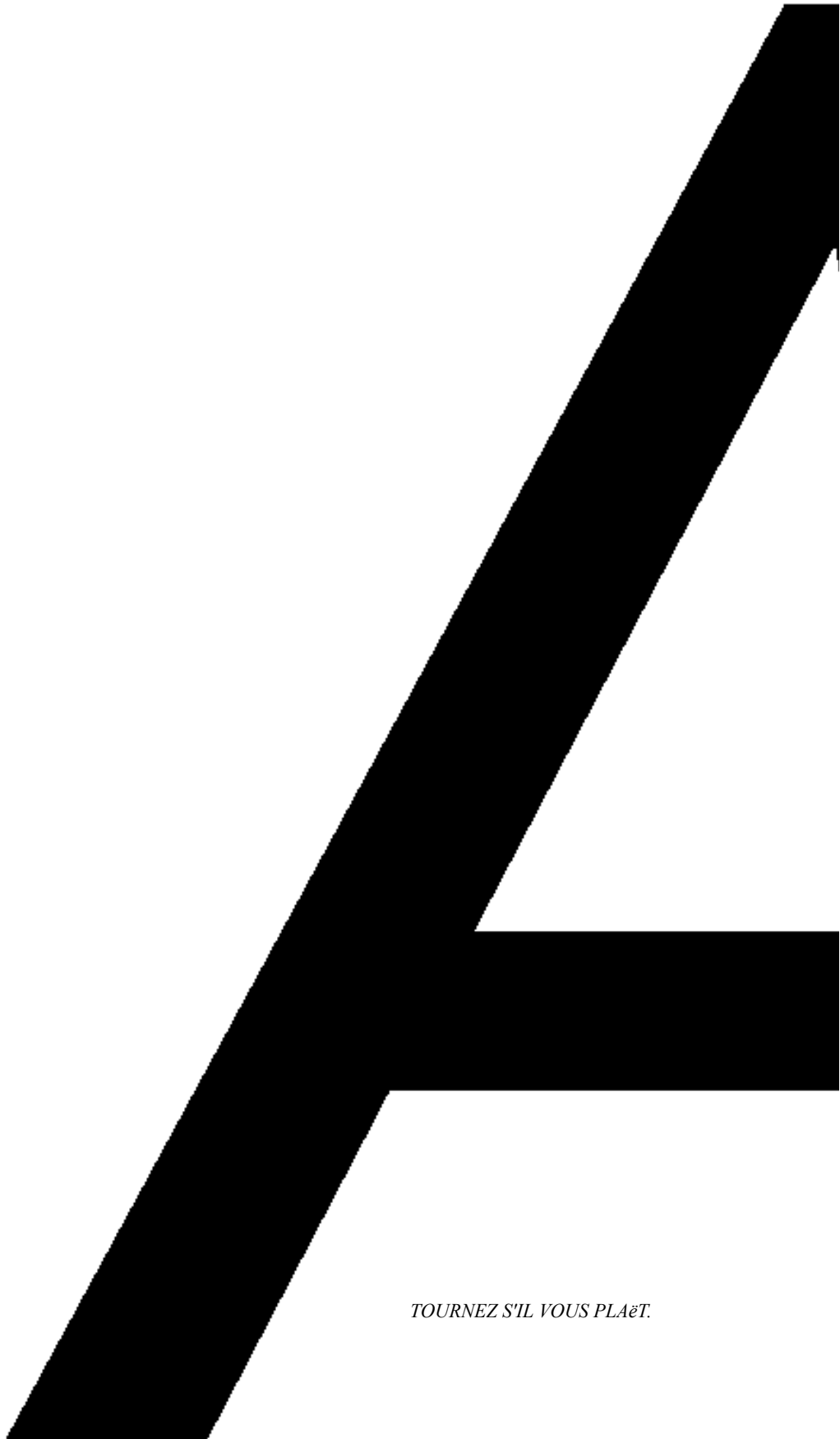
■



TOURNEZ S

,

O



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

est un nombre réel très grand devant 1. Les relations entre tensions et courants dans le circuit représenté sur la figure 2a (redessiné en 2b) sont linéaires et peuvent donc s'écrire, avec les conventions habituelles relatives aux grandeurs complexes décrivant le régime harmonique :

■

[REDACTED]

[REDACTED]

, soit, en notation matricielle :

■

La

matrice

ainsi introduite s'appelle matrice admittance.

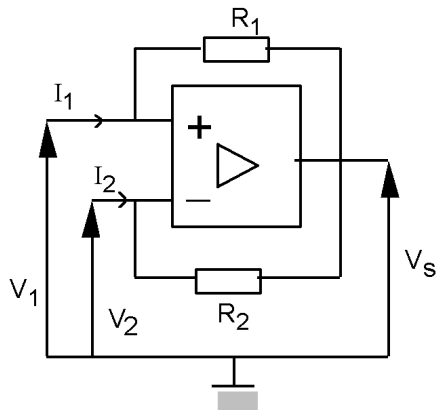


fig. 2a : Un circuit $\hat{A}O$
Remarque que les courants sont comptés positivement quand ils entrent dans le quadripôle.

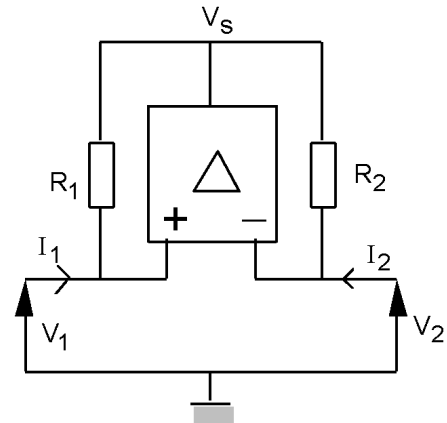


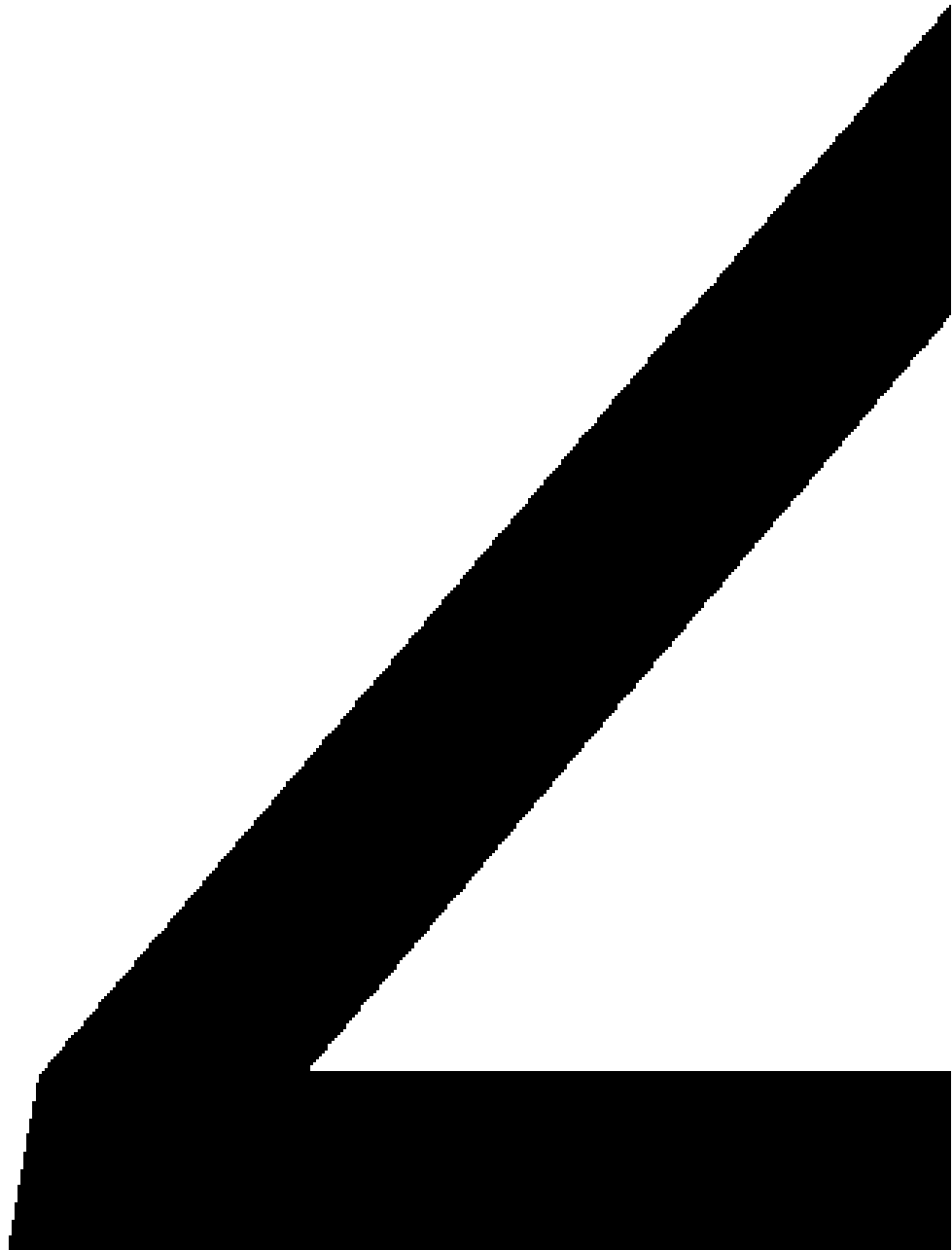
fig. 2b : Circuit 2a, présenté comme un quadripôle

I-3) Calculer la matrice $[Y]$ relative au circuit considéré.

I-4) Quelle est, dans le cas général, la matrice $[Y]$ relative à deux quadripôles de matrices admittances respectives $[Y']$ et $[Y'']$, montés en parallèle (c'est-à-dire en reliant ensemble leurs bornes homologues) ?

I-5) Calculer, pour le circuit de la fig. 2, la matrice $[M]$ définie par $\begin{bmatrix} V_2 \\ I_2 \end{bmatrix} = [M] \begin{bmatrix} V_1 \\ I_1 \end{bmatrix}$. Que devient cette relation lorsque A tend vers l'infini ? Quelle relation existe-t-il alors entre les grandeurs réelles V_1 et V_2 d'une part, i_1 et i_2 d'autre part ?

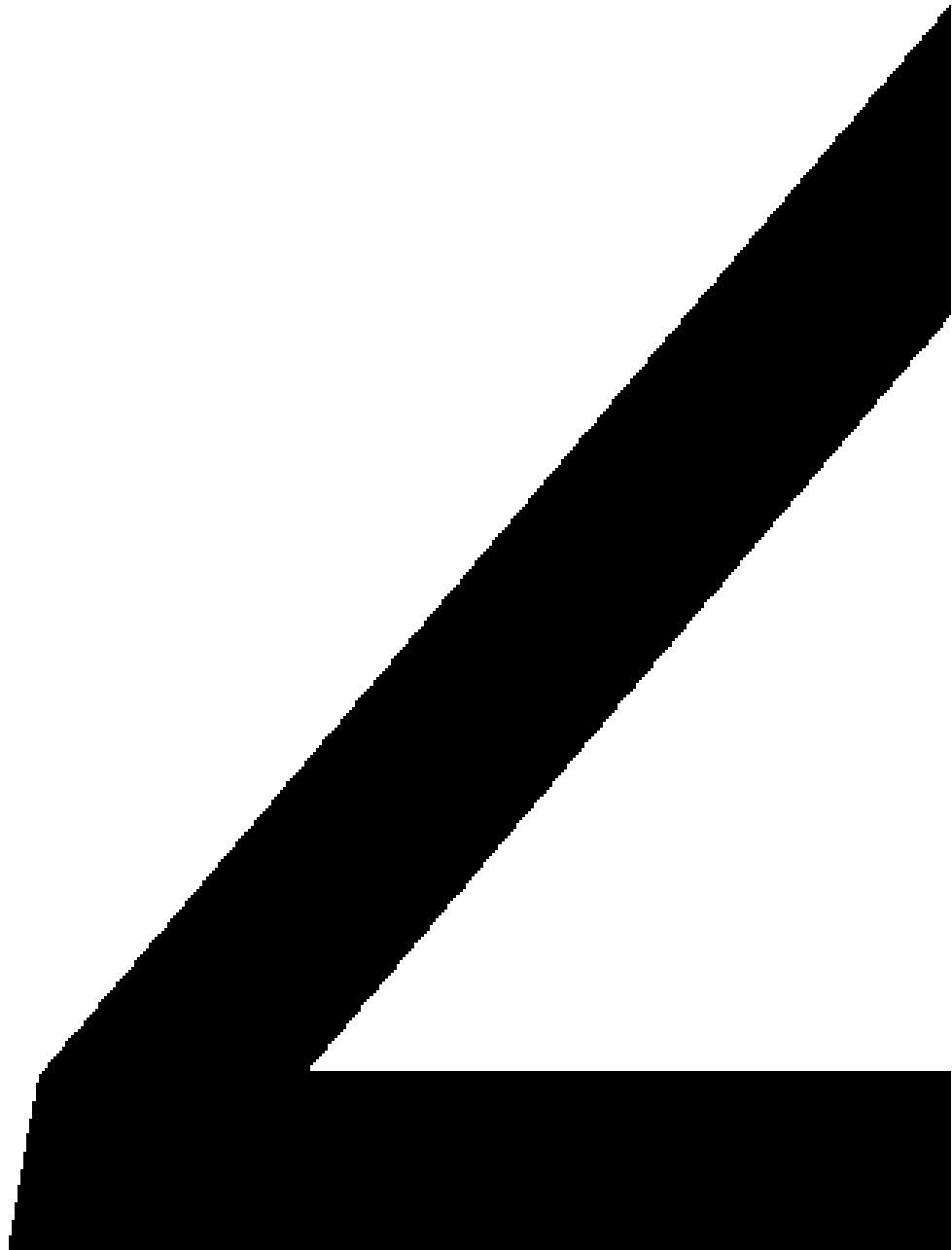
I-6) Soit



L'impédance d'entrée du montage précédent, c'est-à-dire, comme indiqué à la figure 3a, l'impédance du dipTMle entre la masse et la borne (1), lorsque l'on place une charge d'impédance complexe entre la masse et la borne (2). Soit de même

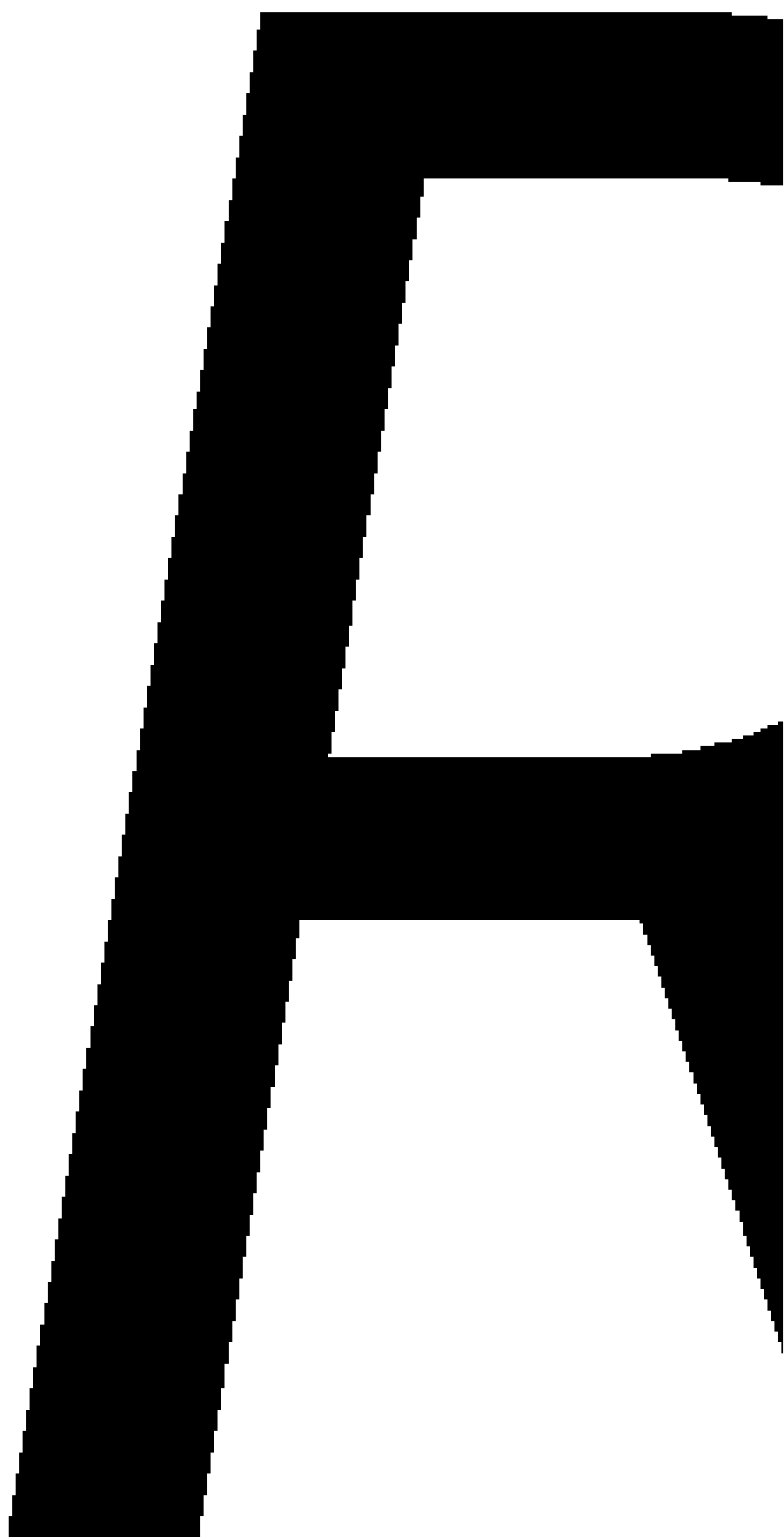


l'impédance de sortie du montage de la figure 3b. Exprimer



et





et

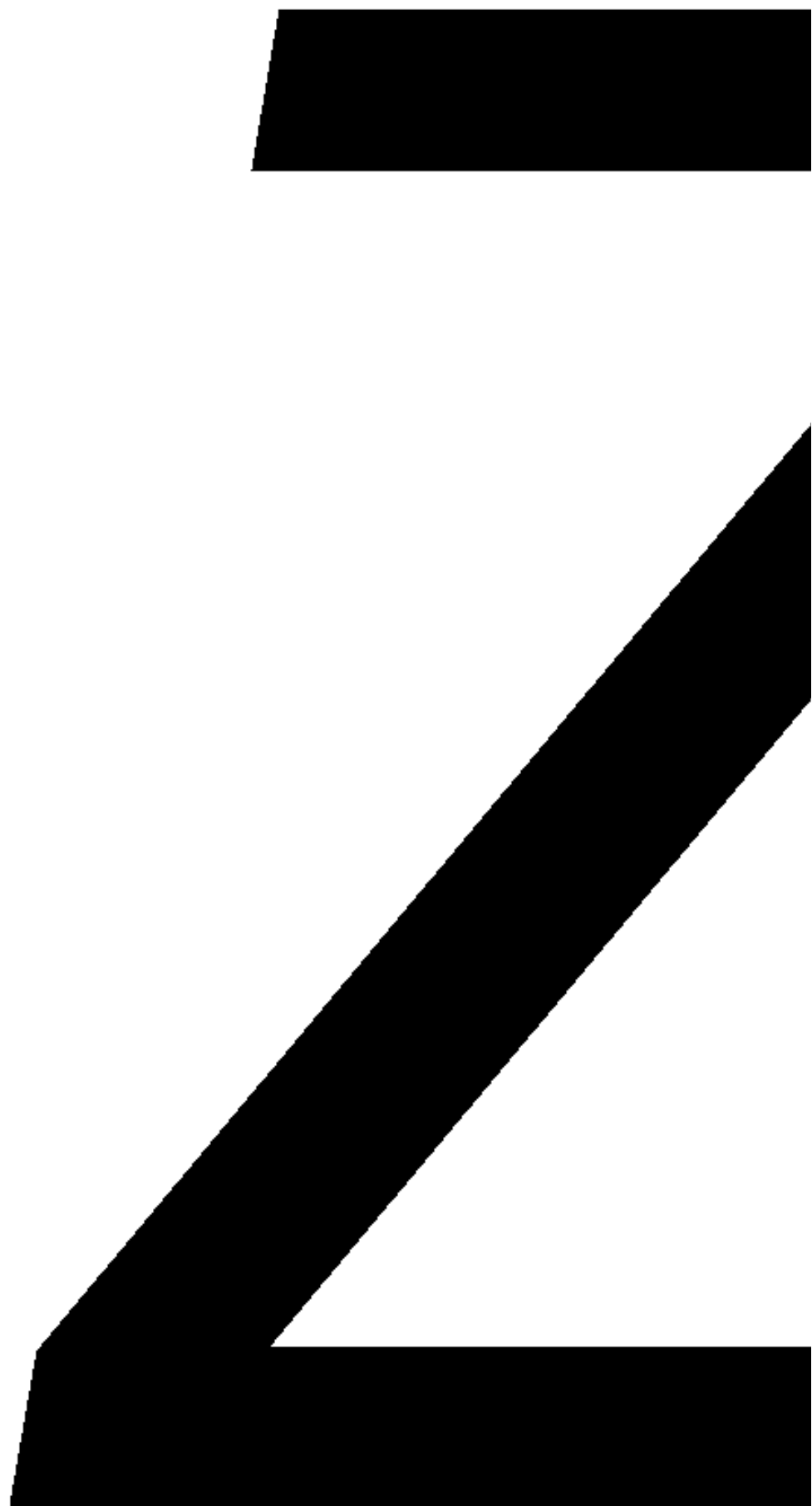
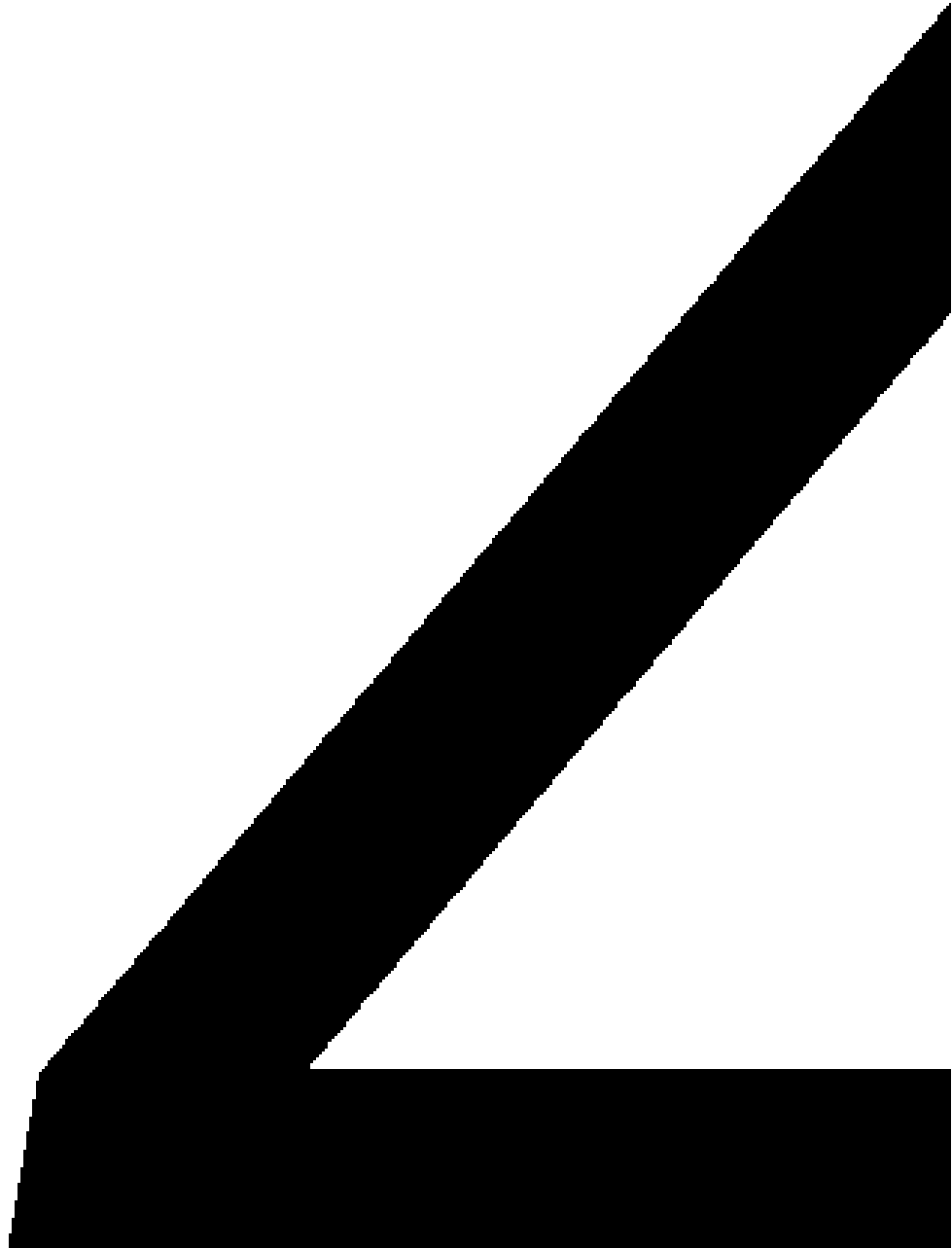


fig. 3a : Montage pour



d'Un quadripTMle

fig. 3b: Montage pour



- 39 -

dŒun quadrip™le

I-7) On

pose

.

Donner

l'expression

des

impédances

[REDACTED]

[REDACTED]

et

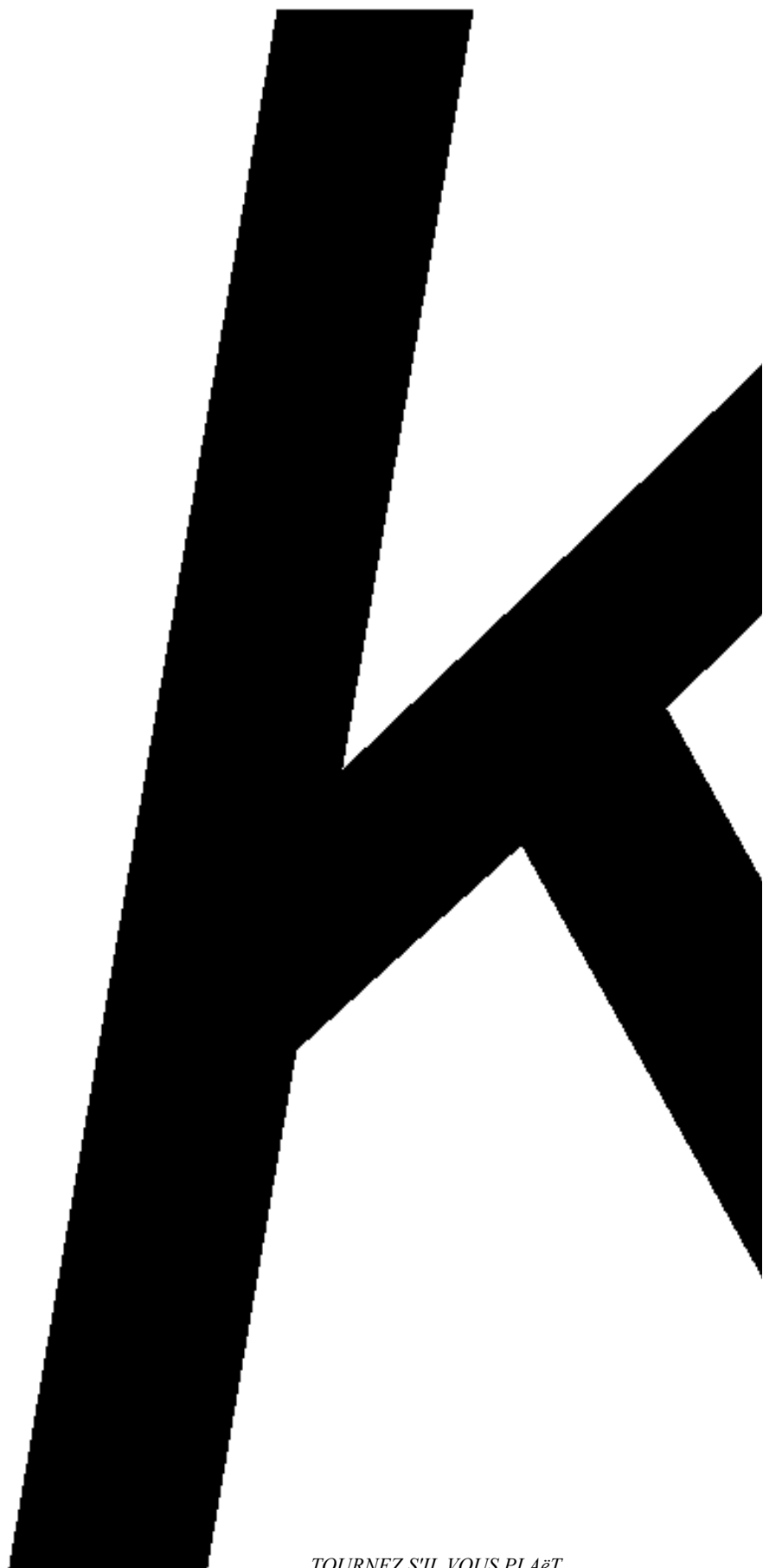
[REDACTED]

[REDACTED]

en

fonction

de



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

dans les deux cas suivants :

.

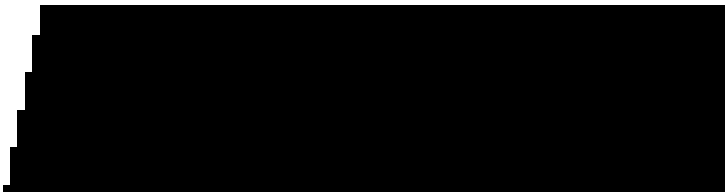
[REDACTED]

[REDACTED]

dŌune

part,

■



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

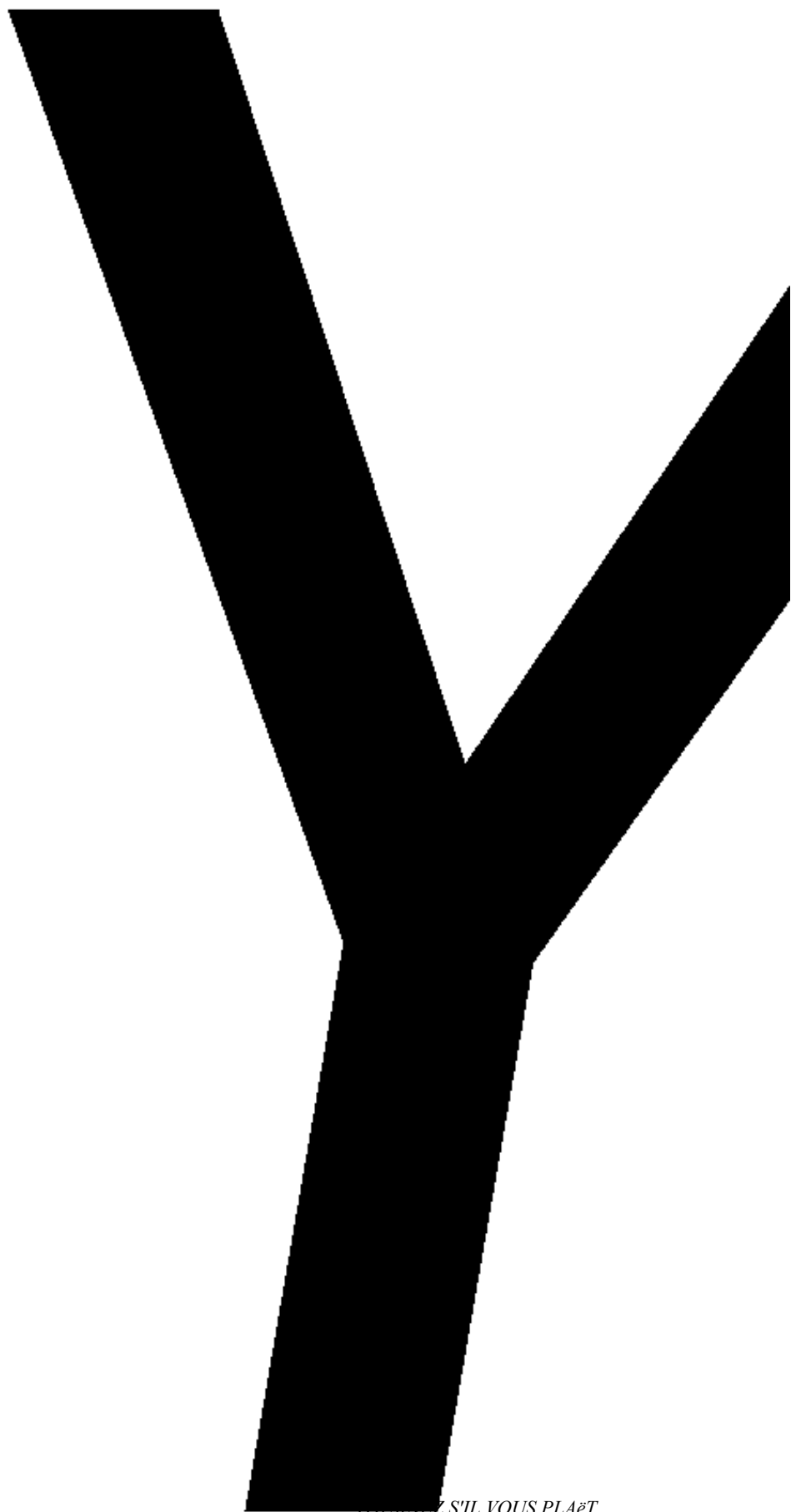
d'autre part, impédance capacitive.

Deuxième partie : Réalisation d'un gyrateur

Un gyrateur est un quadripôle travaillant en régime linéaire sinusoïdal dont la matrice d'admittance s'écrit :



. Les courants sont comptés positivement lorsqu'ils entrent dans le quadripôle,



POURQUOI S'IL VOUS PLAÎT.

est

une

admittance

rŽelle

positive

et

a

est un réel positif.

II-1) Quel est le rapport entre la puissance moyenne sortante et la puissance moyenne entrante ?

II-2) En déduire qu'un gyrateur fermé sur un composant qui ne consomme pas de puissance simule l'entrée d'un composant qui ne consomme pas non plus de puissance.

II-3) Que peut-on dire du quadripTMle si

a

est strictement plus grand que l'unité ?

II-4) Exprimer

[REDACTED]

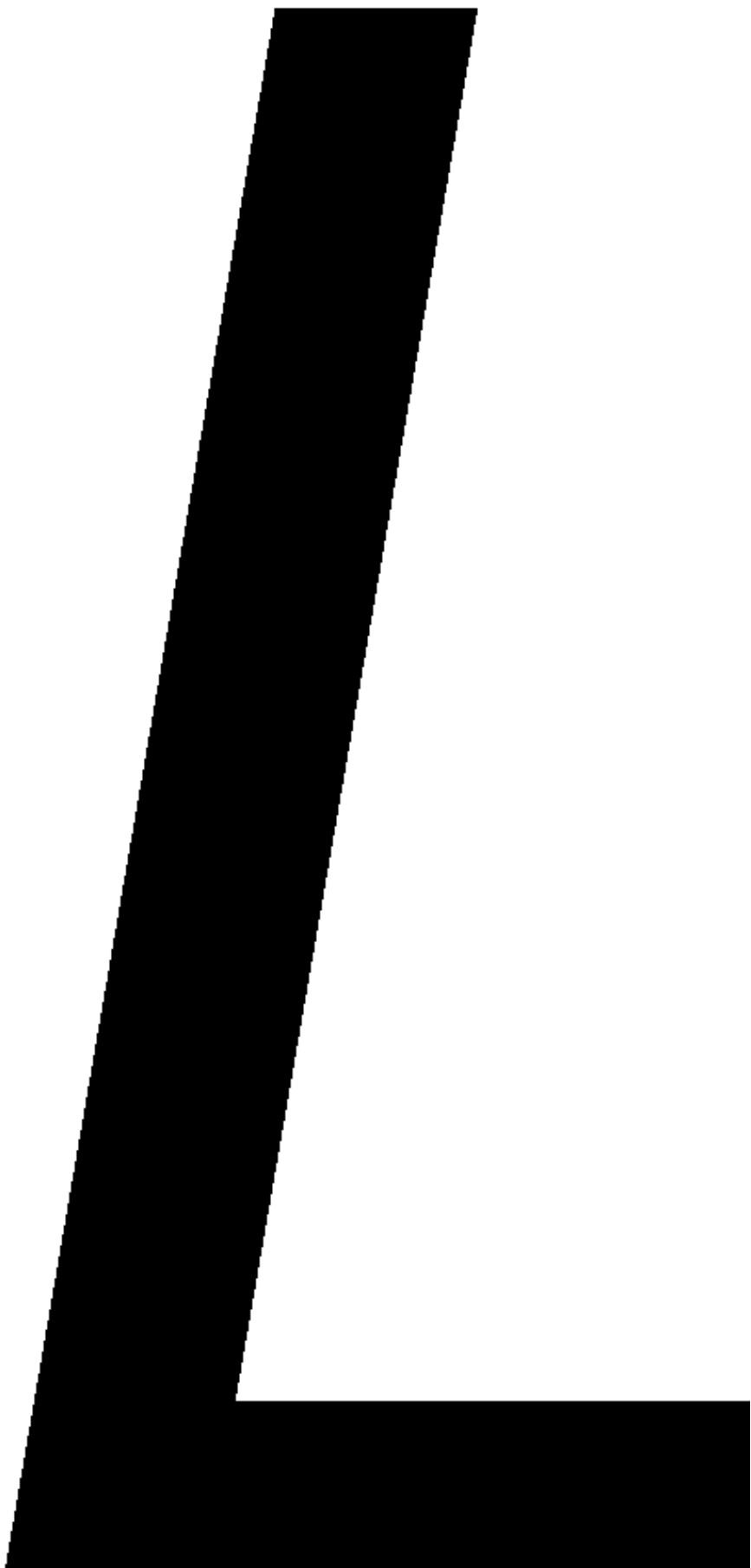
[REDACTED]

, impédance d'entrée du gyrateur, en fonction de

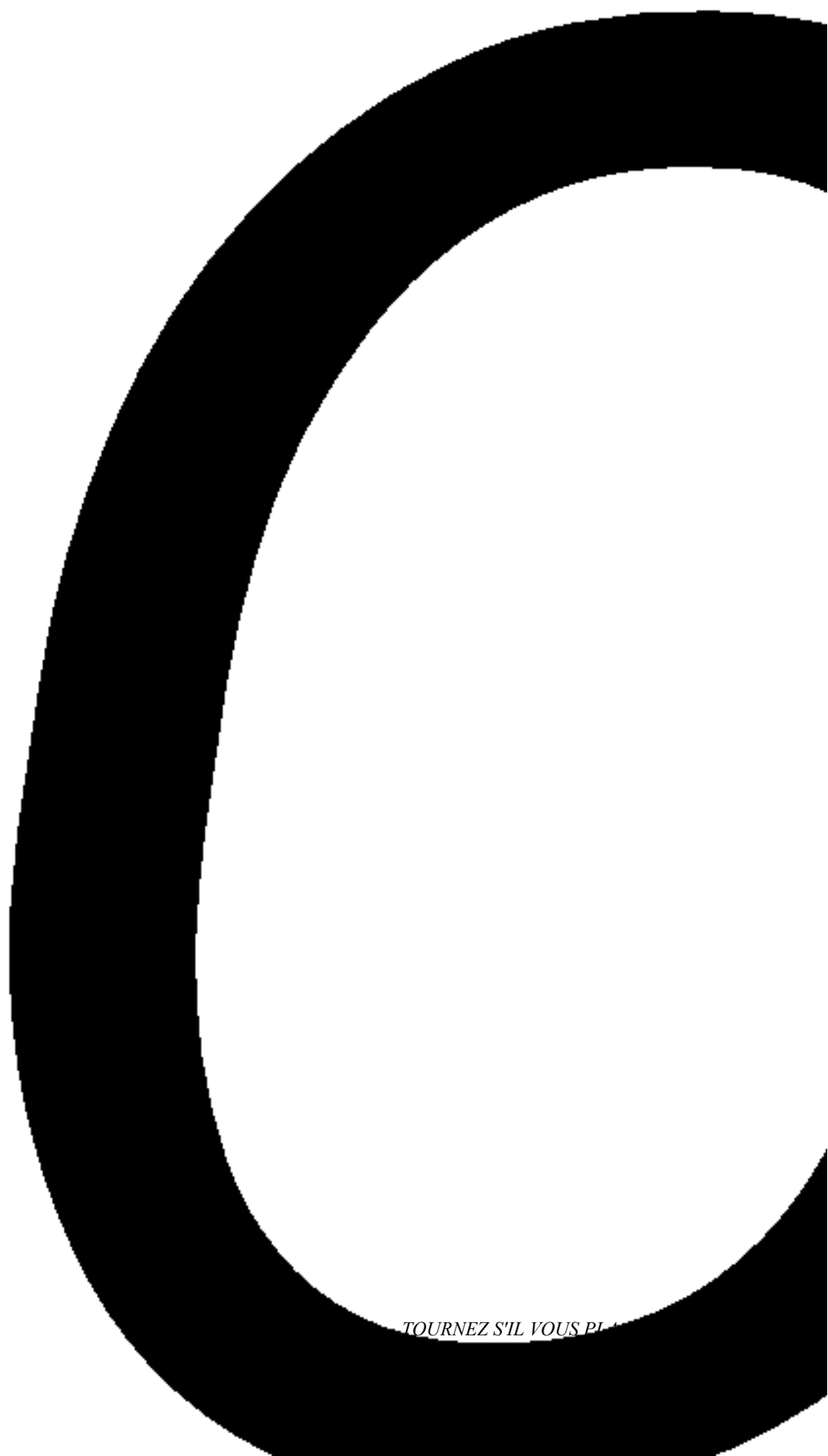
[REDACTED]

[REDACTED]

impédance placée en sortie. Préciser ces expressions lorsque le quadripTMle est fermé sur une inductance



, ou sur une capacité

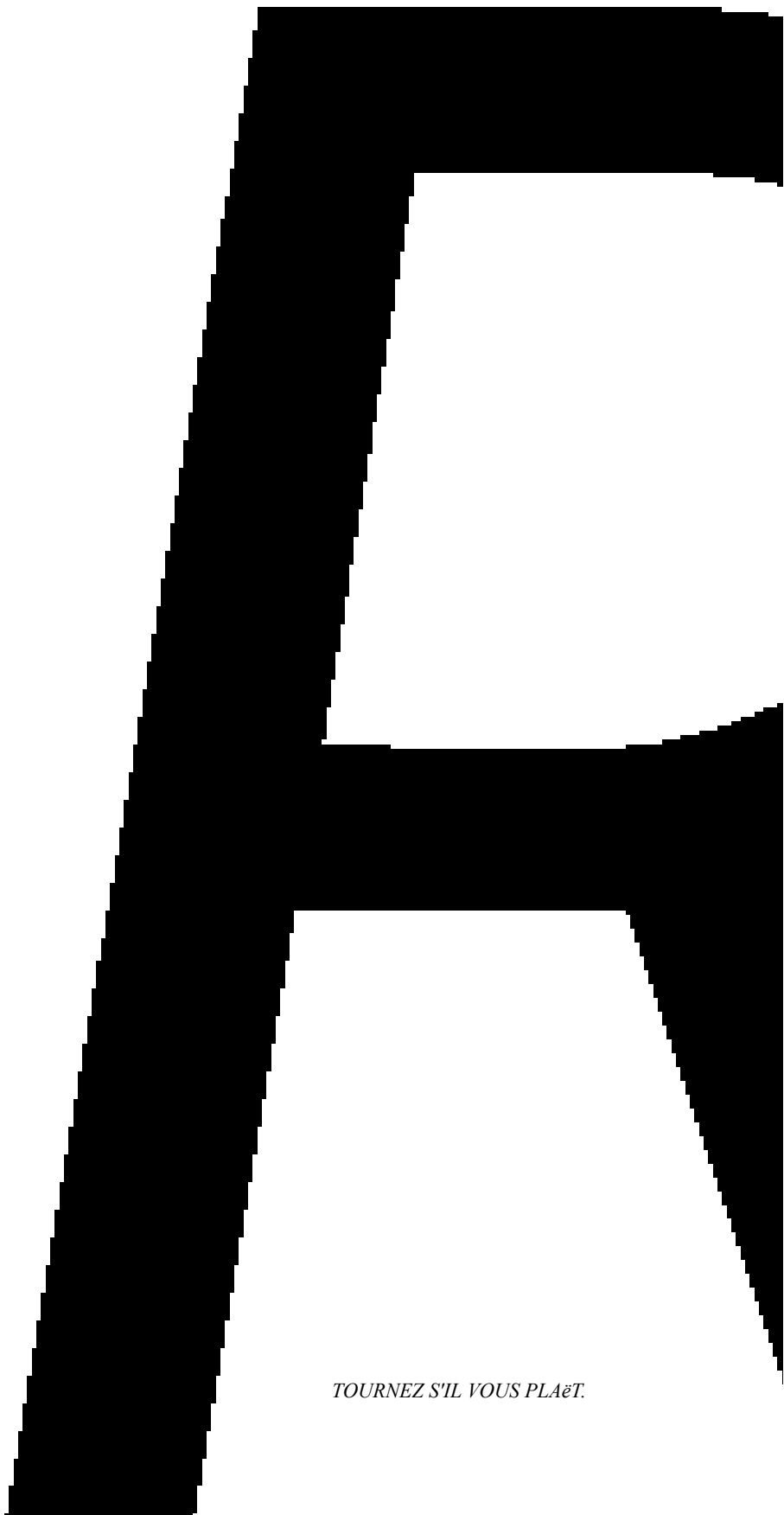


TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

. C'est plutôt sous cette dernière forme que le gyrateur est généralement utilisé. Quelle en est, selon vous, la raison ?

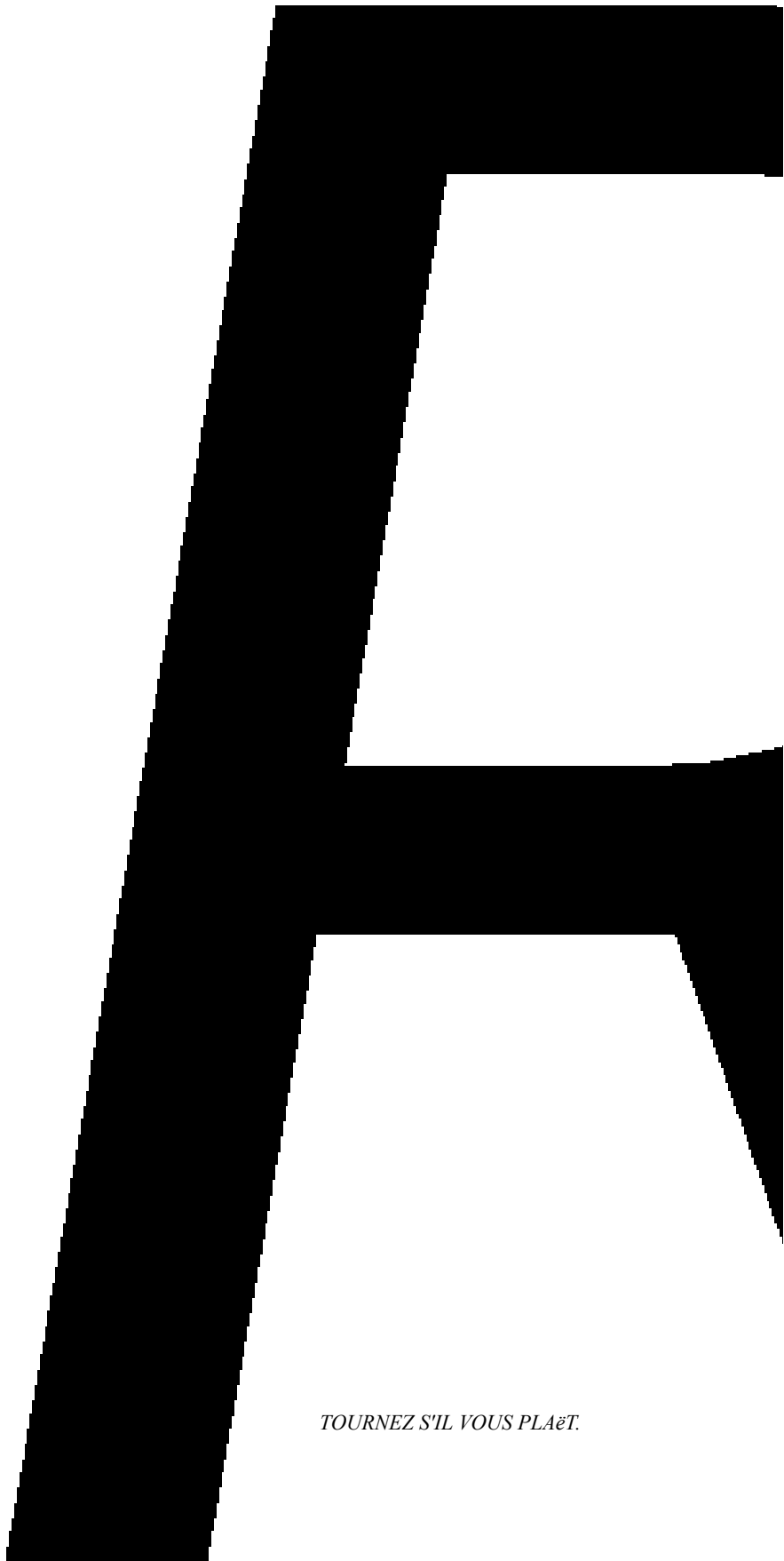
II-5) On considère que dans le schéma de la figure 4, l'amplificateur fonctionne en régime linéaire. Déterminer la relation entre

.



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

et



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

pour que la matrice admittance du quadrip^{le}le ainsi form^é soit :



fig. 4 : Schéma de la question II-5)

fig. 5 : Une réalisation de gyrateur (question II-9))

II-6) Représenter par ses éléments un quadripôle dont la matrice d'admittance est :

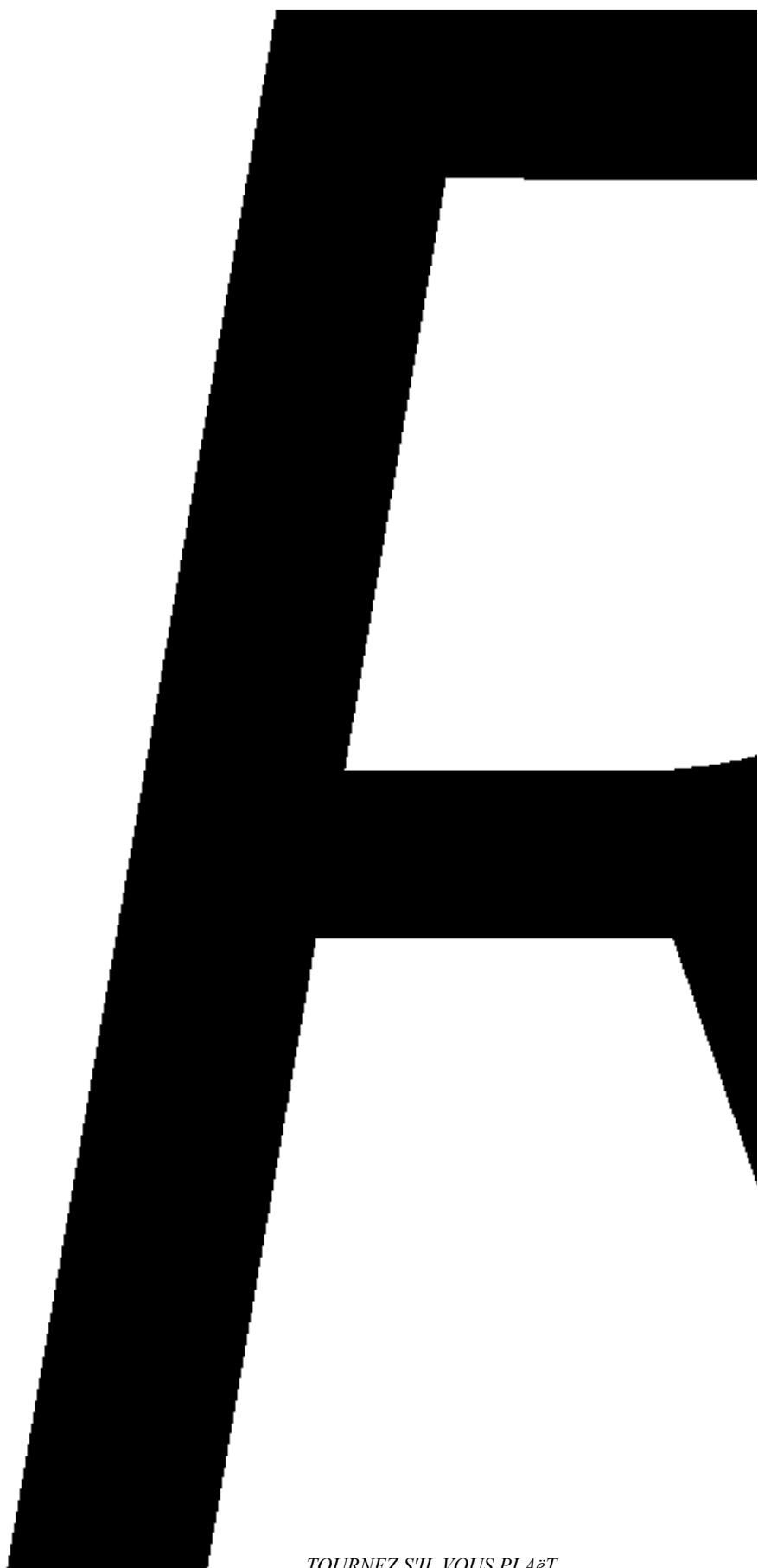
■



II-7) Représenter par ses éléments un quadripôle dont la matrice d'admittance est :

■

. On utilisera ^ cet effet un amplificateur opŽrationnel, deux rŽsistors de mme rŽsistance



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

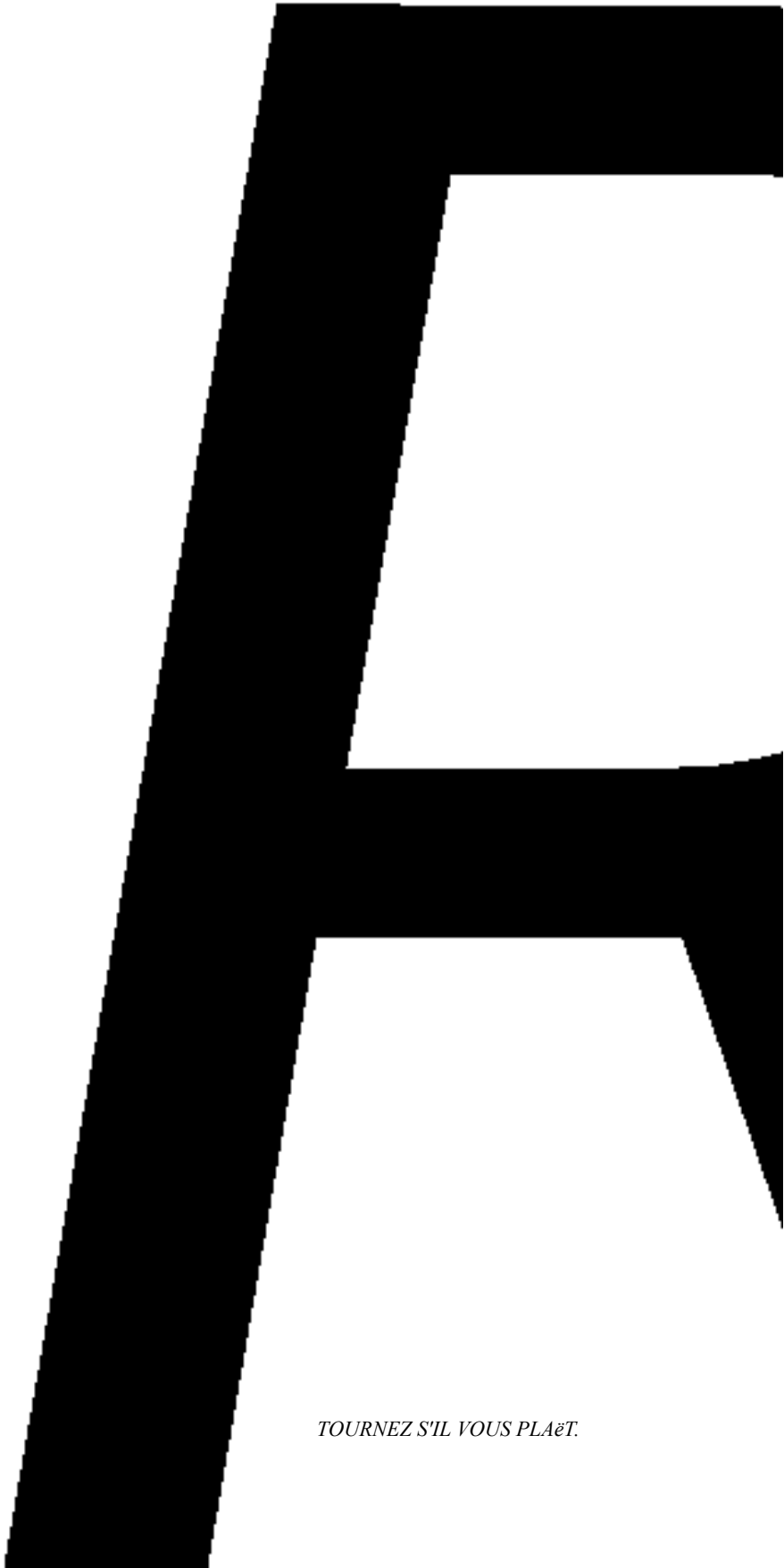
et

un

rŽsistor

de

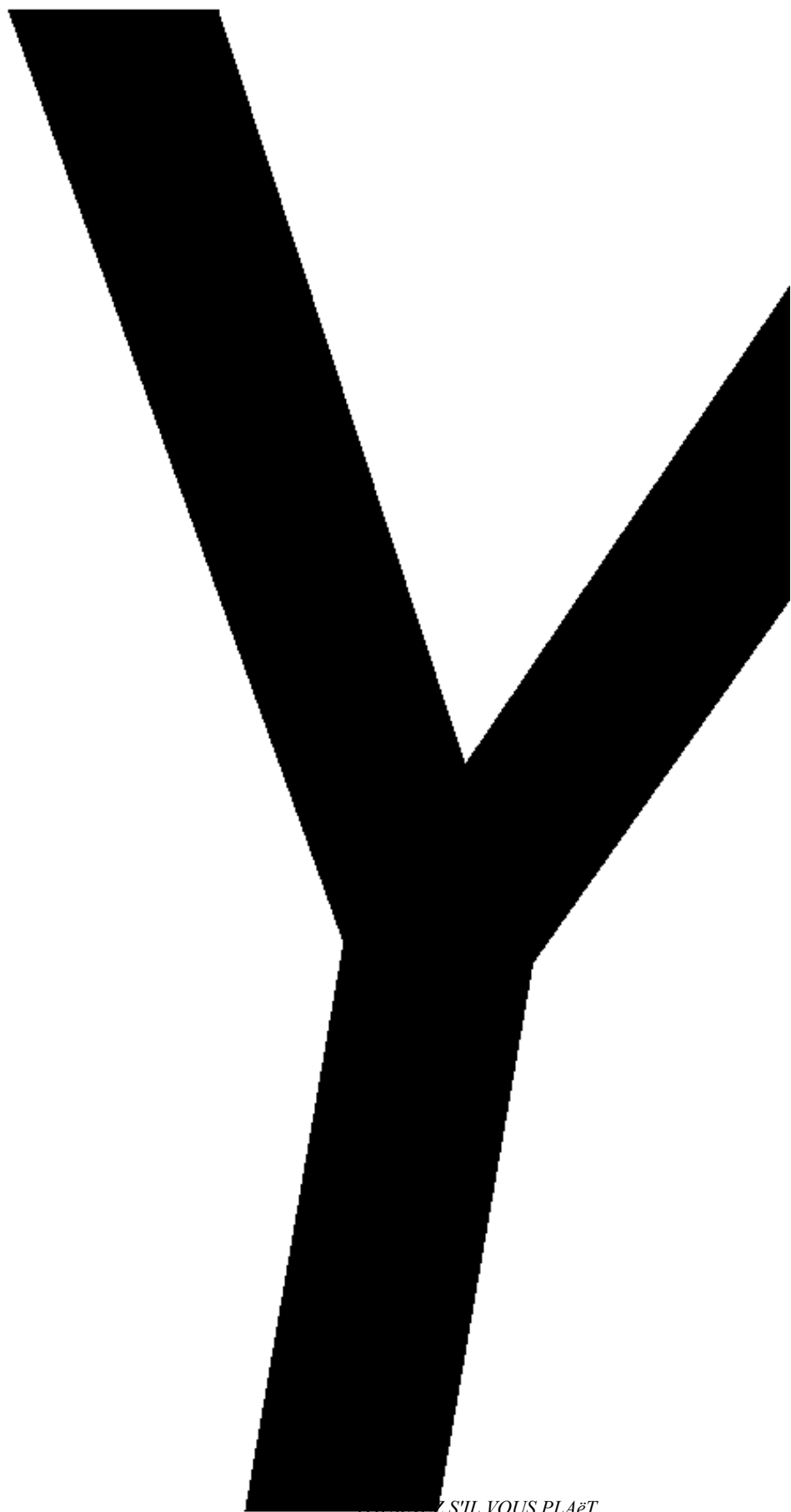
rŽsistance



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

II-8) Comment brancher le quadripTMle d^Žtermin^Ž ^ la question II-7) sur celui de la fig. 4 pour obtenir un gyrateur ?

II-9) Avec le moins de calculs possibles, montrer que le sch^Žma de la fig. 5 r^Žalise un gyrateur et, toujours dans le cadre d^Žun r^Žgime de fonctionnement lin^Žaire, donner les valeurs de



POURQUOI S'IL VOUS PLAÎT.

et

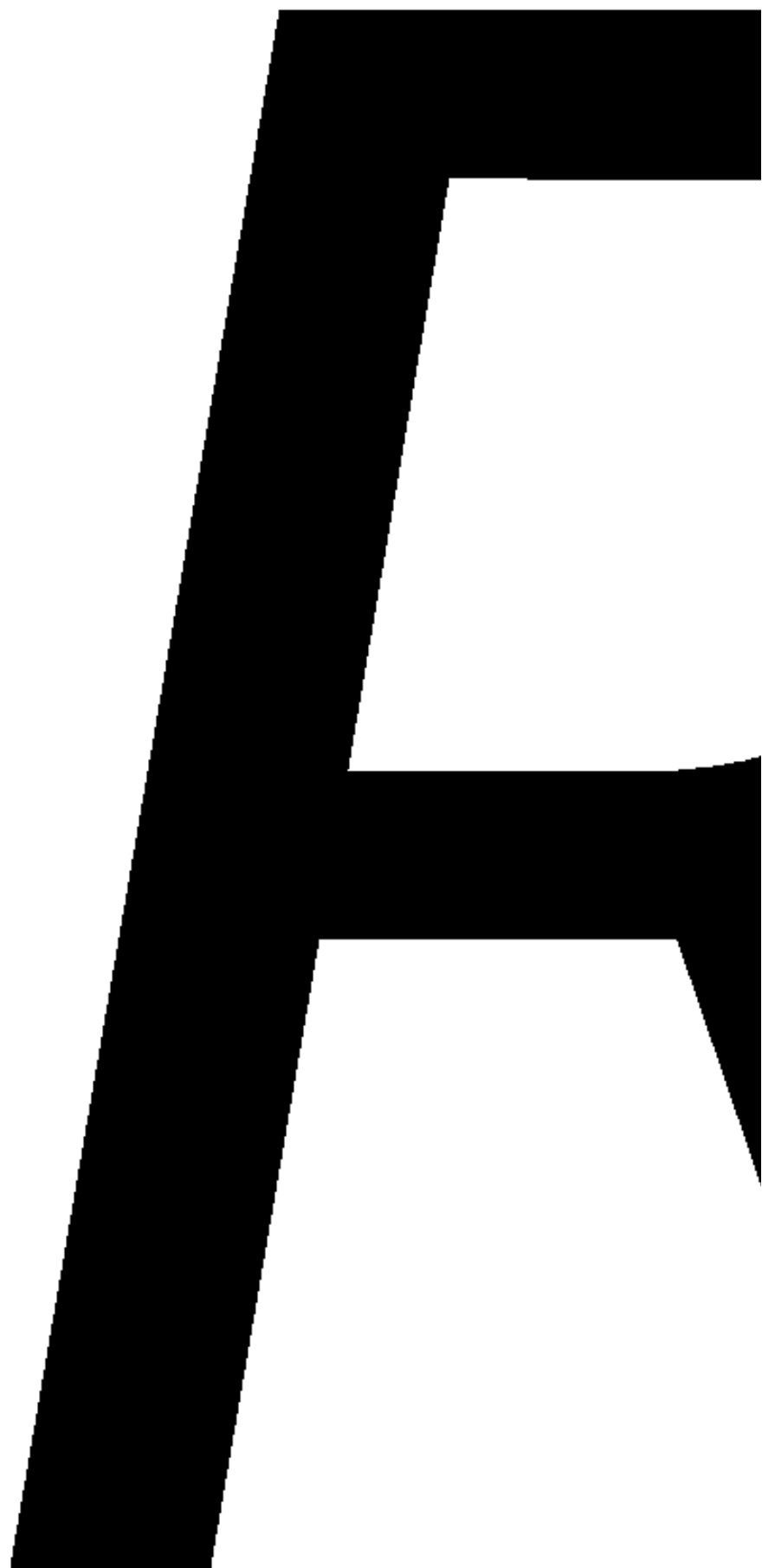
de

a

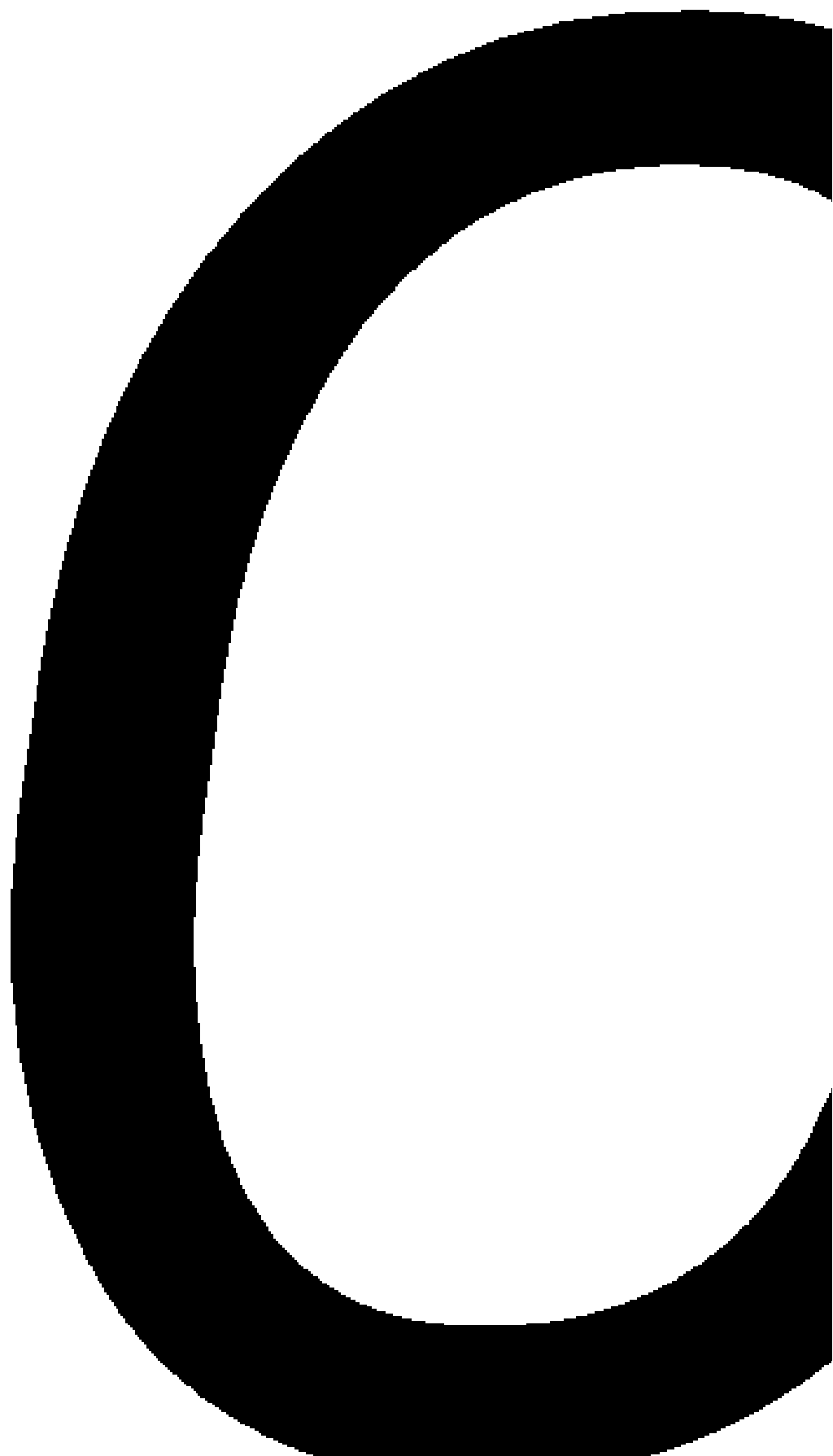
qui lui sont associés.

Troisième partie : Utilisation du gyrateur

III-1) La fig. 6 représente le gyrateur G de la fig. 5 fermé sur l'association de



et



montés en parallèle . Déterminer l'expression de la transmittance

.

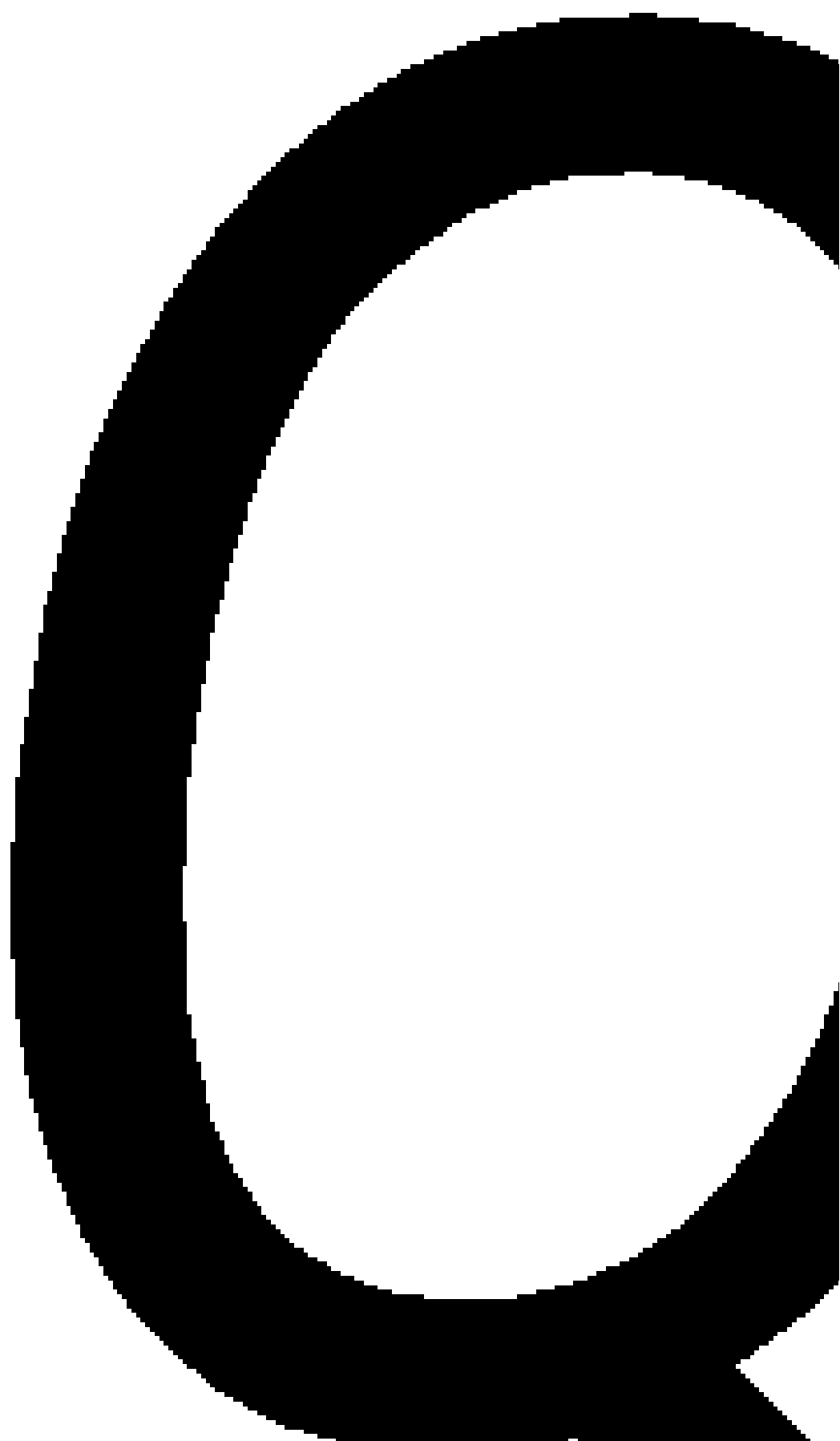


du filtre ainsi rŽalisŽ (on pourra poser

■



et



). Qu'ŉa-t-on ainsi simulŉ ?

fig. 6 Filtre accordable utilisant un gyrateur

III-2) Quel est le r^{TM} de l'amplificateur opérationnel en fin de montage ?

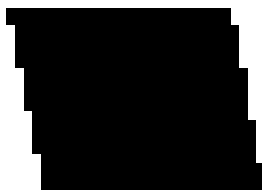
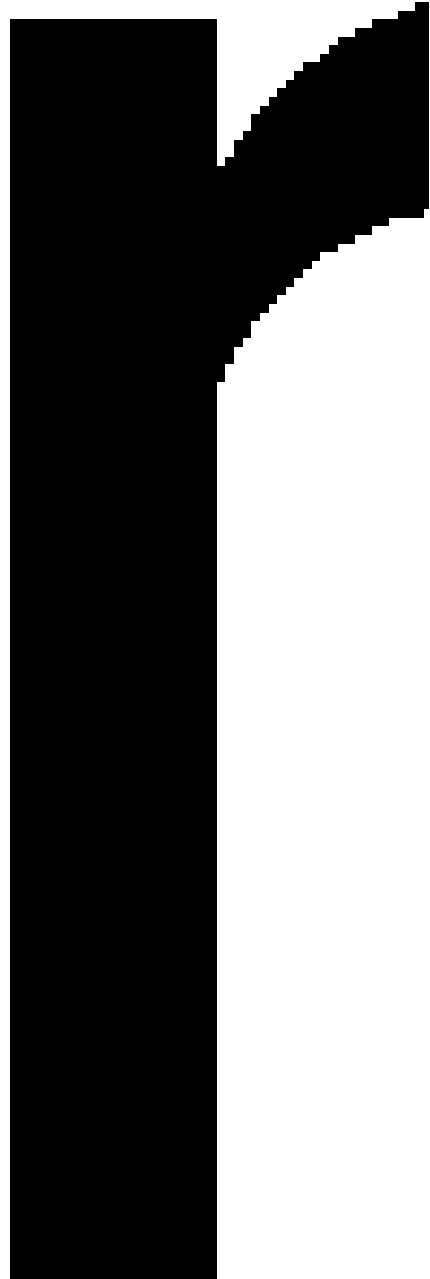
III-3) Donner l'expression de la fréquence d'accord, de la largeur de bande passante et du facteur de qualité de ce filtre, en fonction de la valeur de ses composants. Montrer que les réglages de la bande passante et de la fréquence d'accord sont indépendants l'un de l'autre.

FIN DE CE PROBLÈME

Première partie : Superposition d'écoulements

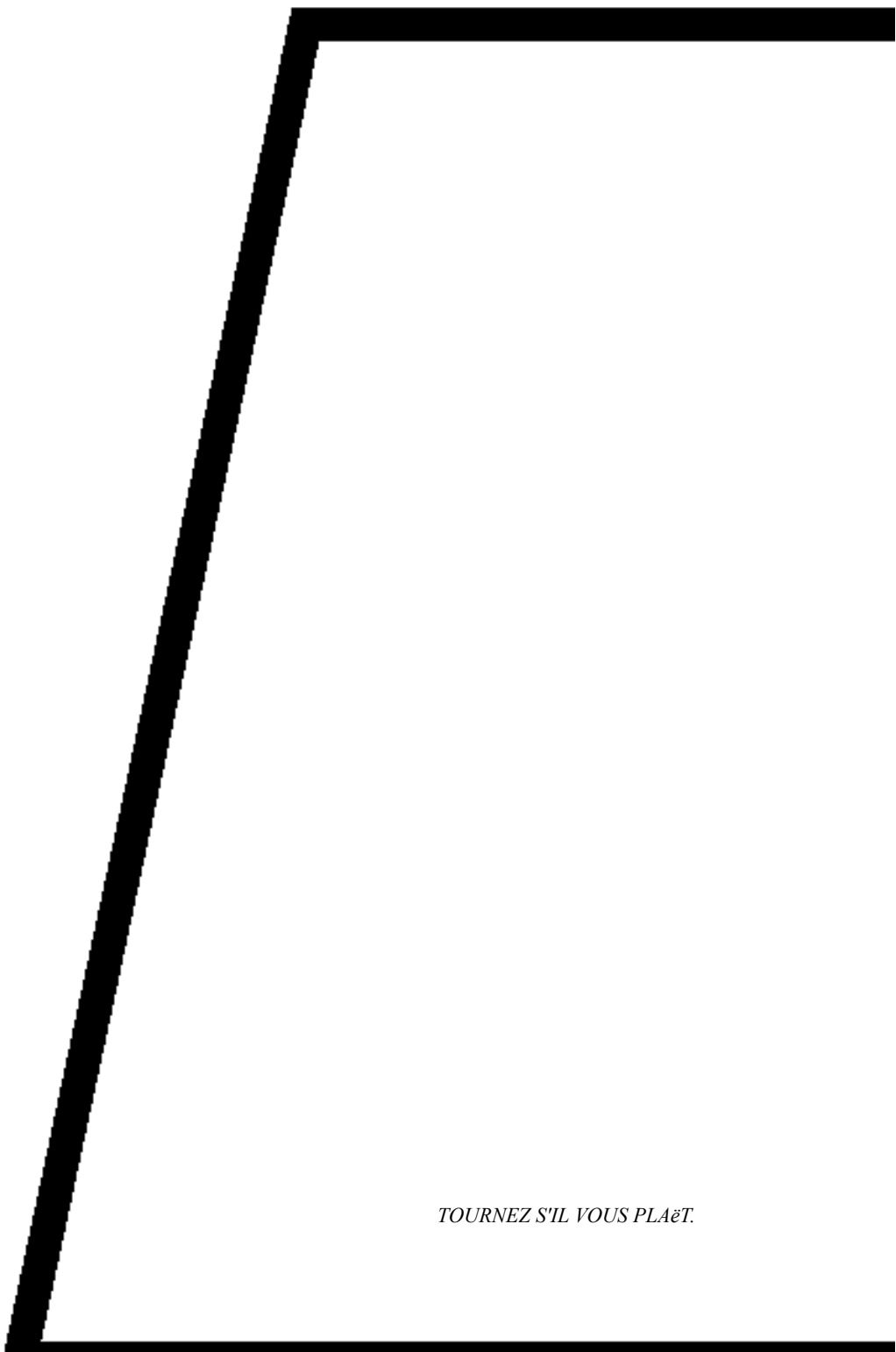
On considère l'écoulement d'un fluide incompressible parfait défini par le champ de vitesse

■



,

O



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

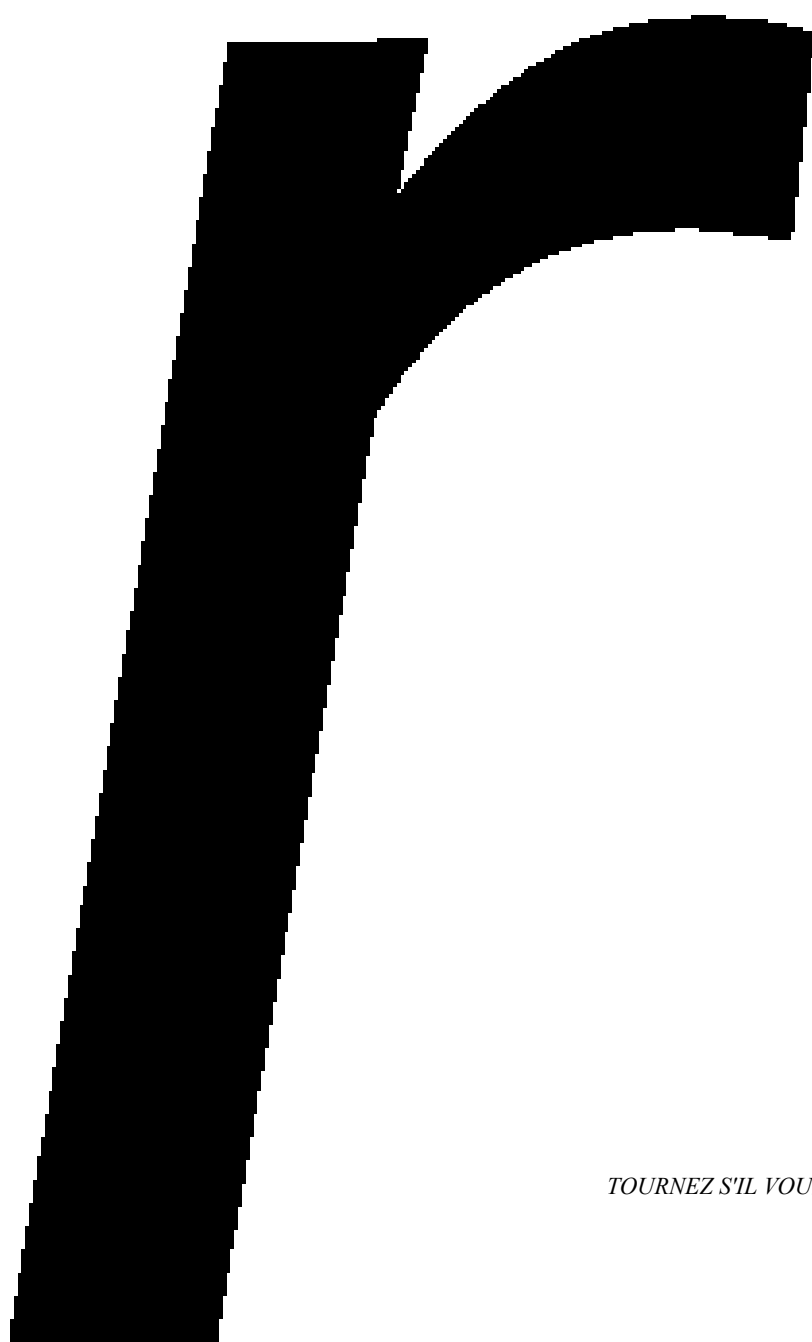
est

une

constante

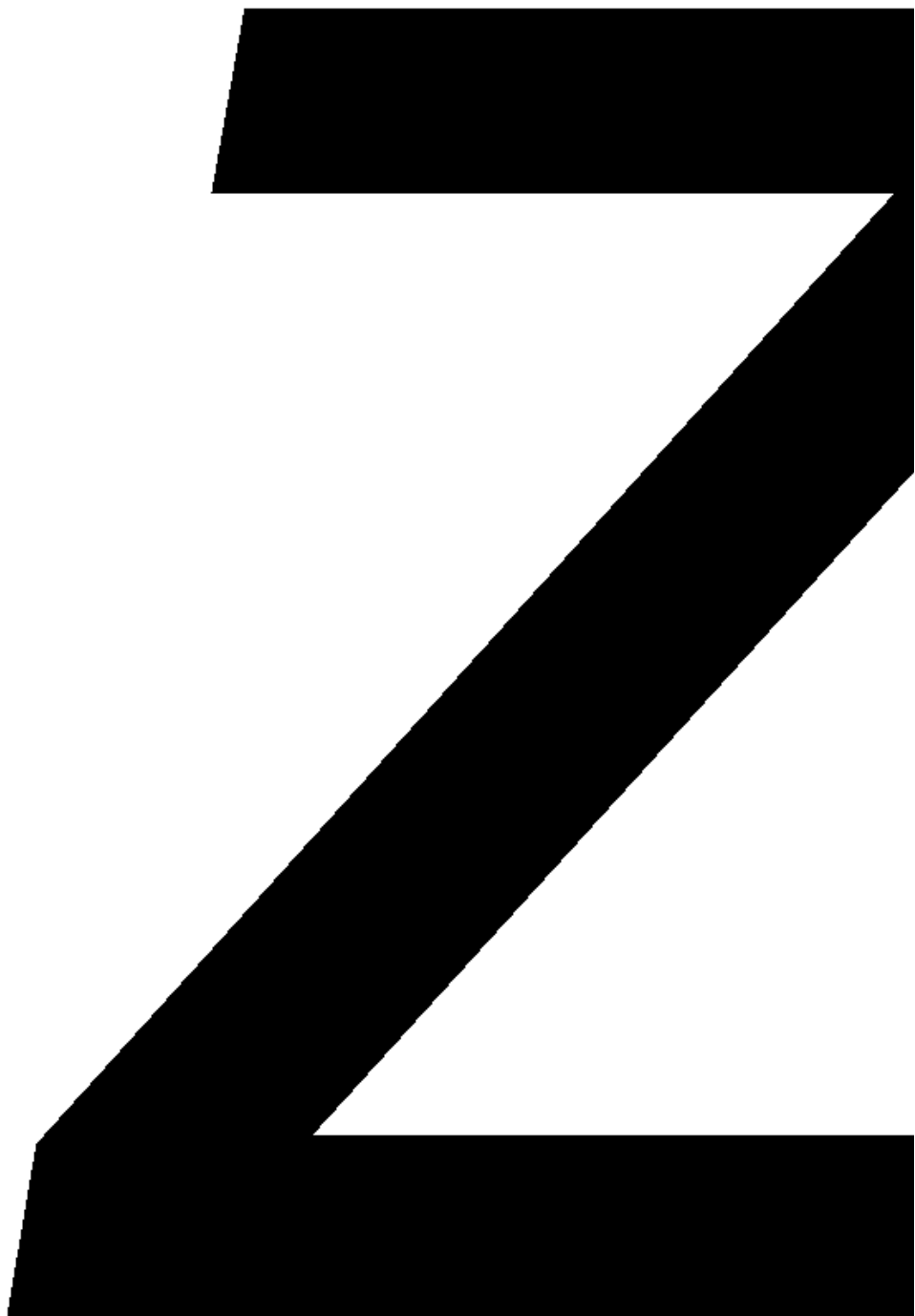
rŽelle

et



TOURNEZ S'IL VOUS PLÂT.

et



les coordonnées cylindriques d'un point M par rapport au point A_1 de coordonnées

.

dans

un

repre

galilŽen

▪

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

muni

de

la

base

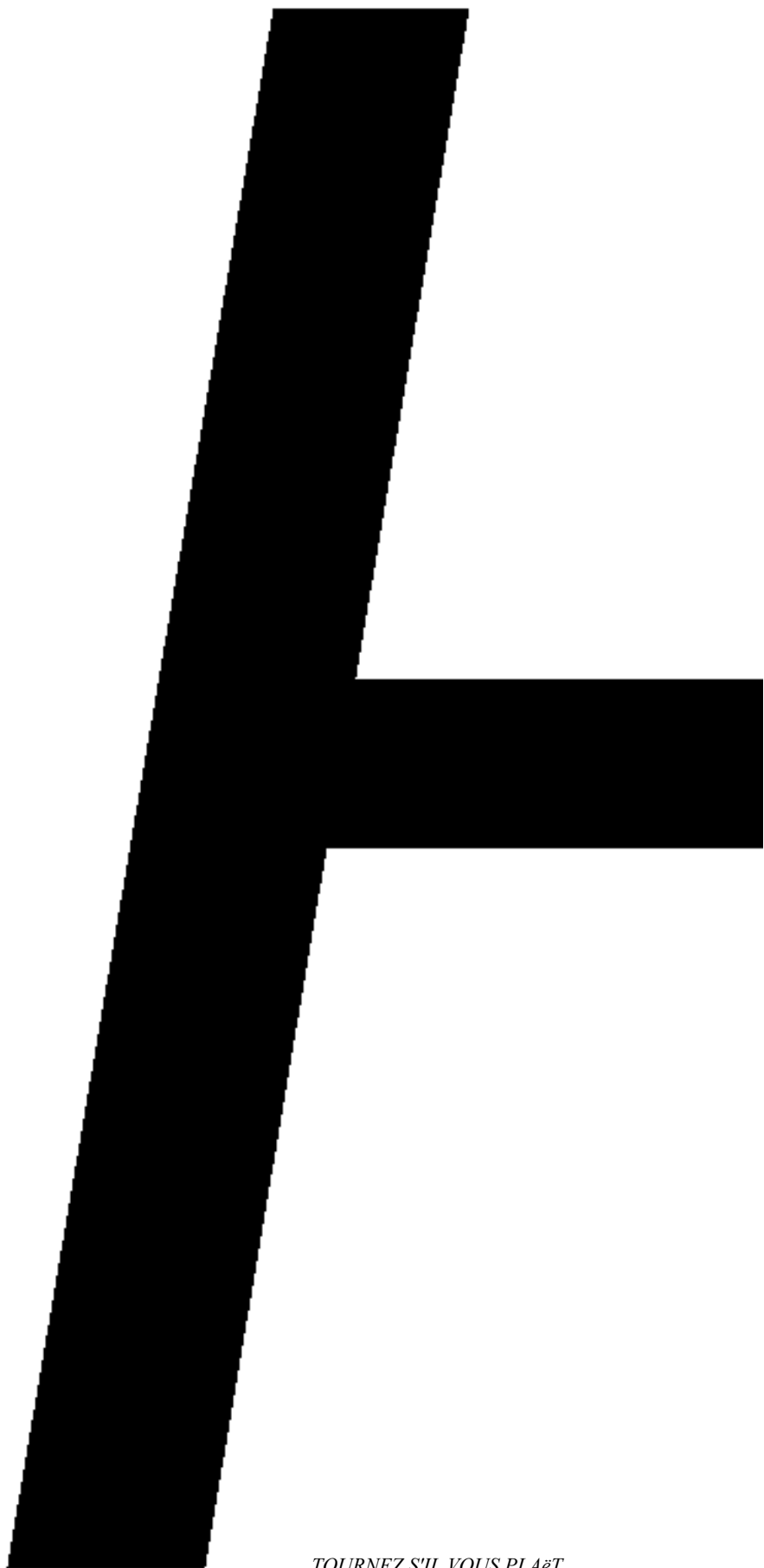
orthonormŽe

.

.

Le

point

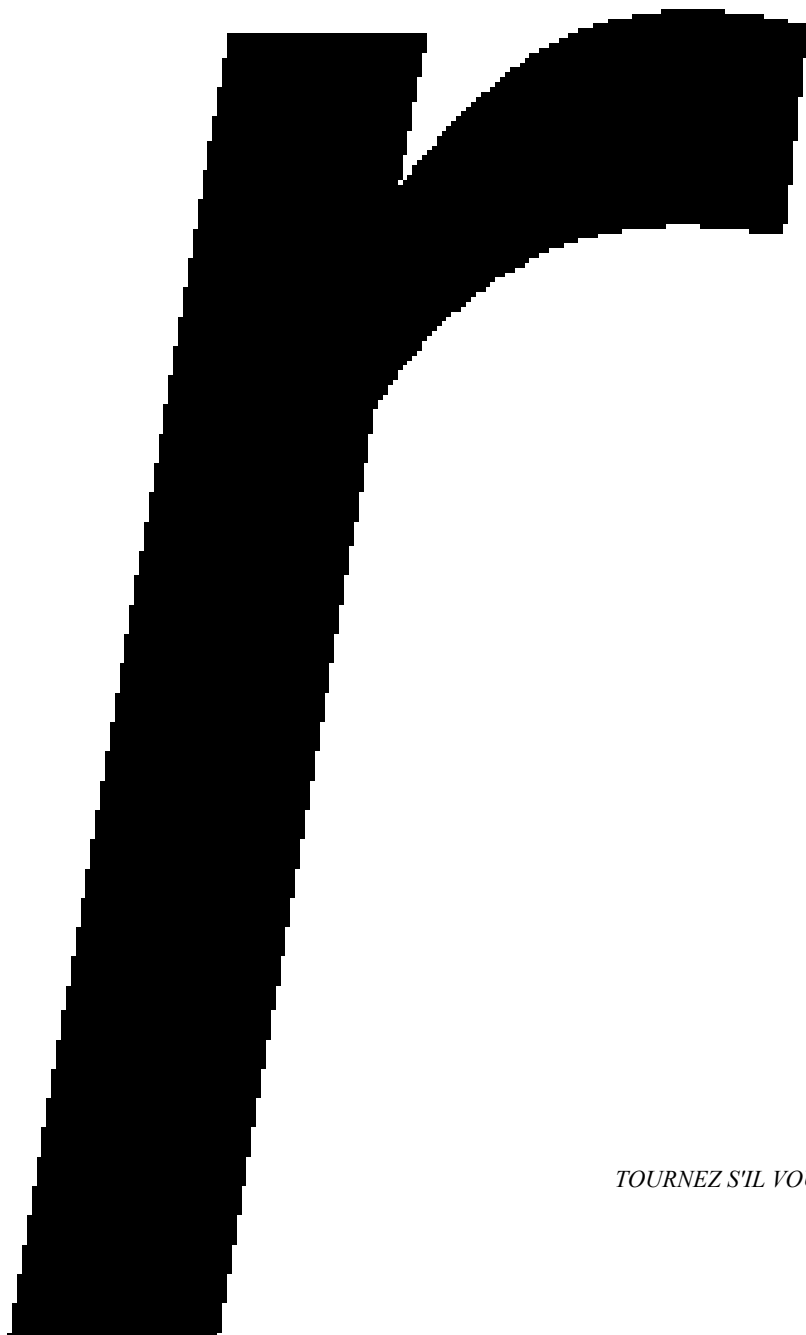


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

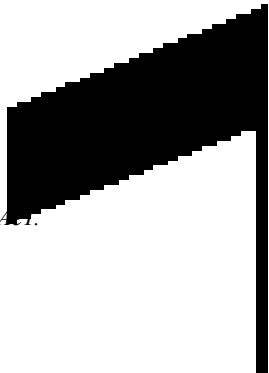
(fig. 1) Žtant la projection du point M sur le plan

, on a : =

.



TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT.



,

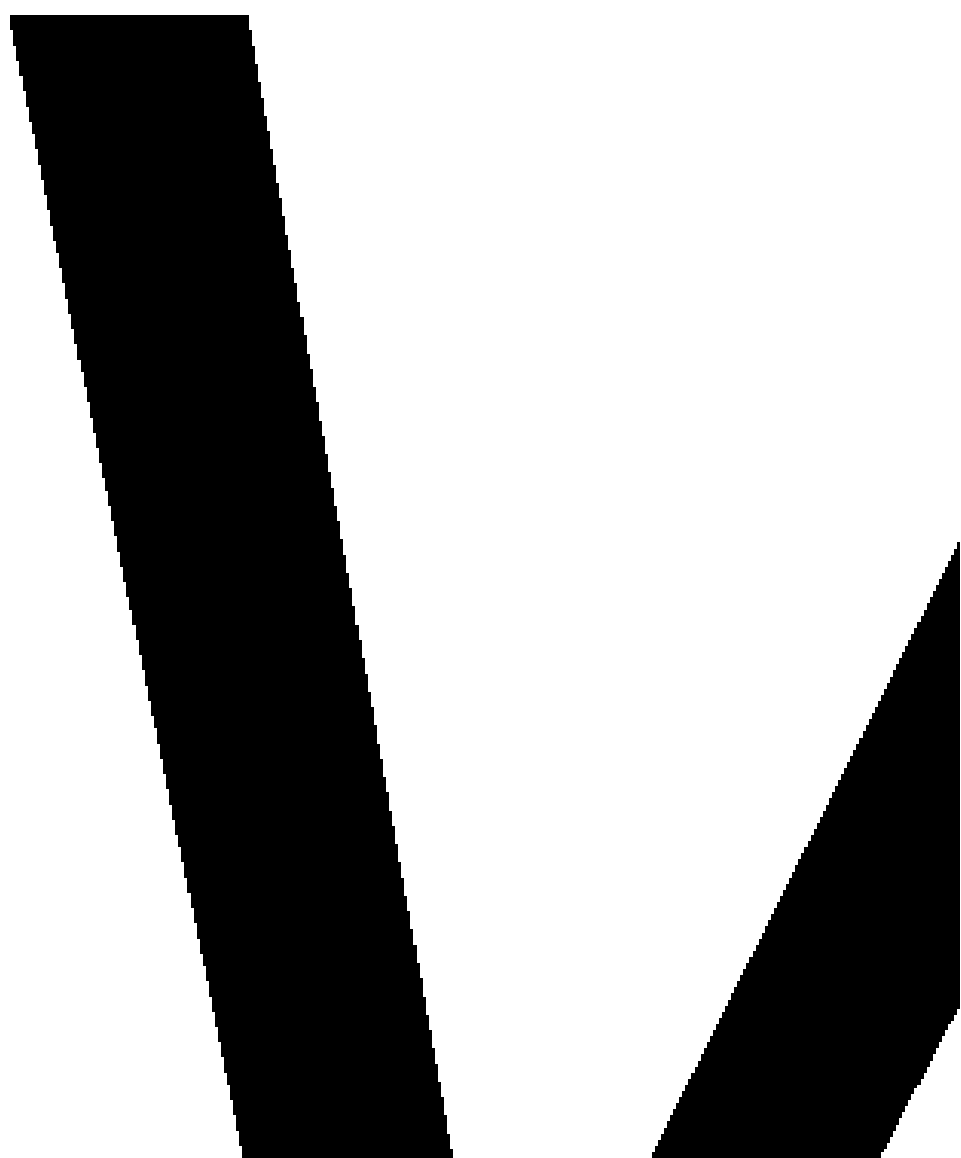
O



U

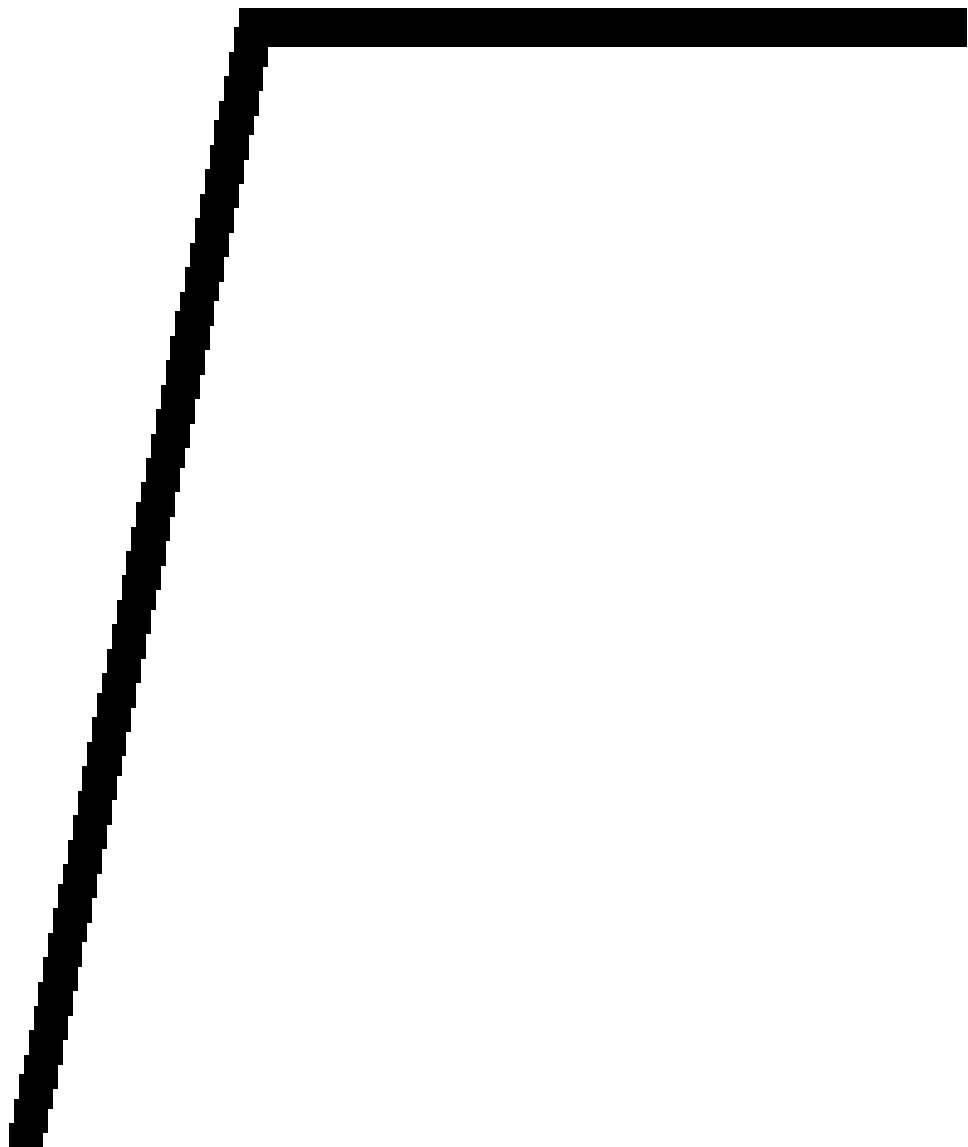
est le vecteur unitaire portŽ par .

I-1) Montrer que la circulation du vecteur



entre deux points A et B est indépendante du chemin suivi et déterminer le potentiel

.



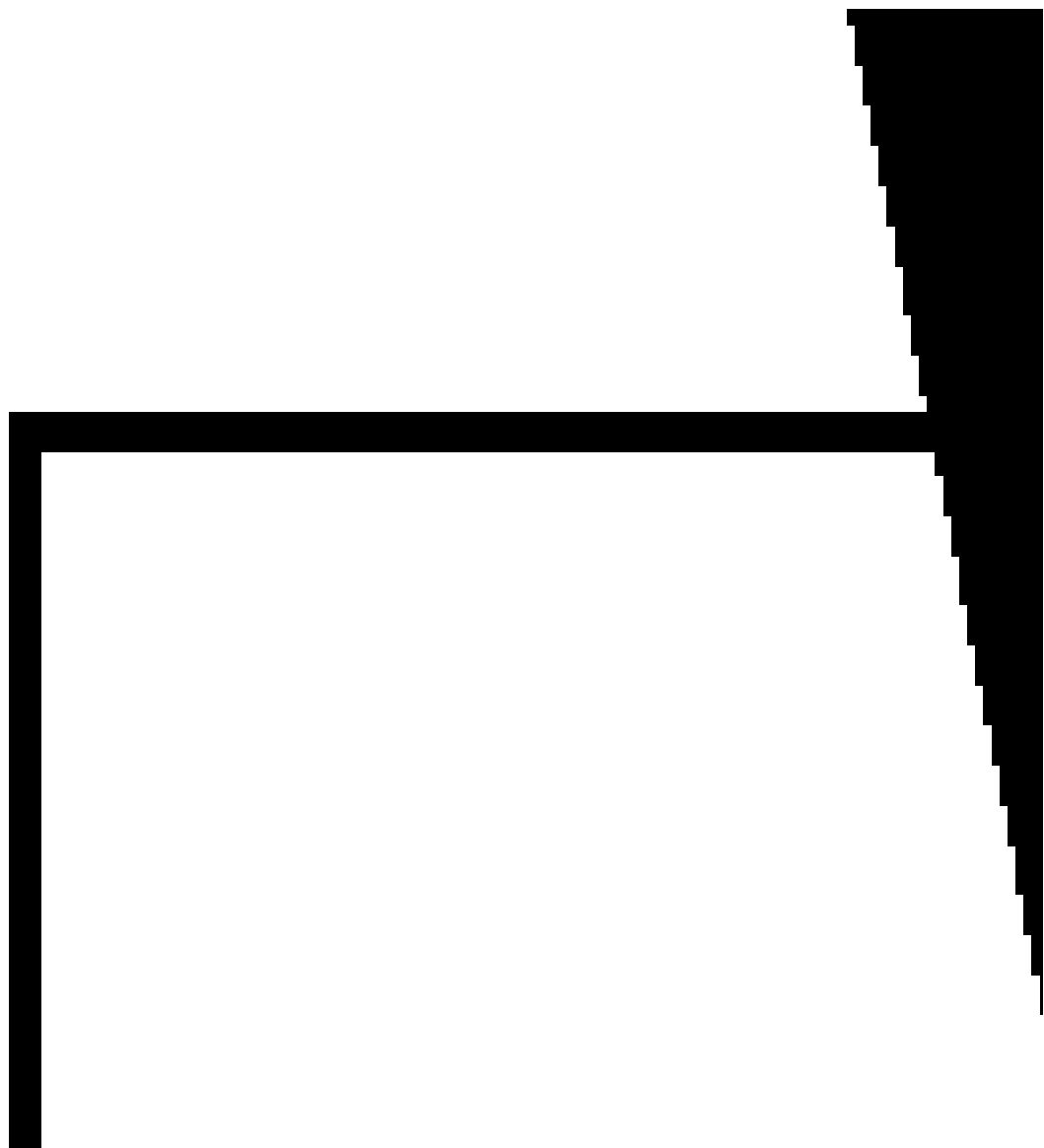
associž

^

cet

Žcoulement

■



, sachant qu'il est par convention nul pour une certaine valeur

r

de

r

—

I-2) Cet Écoulement suit-il la loi de Laplace

.

?

fig. 1 : f coulement d'Zfini par

■

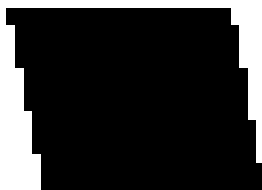
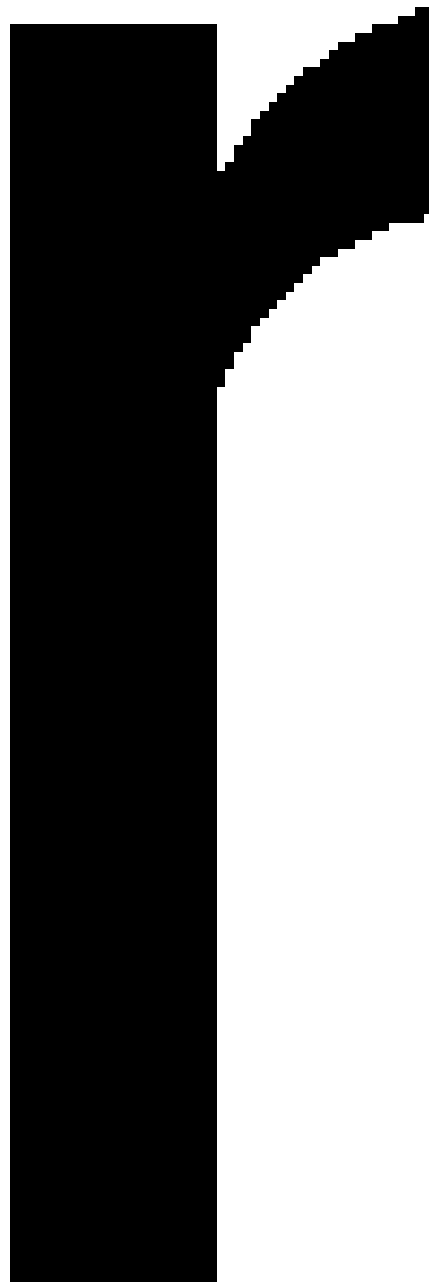
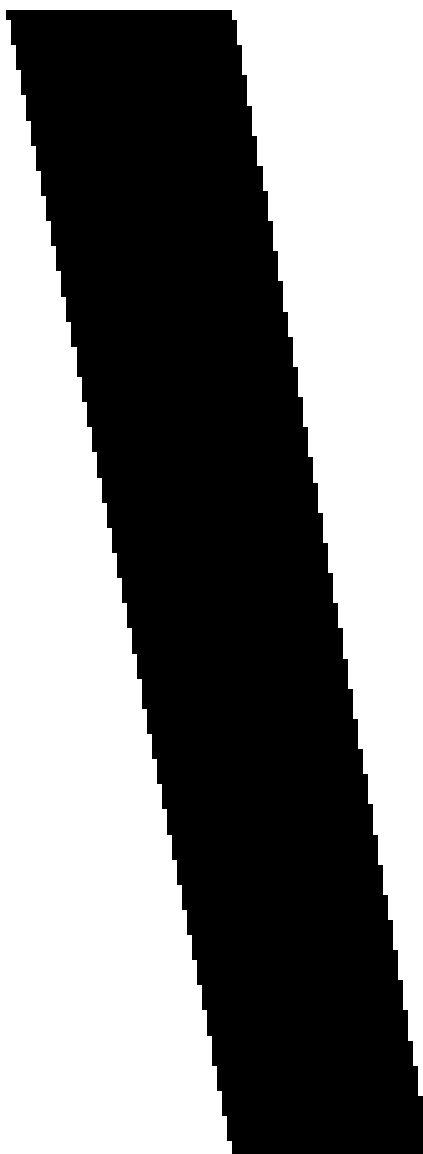


fig. 2 : $f_{\text{coulement}}$ d'Žfini par

.

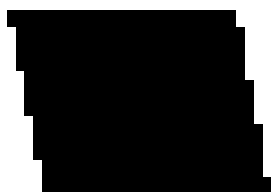


TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

(cf. I-3))

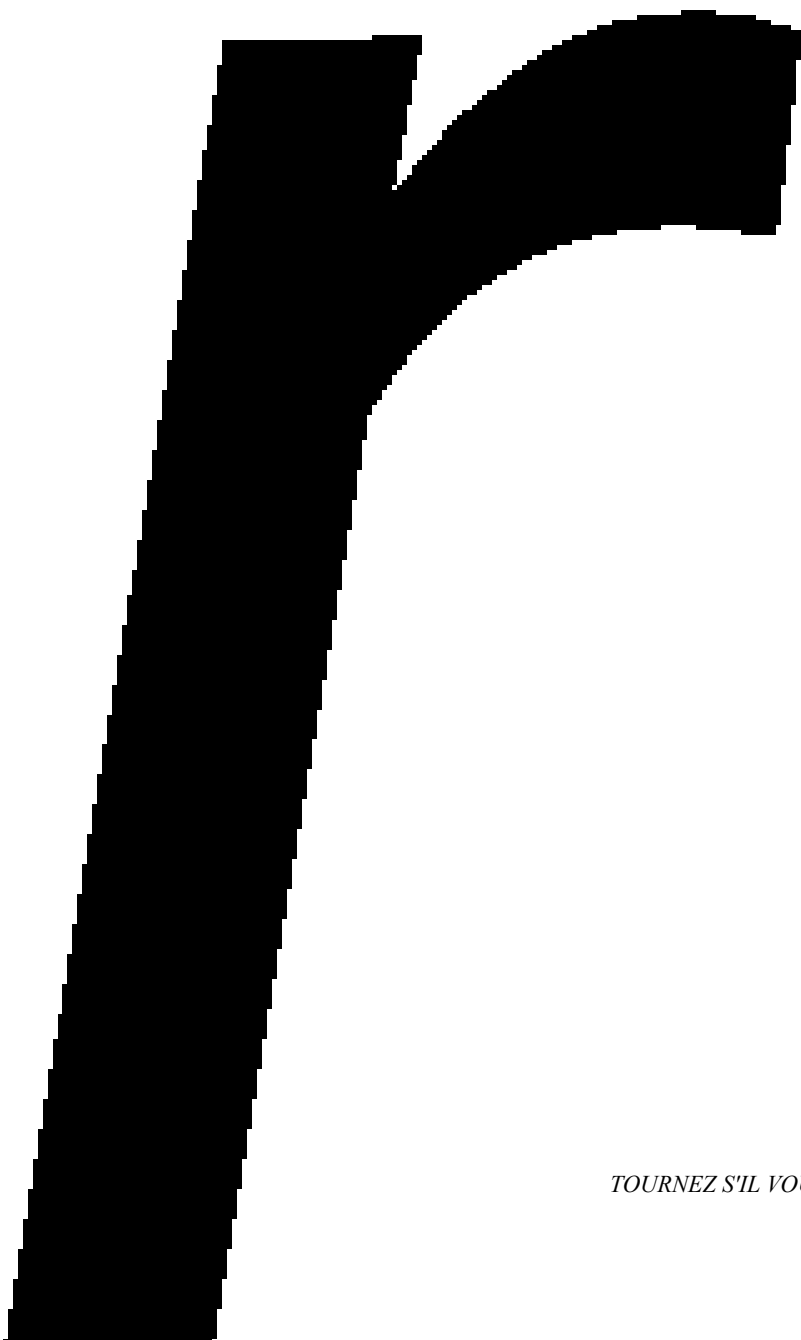
I-3) On superpose à l'écoulement précédent le nouvel écoulement défini par le champ de vitesse

■

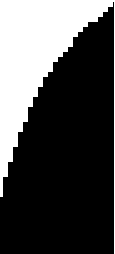


, avec = + =

.

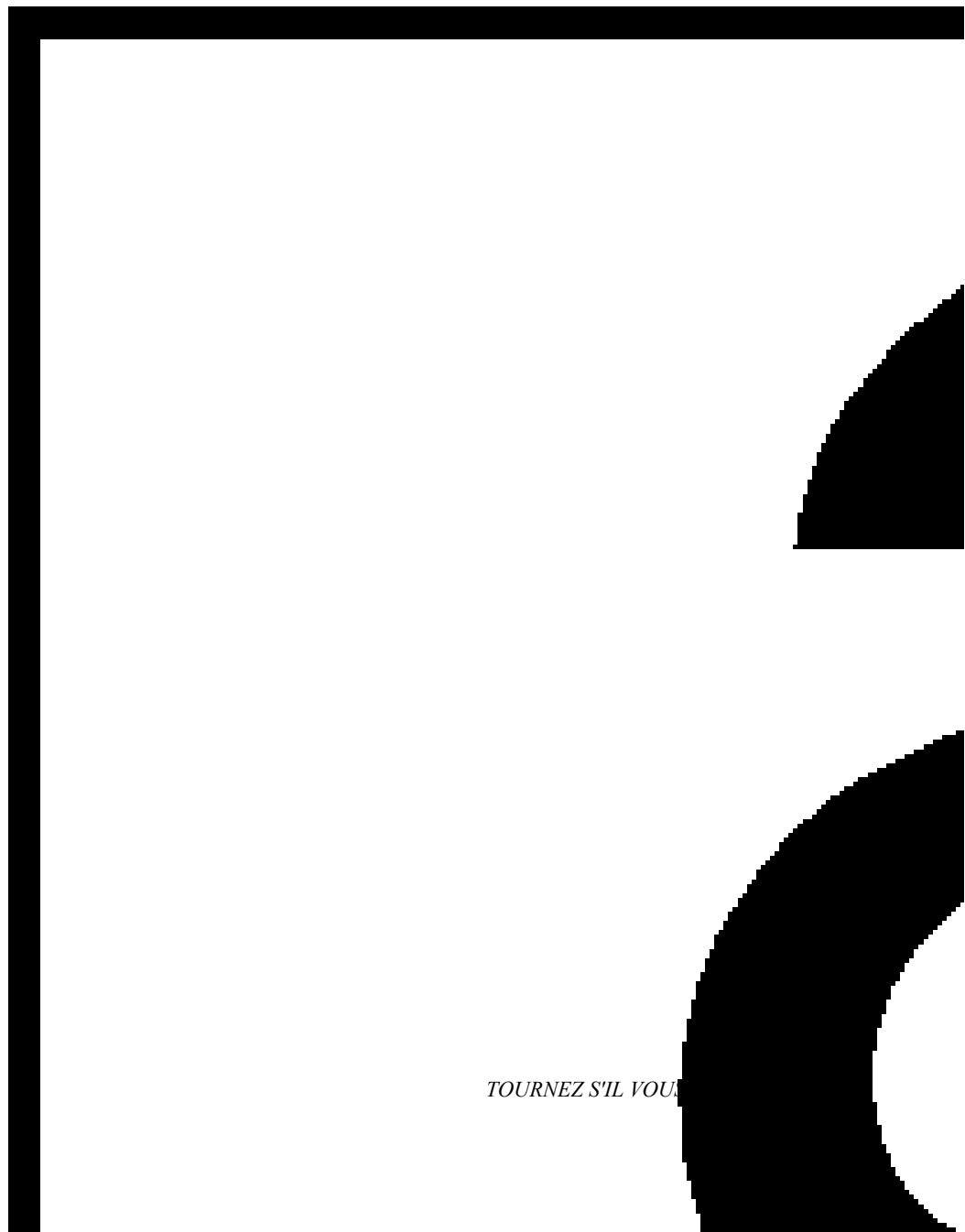


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.



(fig. 2), les coordonnées du point A2 étant

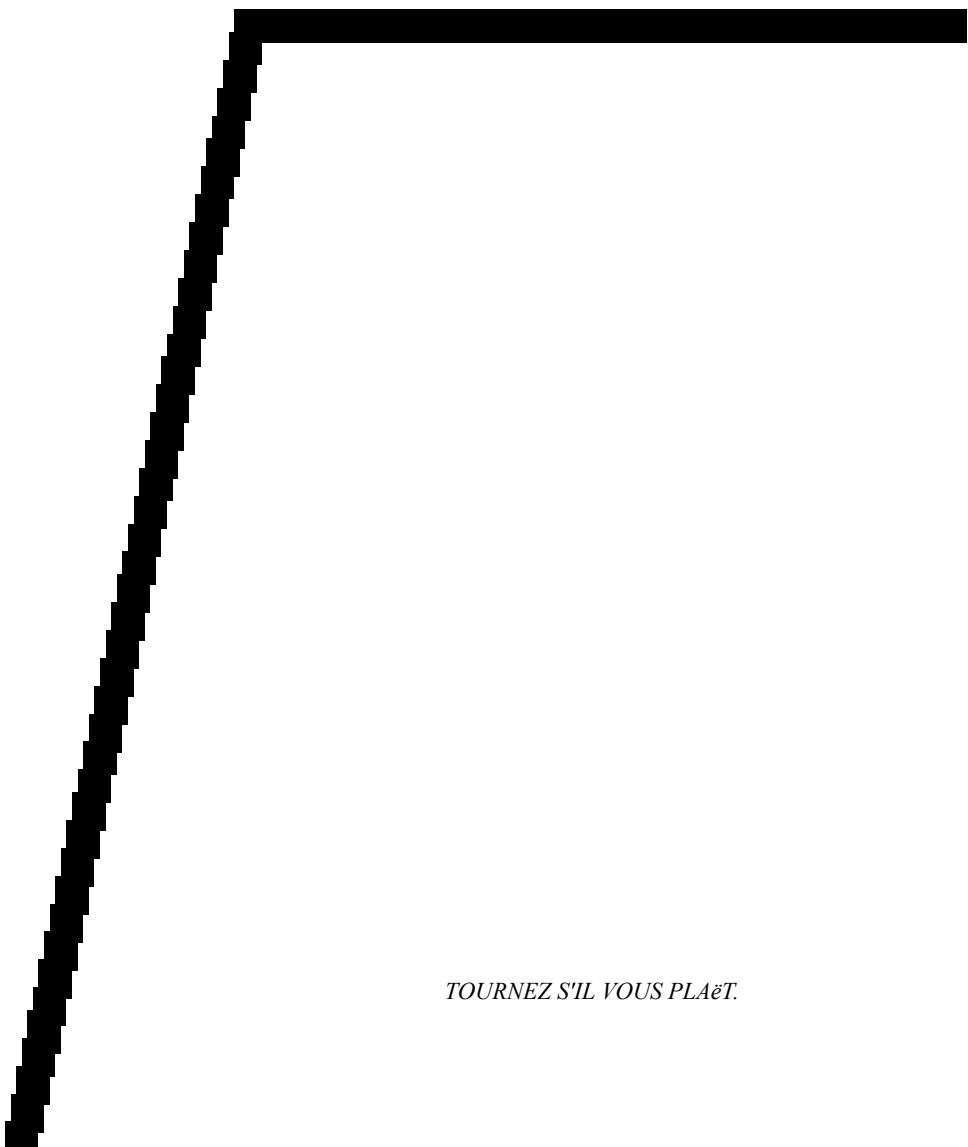
.



TOURNEZ S'IL VOUS

. Quelle est l'expression du potentiel des vitesses

.



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

associé à l'écoulement résultant, l'origine des potentiels étant prise dans le plan

.

?

I-4) On

fait

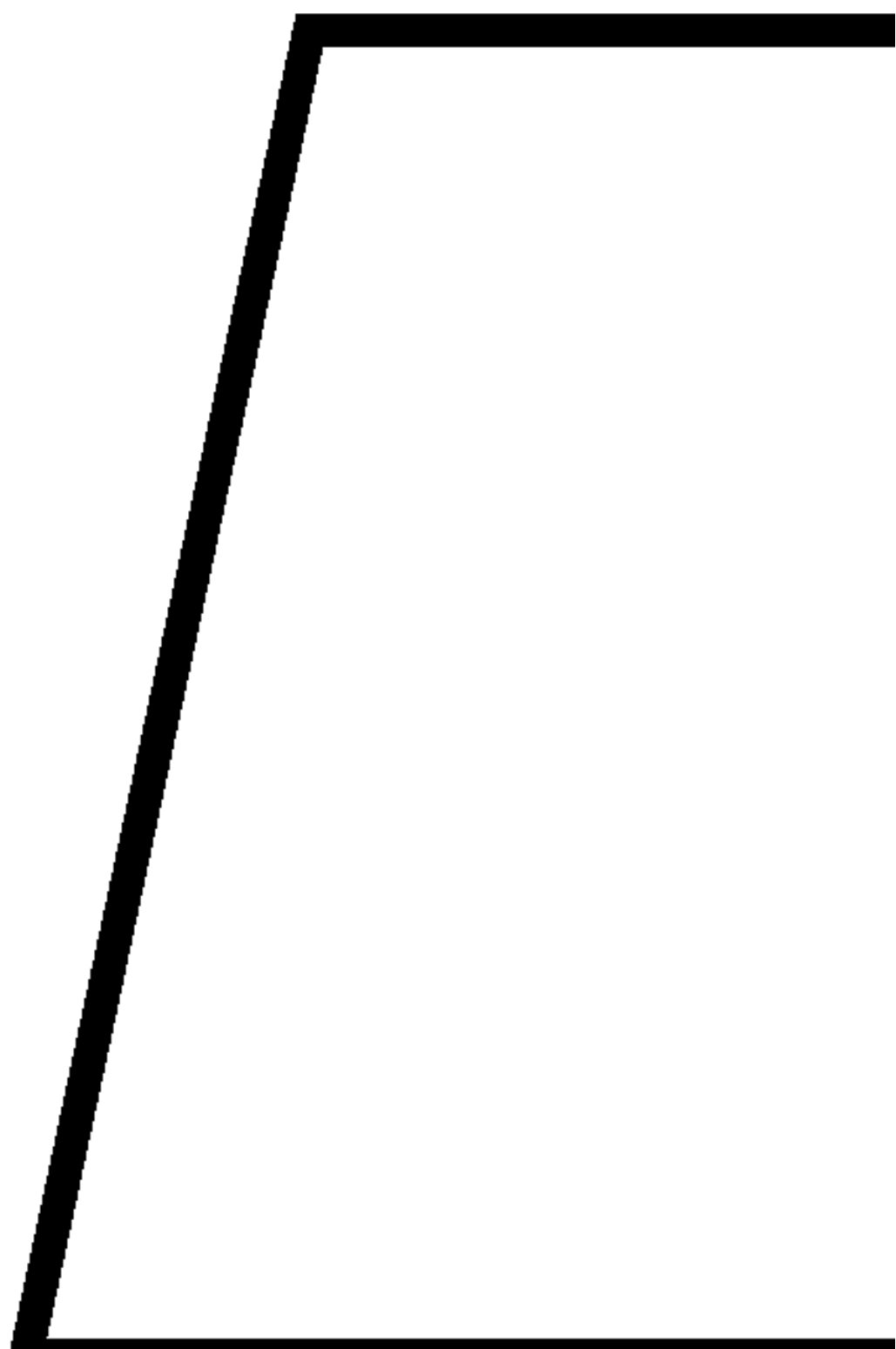
tendre

a

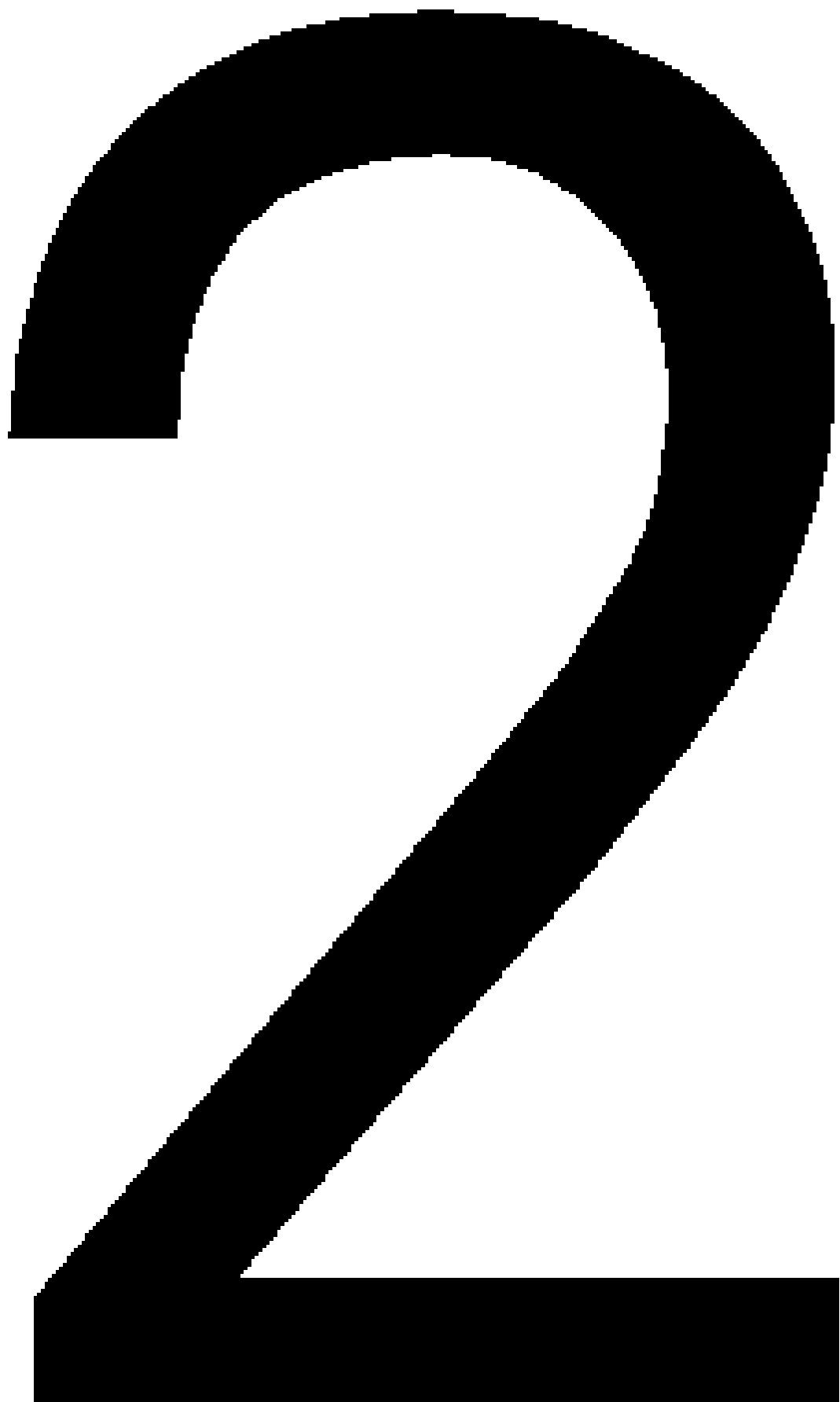
vers

0

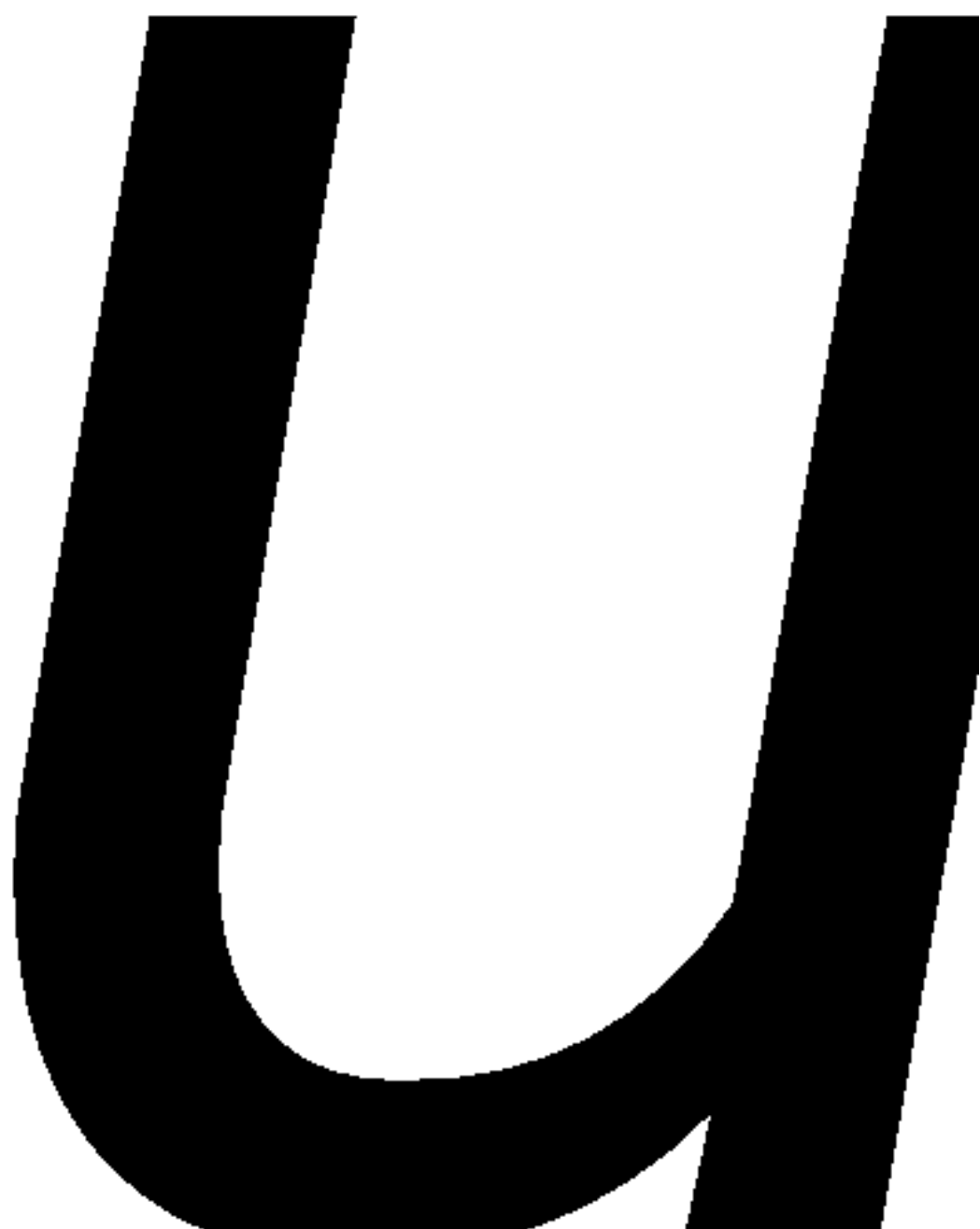
et



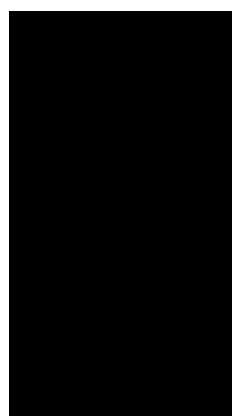
vers l'infini, de telle sorte que le produit



soit constant. Montrer que le potentiel en coordonnées cylindriques (vecteurs unitaires



et



U

)

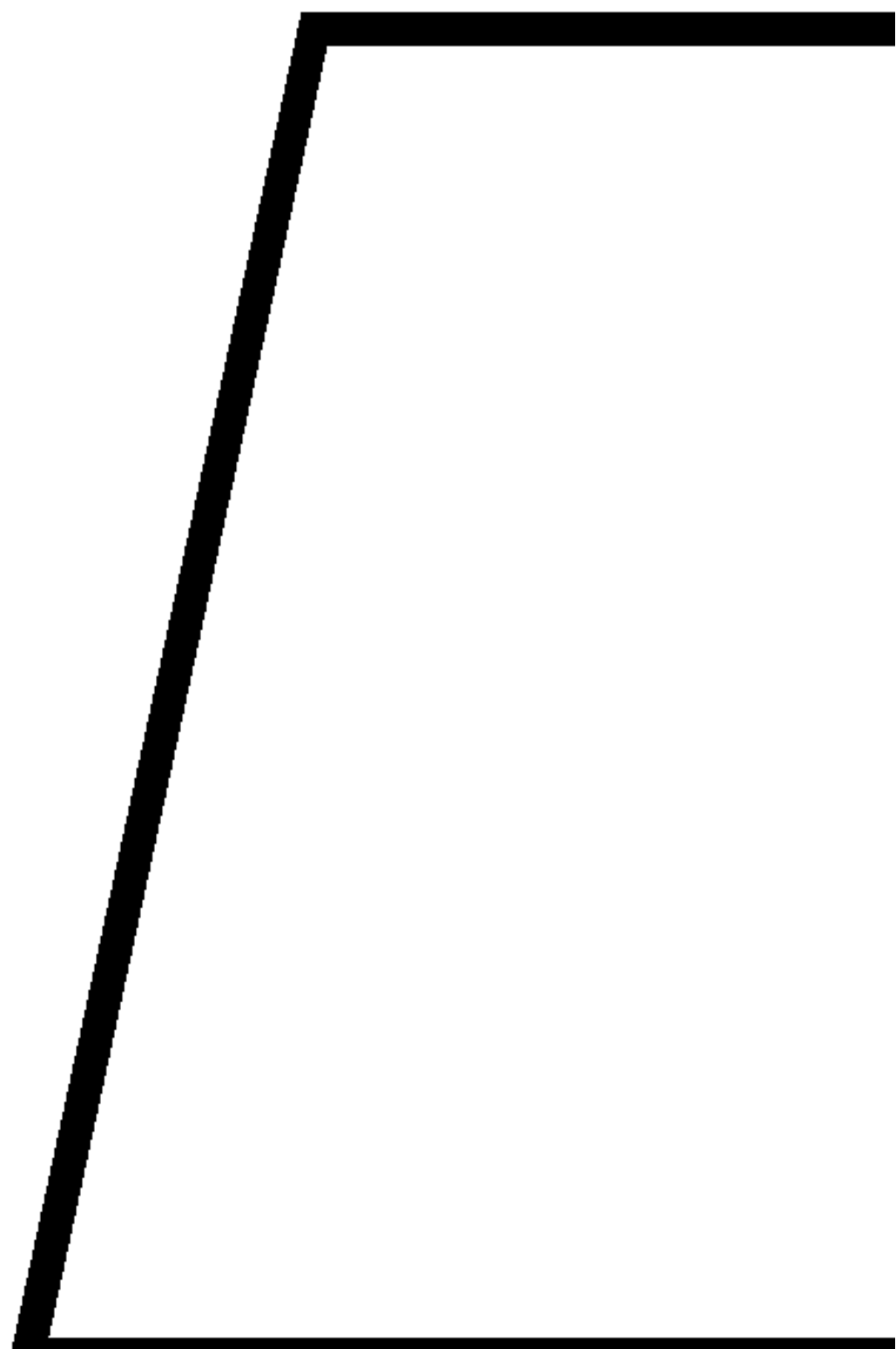
alors

■



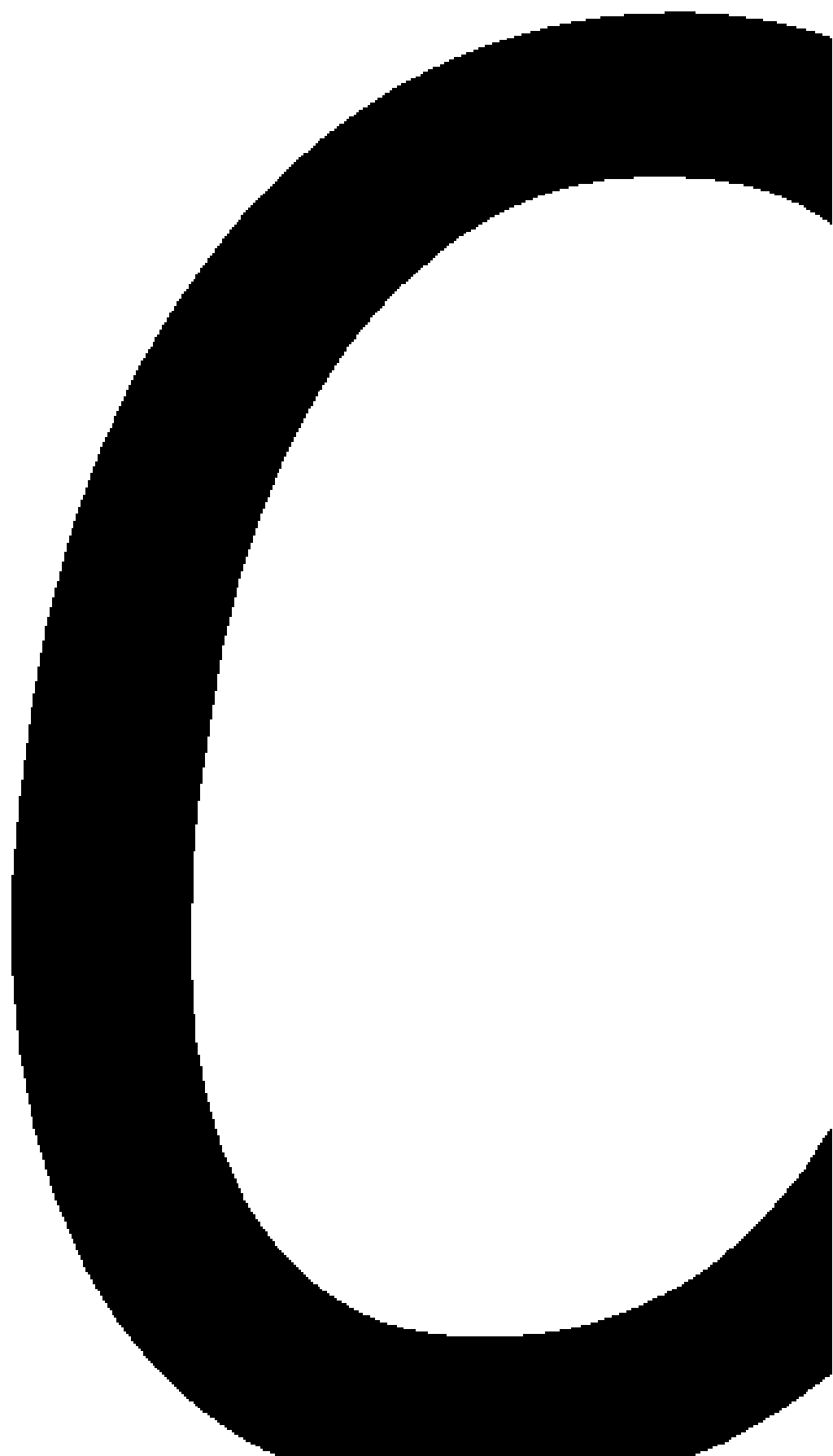
,

o

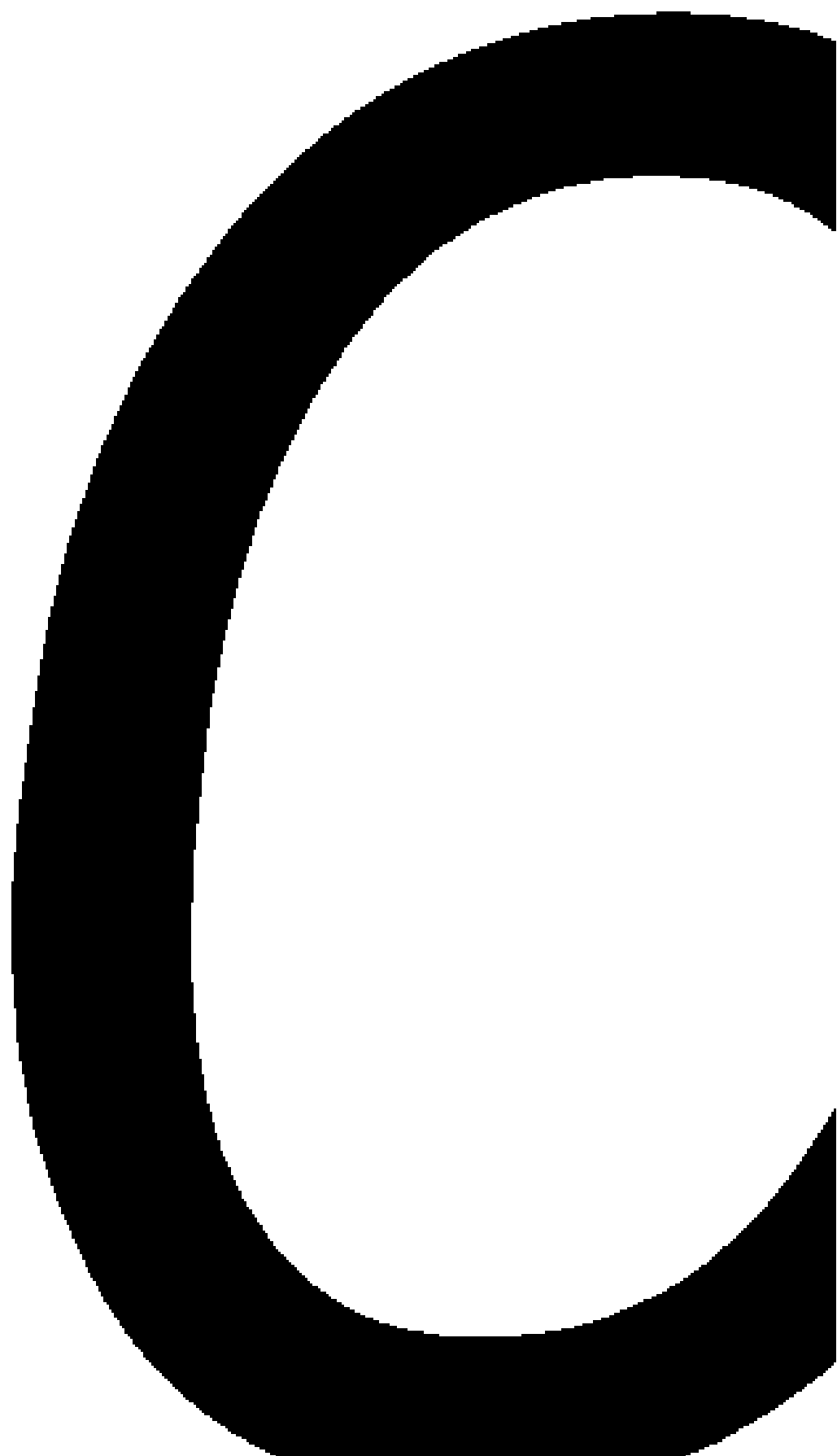


est

entre



et



(voir fig. 2).

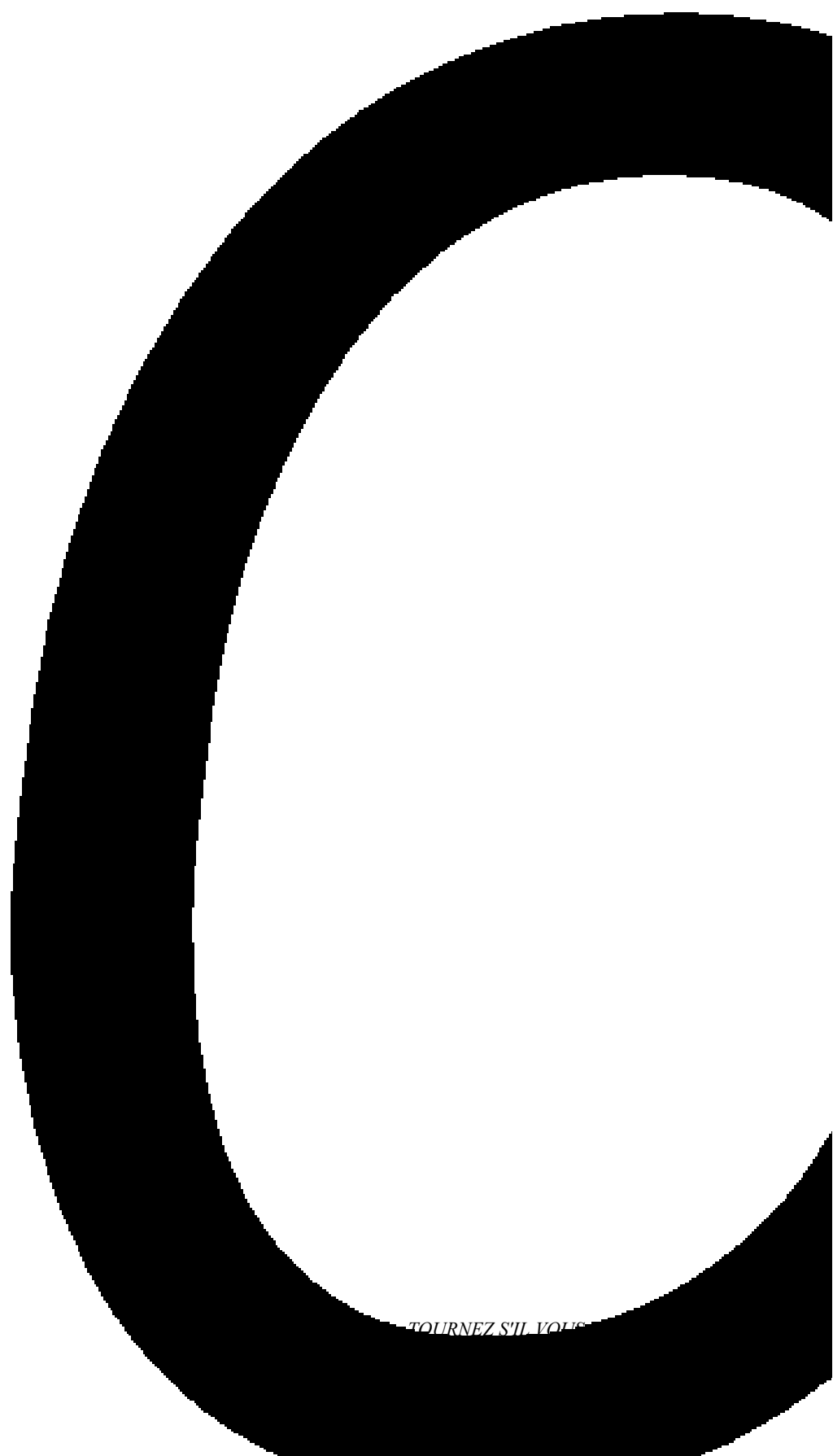
I-5) Déterminer l'équation des lignes de courant ; tracer rapidement leur allure.

I-6) On superpose à cet écoulement un écoulement uniforme, de vitesse



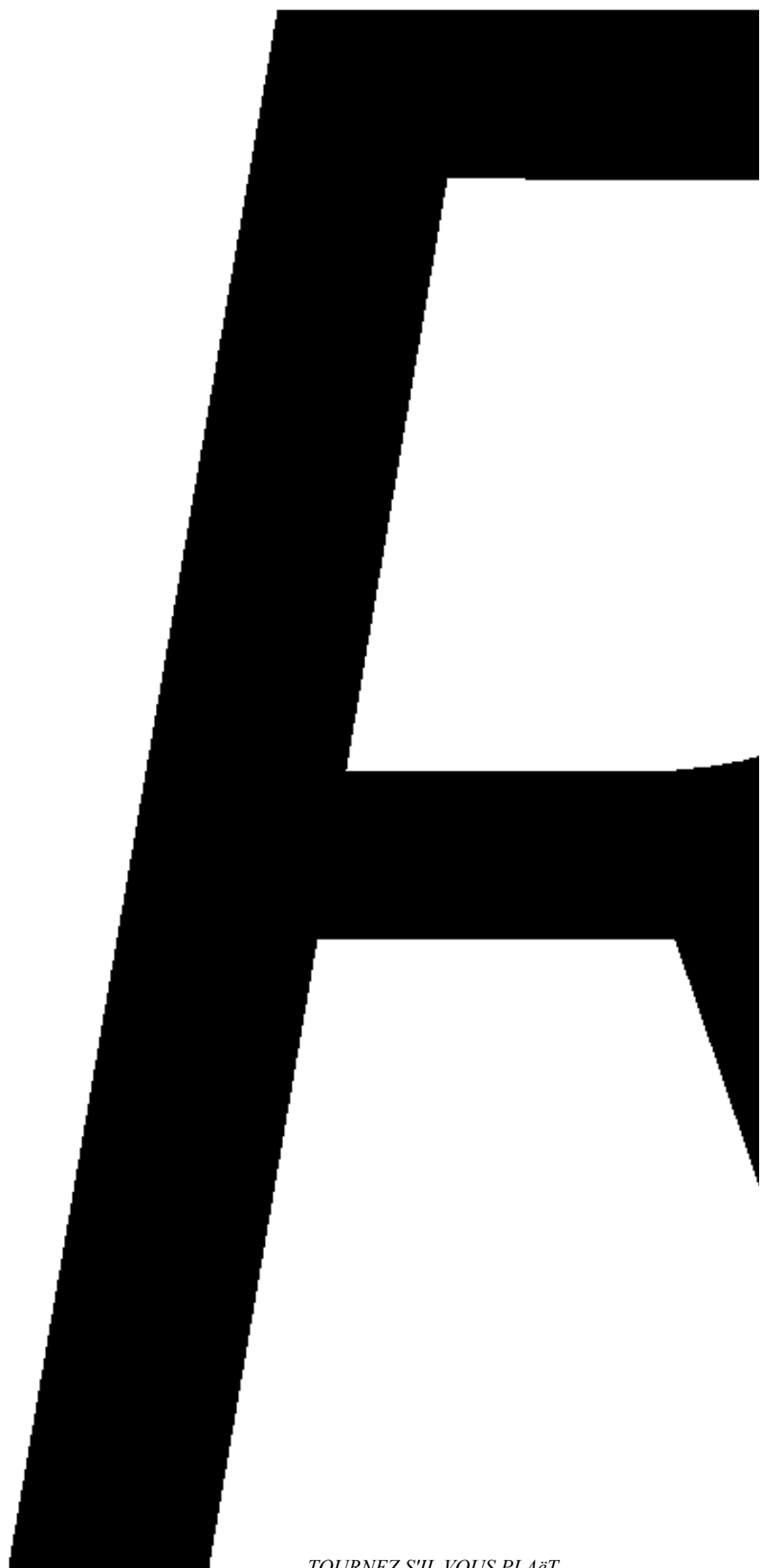
U

. Montrer qu'il existe pour l'écoulement résultant une ligne de courant circulaire d'axe



TOURNEZ S'IL VOUS

, dont on prŽcisera le rayon

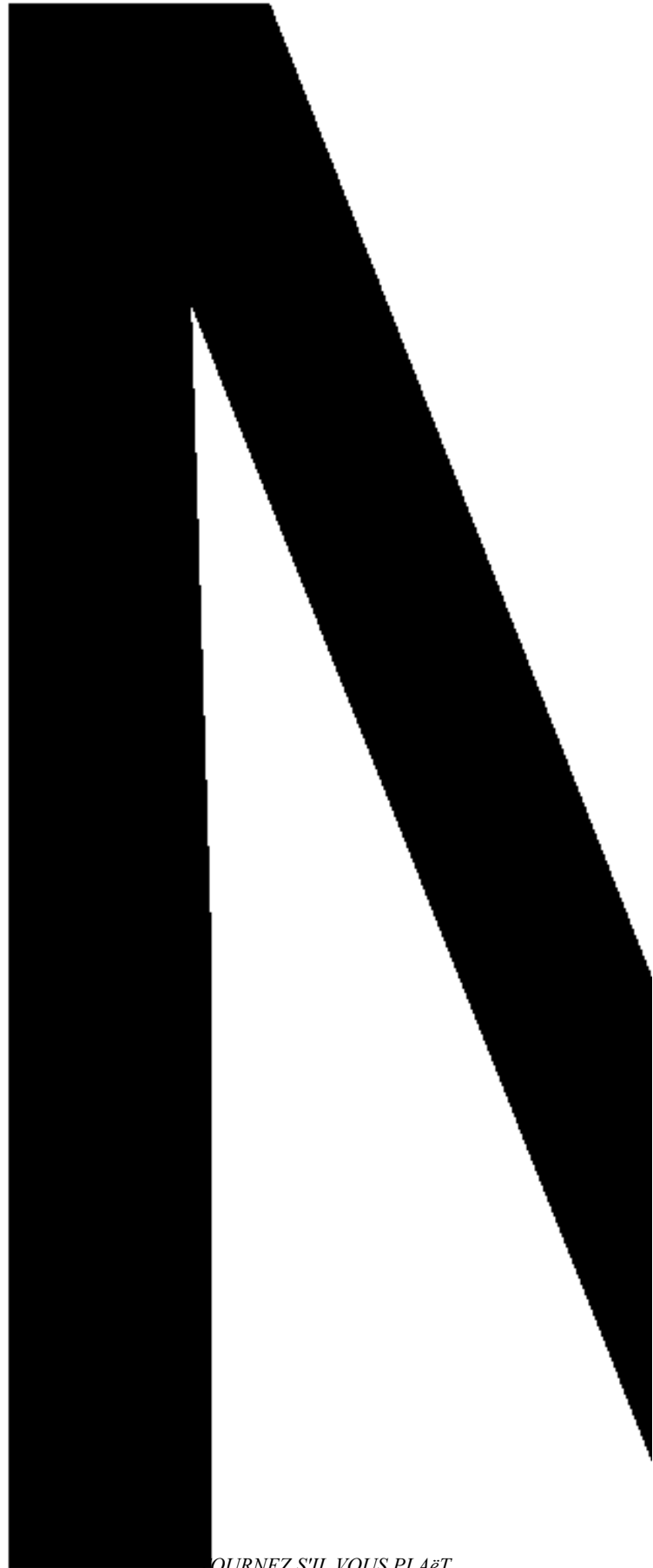


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

en

fonction

de



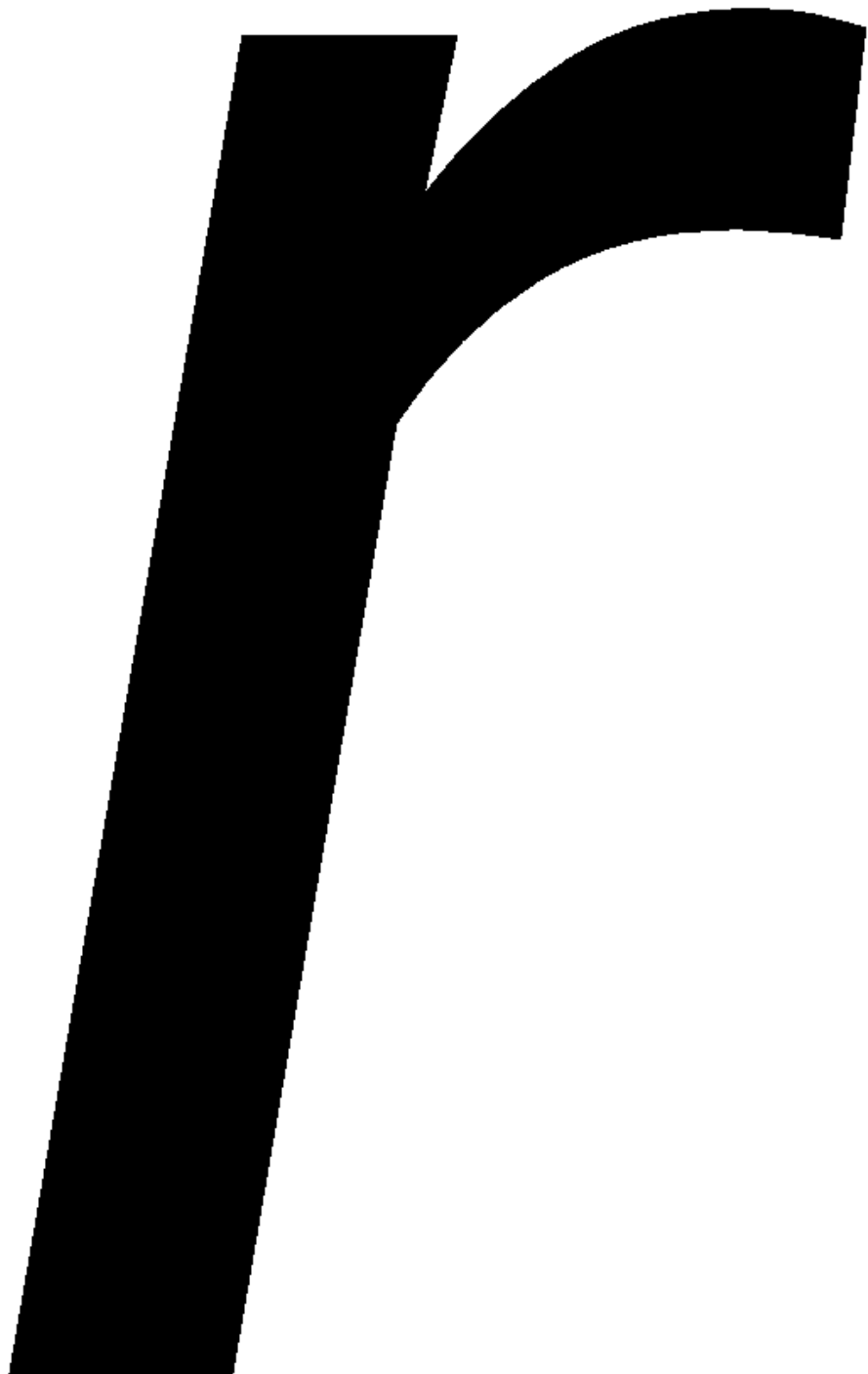
TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

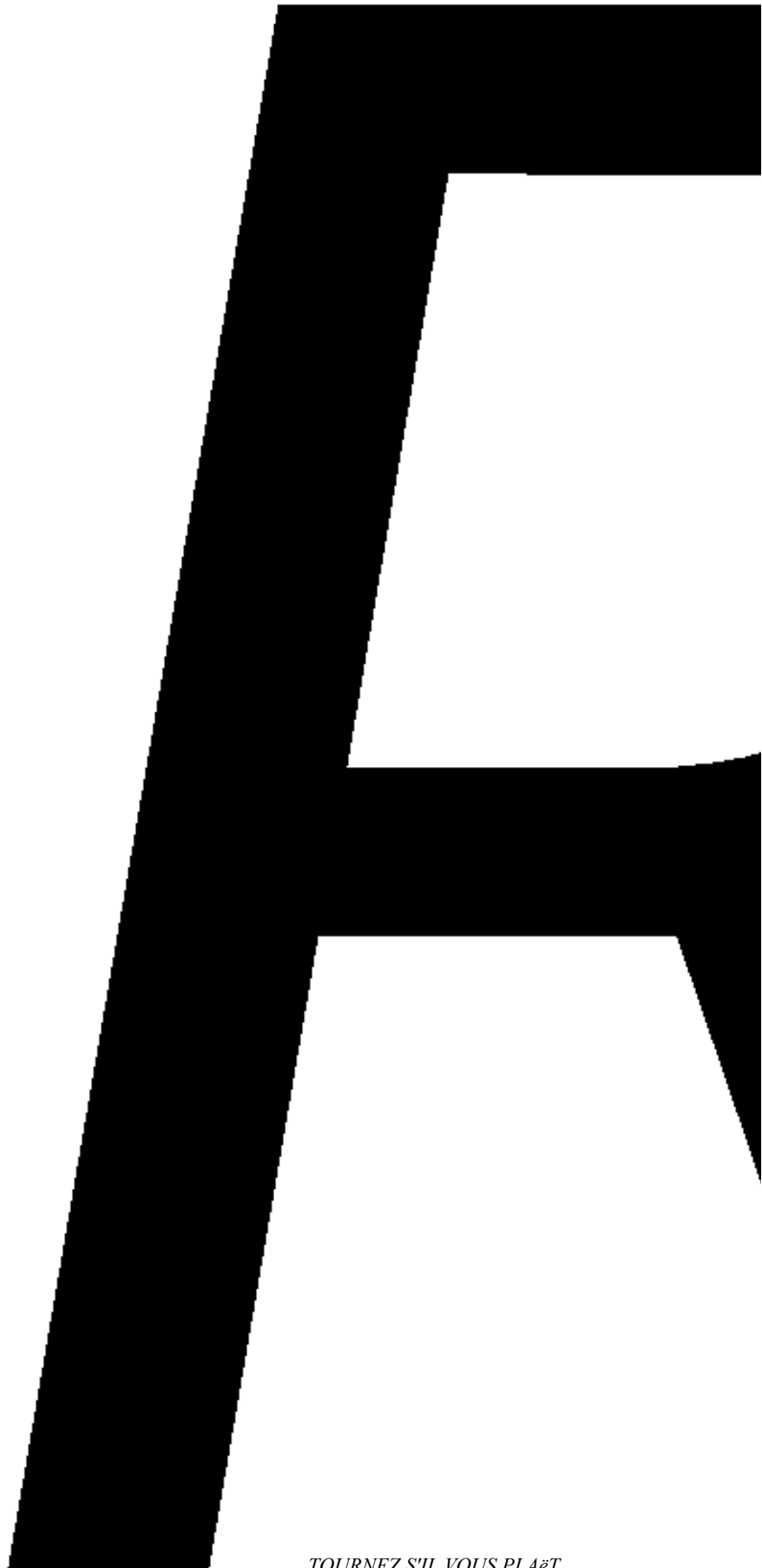
et

de

U

. Donner alors, qualitativement, la forme des lignes de courant ; on distinguera les cas



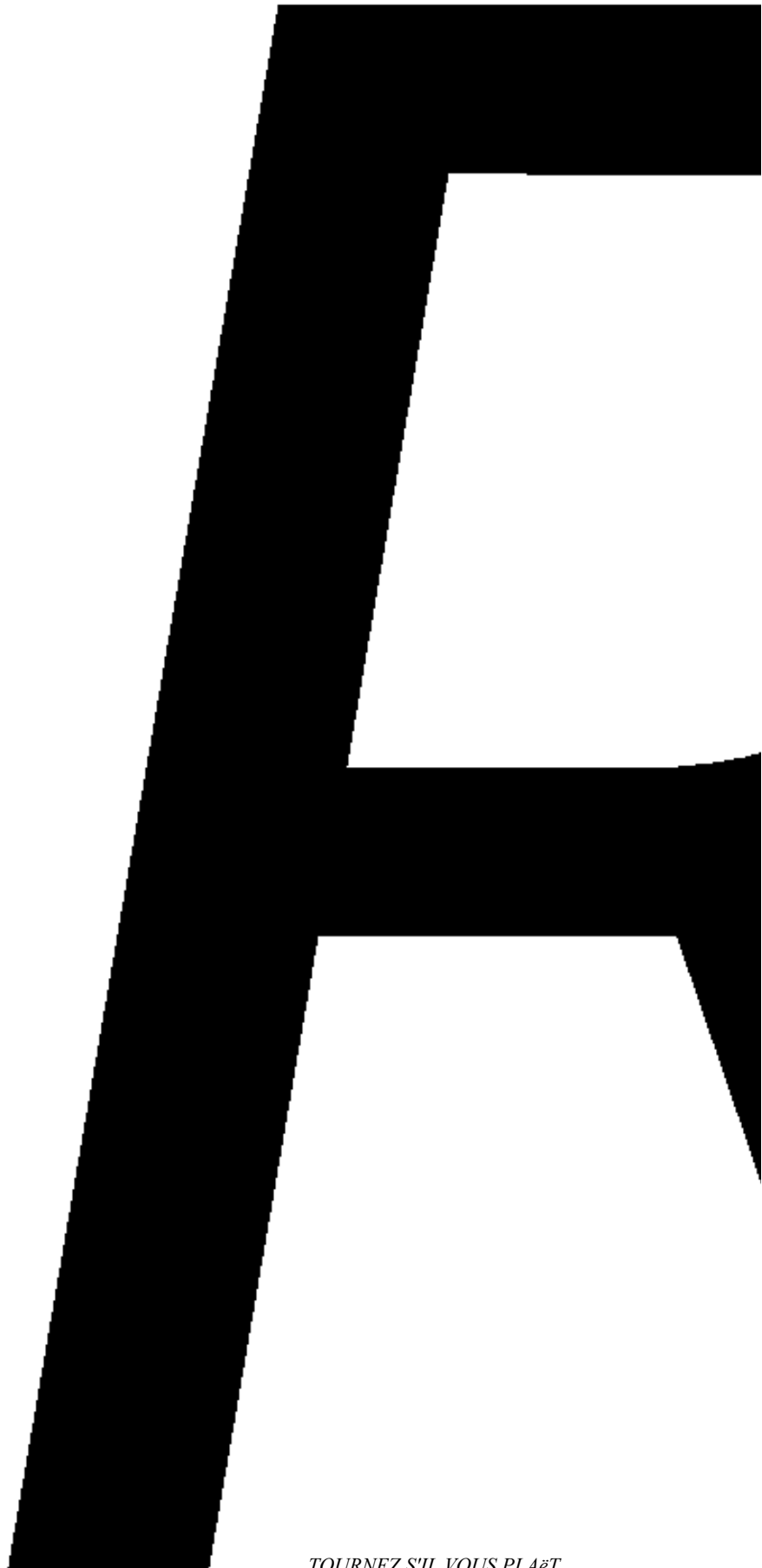


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

et

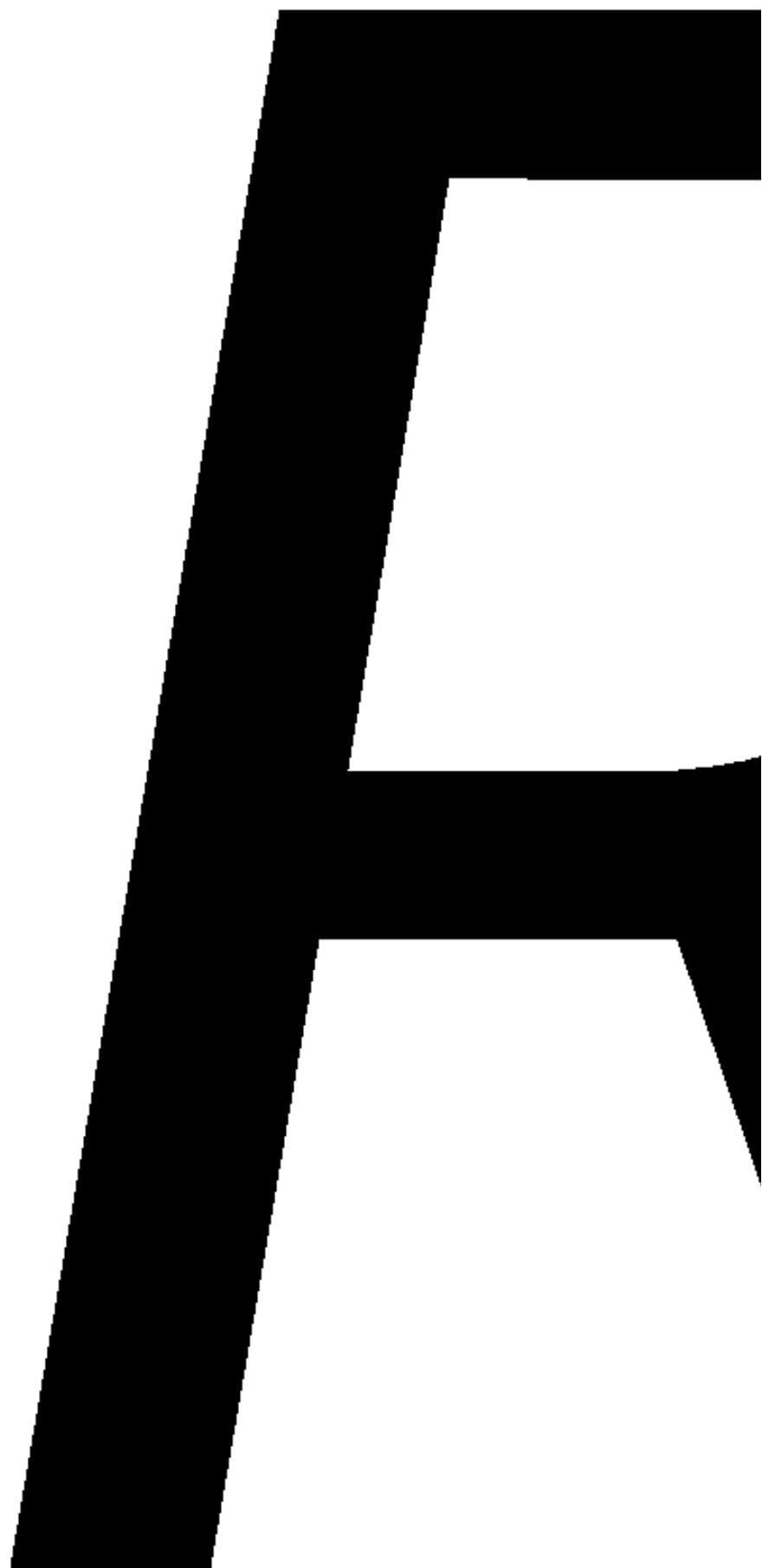
r

>

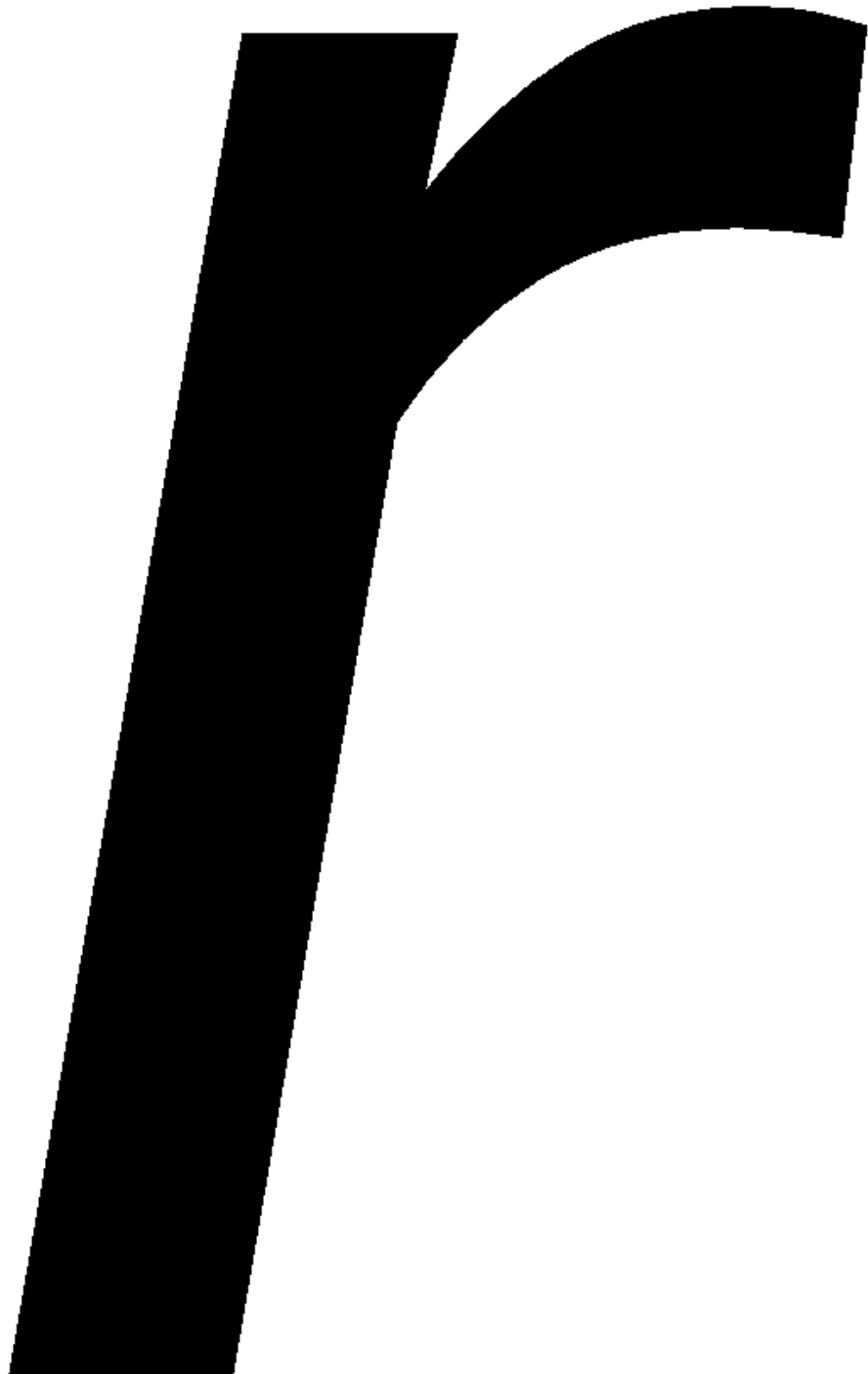


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

I-7) Un cylindre rigide immobile de rayon



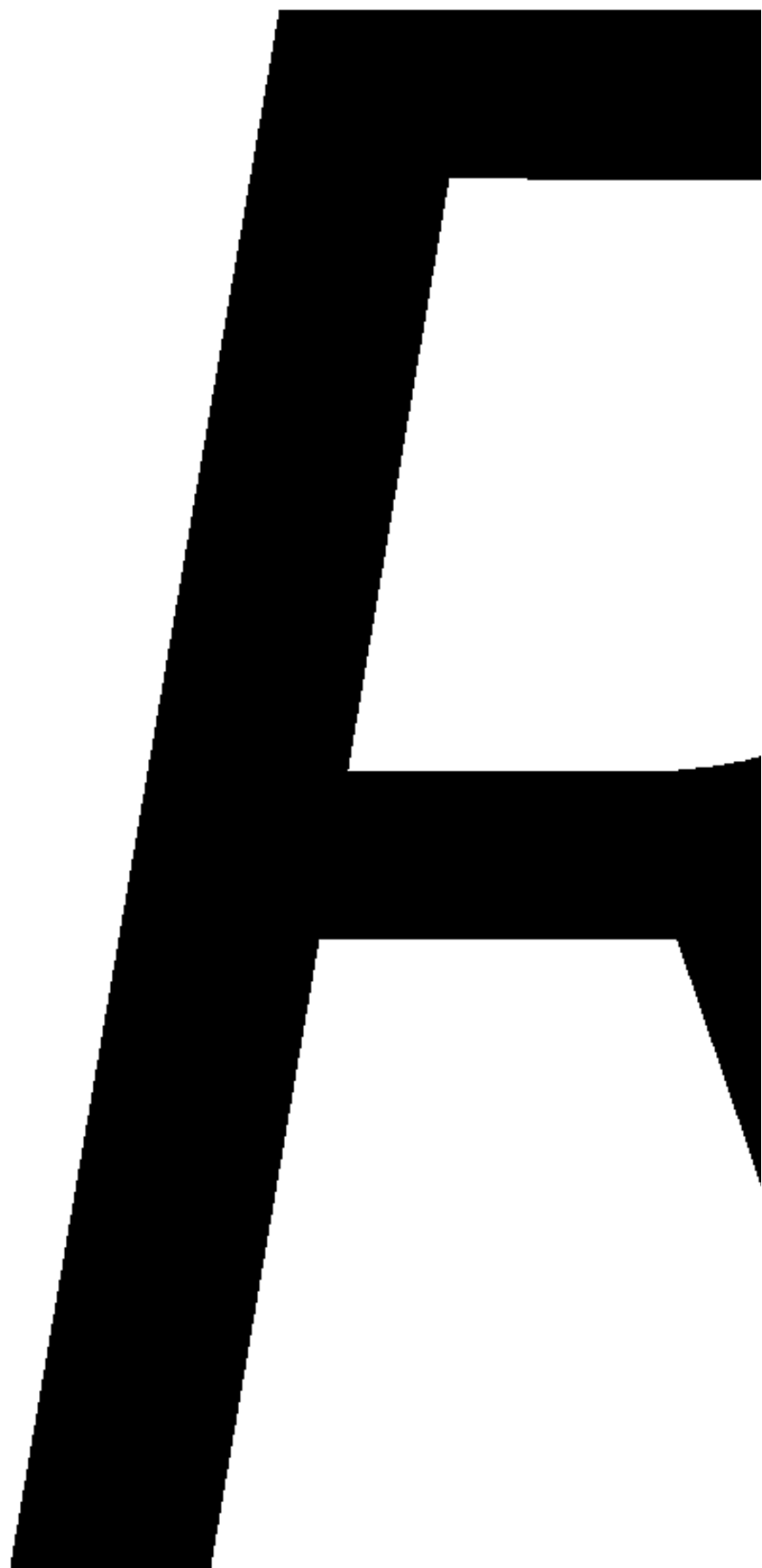
est immergŽ dans le fluide. La vitesse du fluide pour



trs

grand

devant



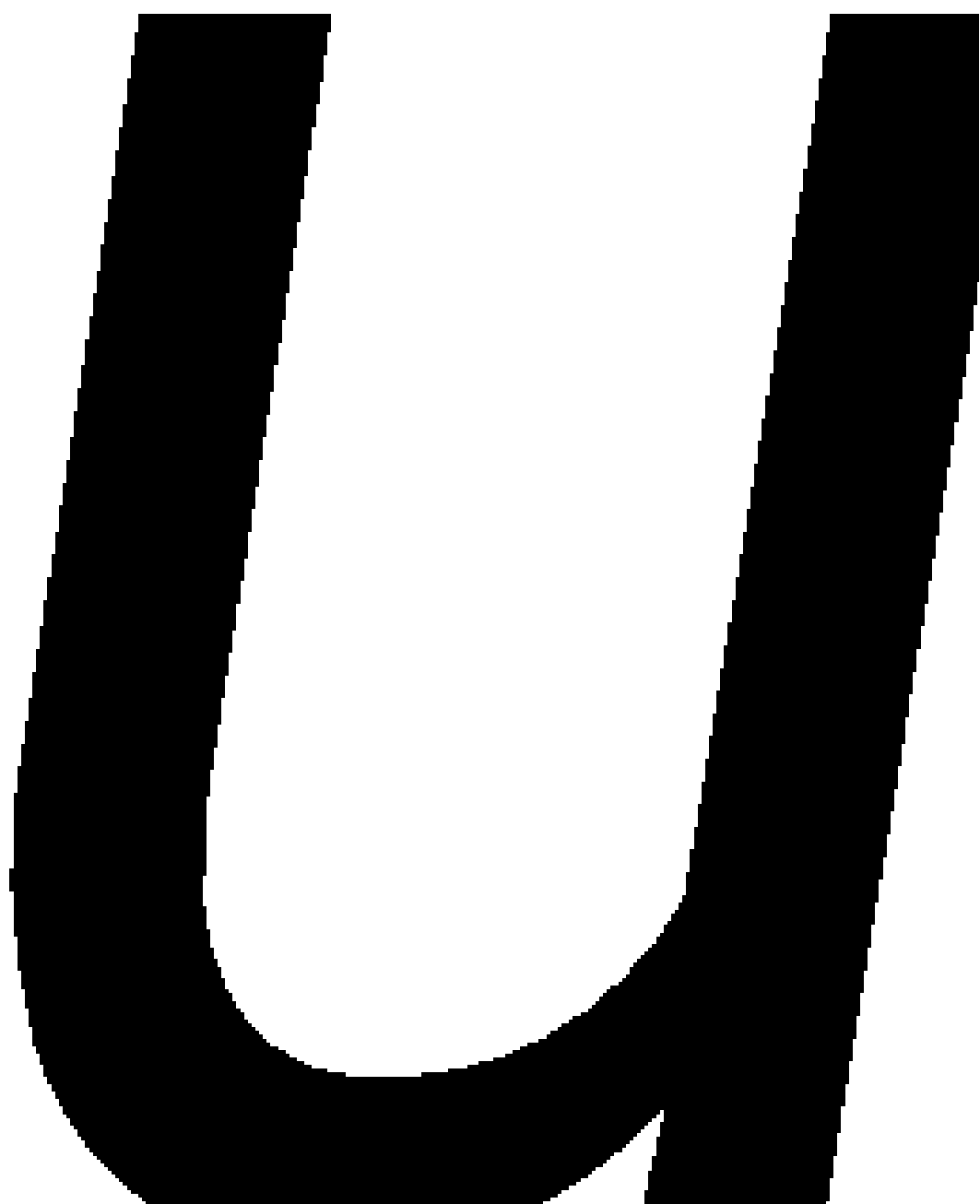
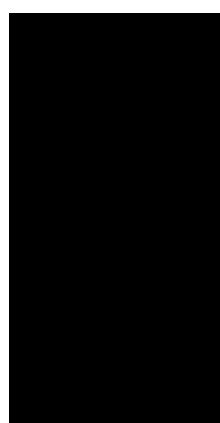
est

uniforme

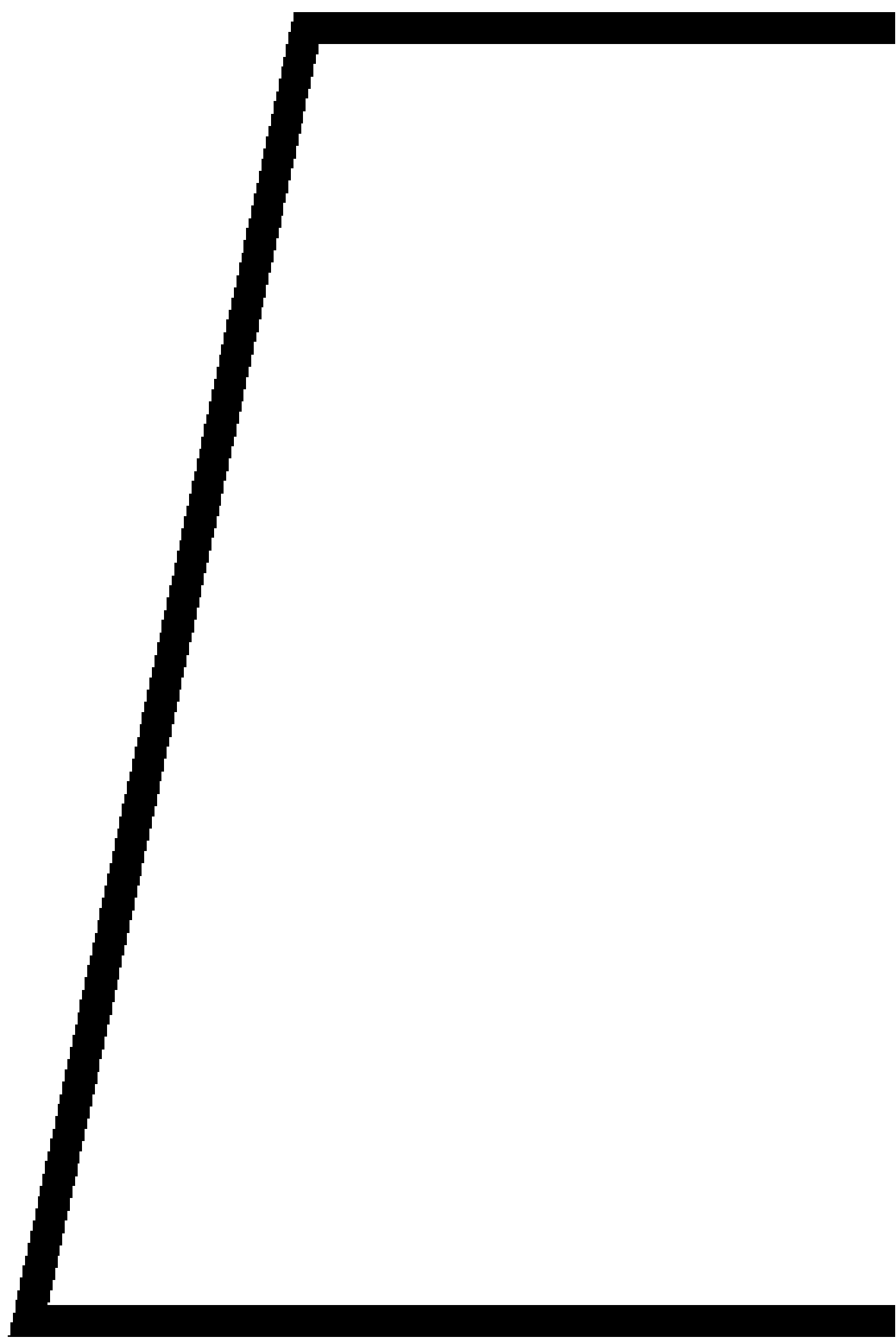
et

Žgale

^

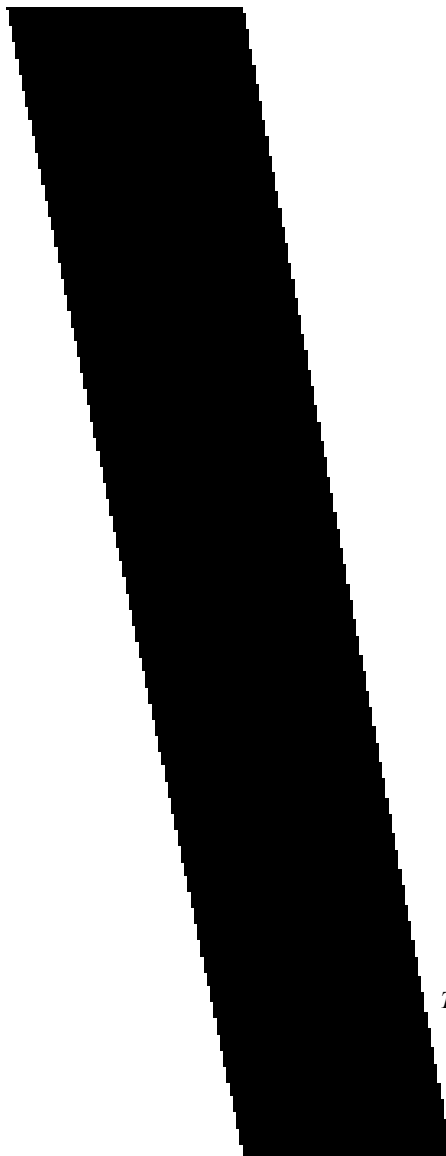
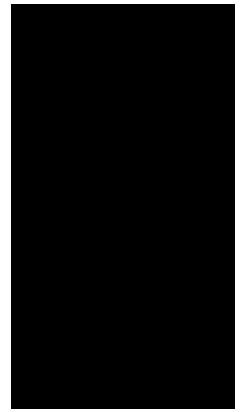


. Montrer qu' l'extérieur du cylindre le régime d'écoulement trouvé en I-6) est solution du problème en présence du cylindre. Existe-t-il des points de vitesse nulle ? Quel est le potentiel



de l'écoulement ? Voyez-vous une analogie, magnétostatique ou électrostatique, à ce problème d'écoulement ?

I-8) On superpose enfin un dernier $\mathcal{Z}$ coulement, d $\mathcal{Z}$ fini par la vitesse

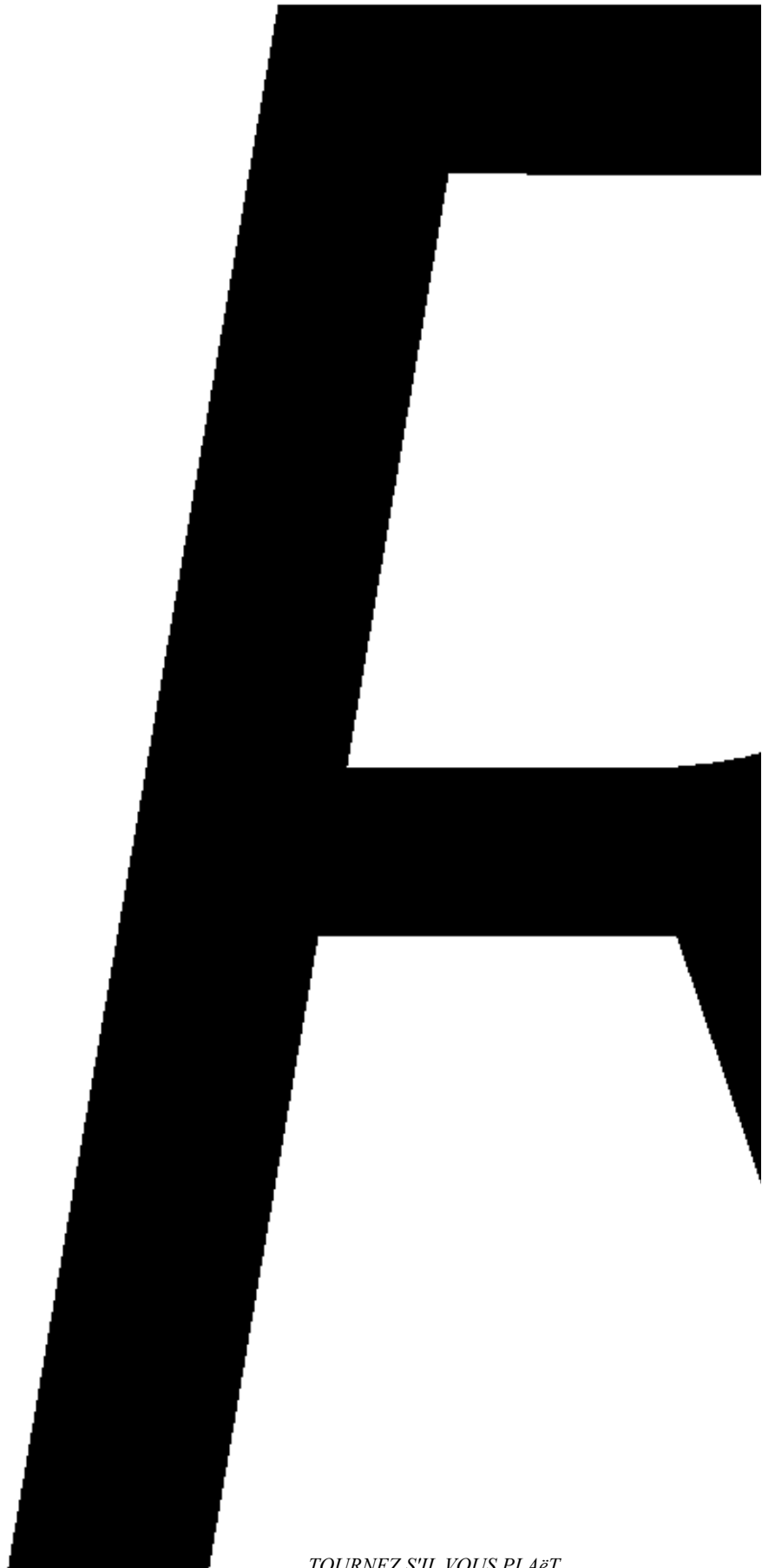


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

pour

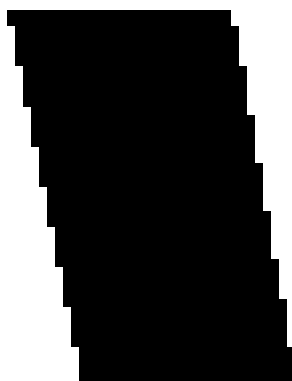
r

>



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

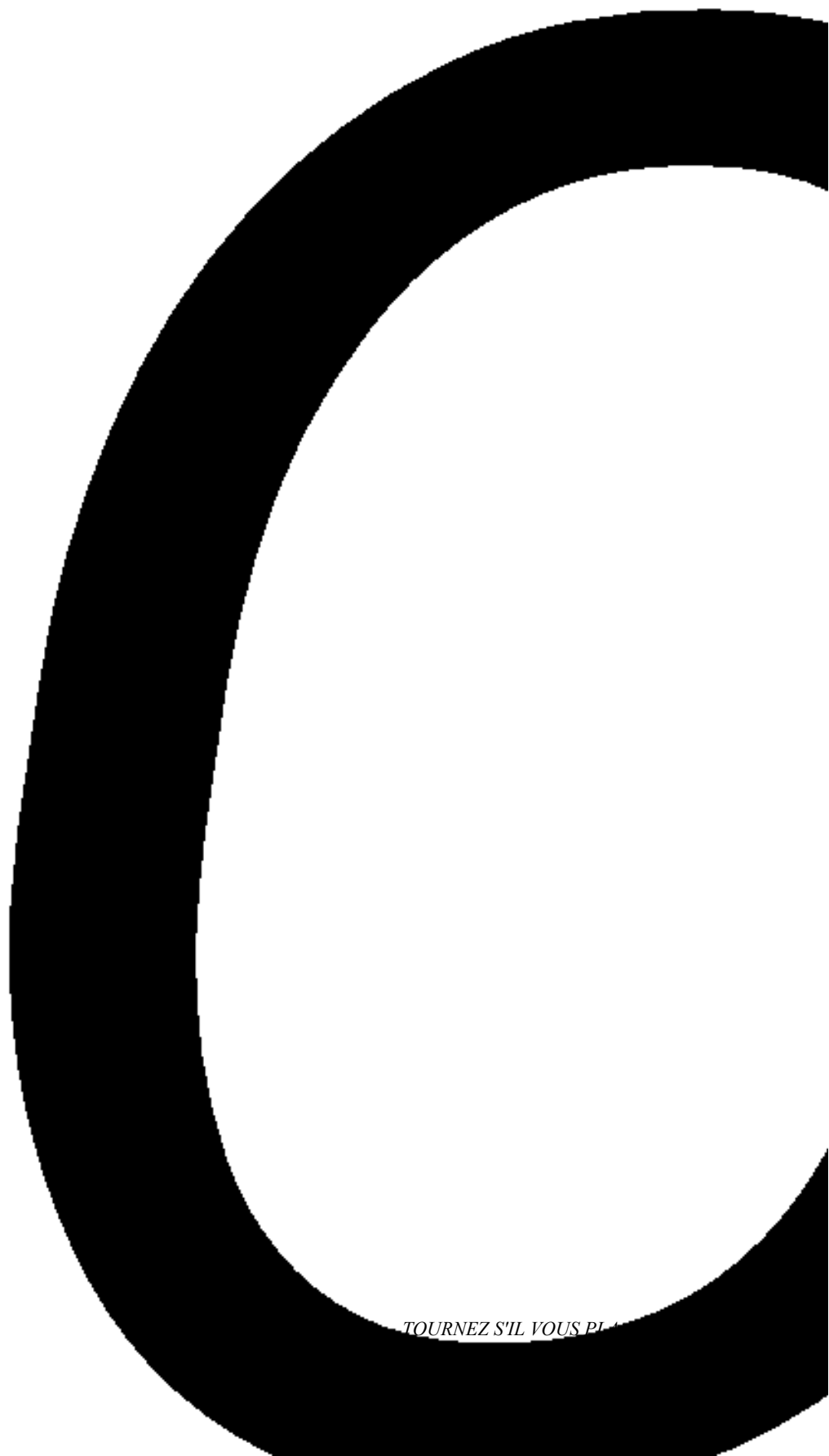
■



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

,

O

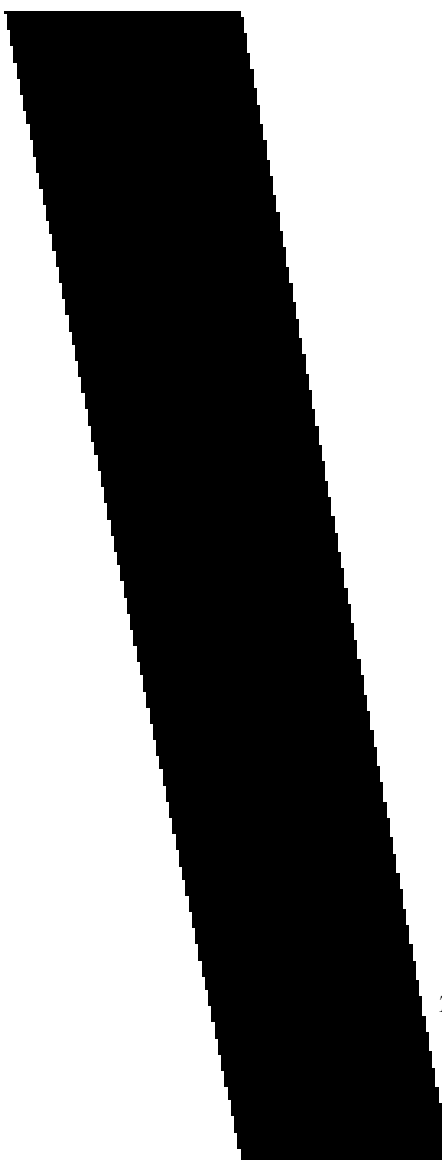


TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

est une constante. Montrer que cet écoulement dérive d'un potentiel

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

, dont on ne demande pas d'établir l'expression. Quelle est la circulation du vecteur

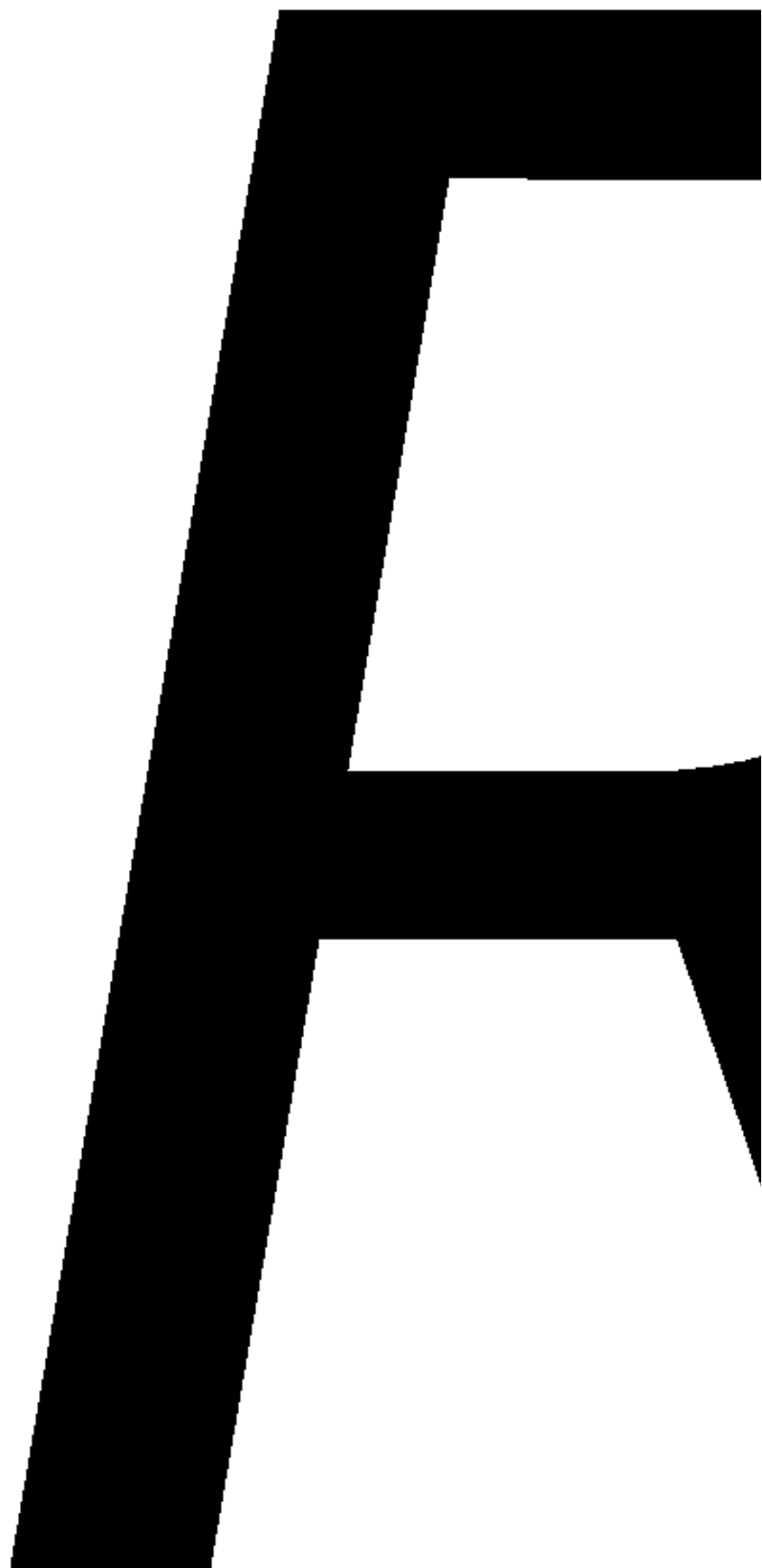


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT

sur une courbe fermée dans les deux cas où l'origine est à l'intérieur ou à l'extérieur de la courbe ? Voyez-vous une analogie, magnétostatique ou électrostatique, à ce problème d'écoulement ?

Deuxième partie : Voile de Flettner

Un bateau est muni d'un cylindre vertical de rayon



et

de

hauteur

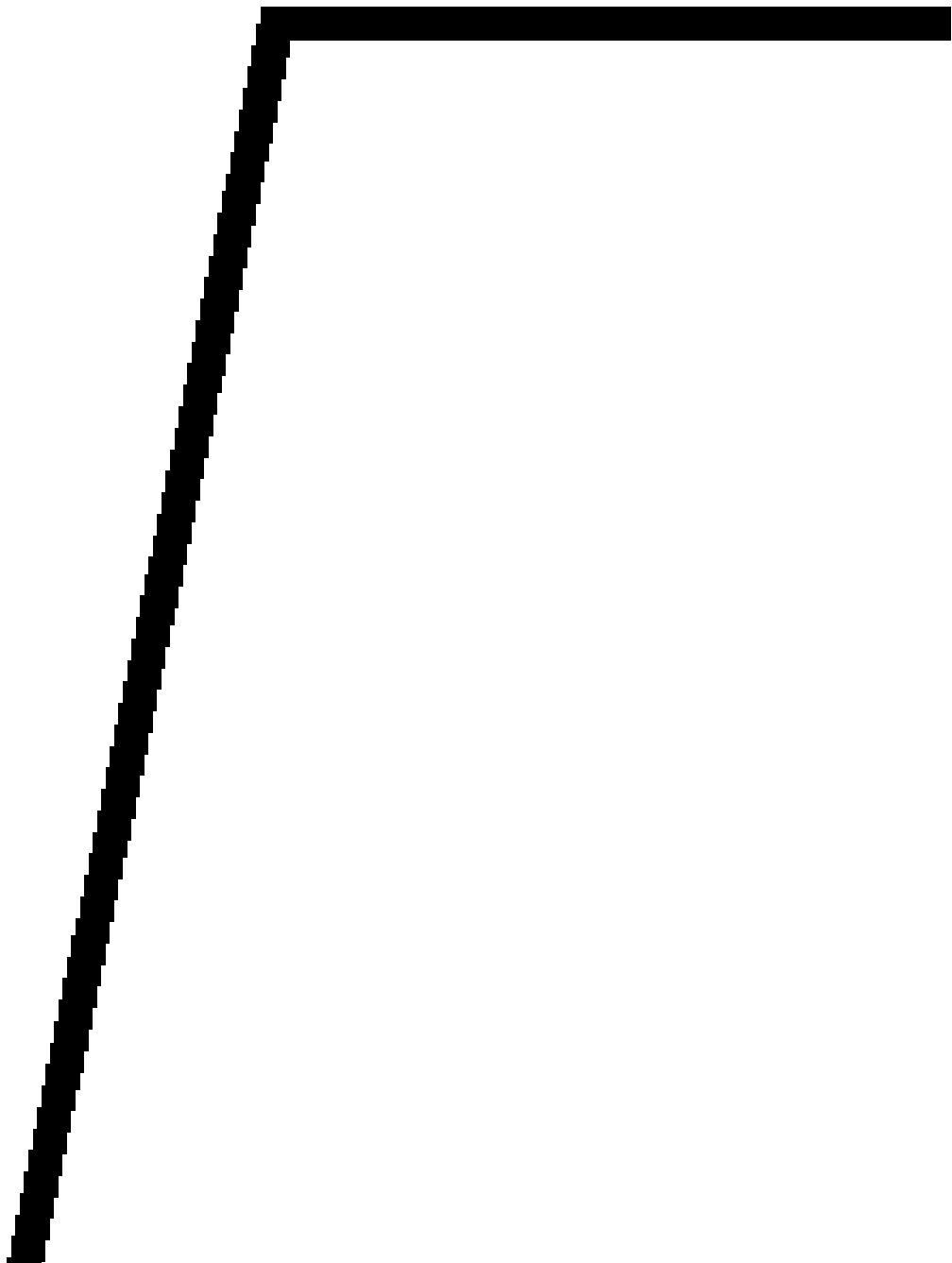
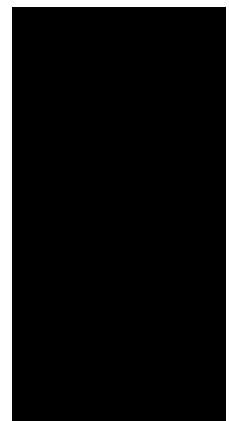
h

- 217 -

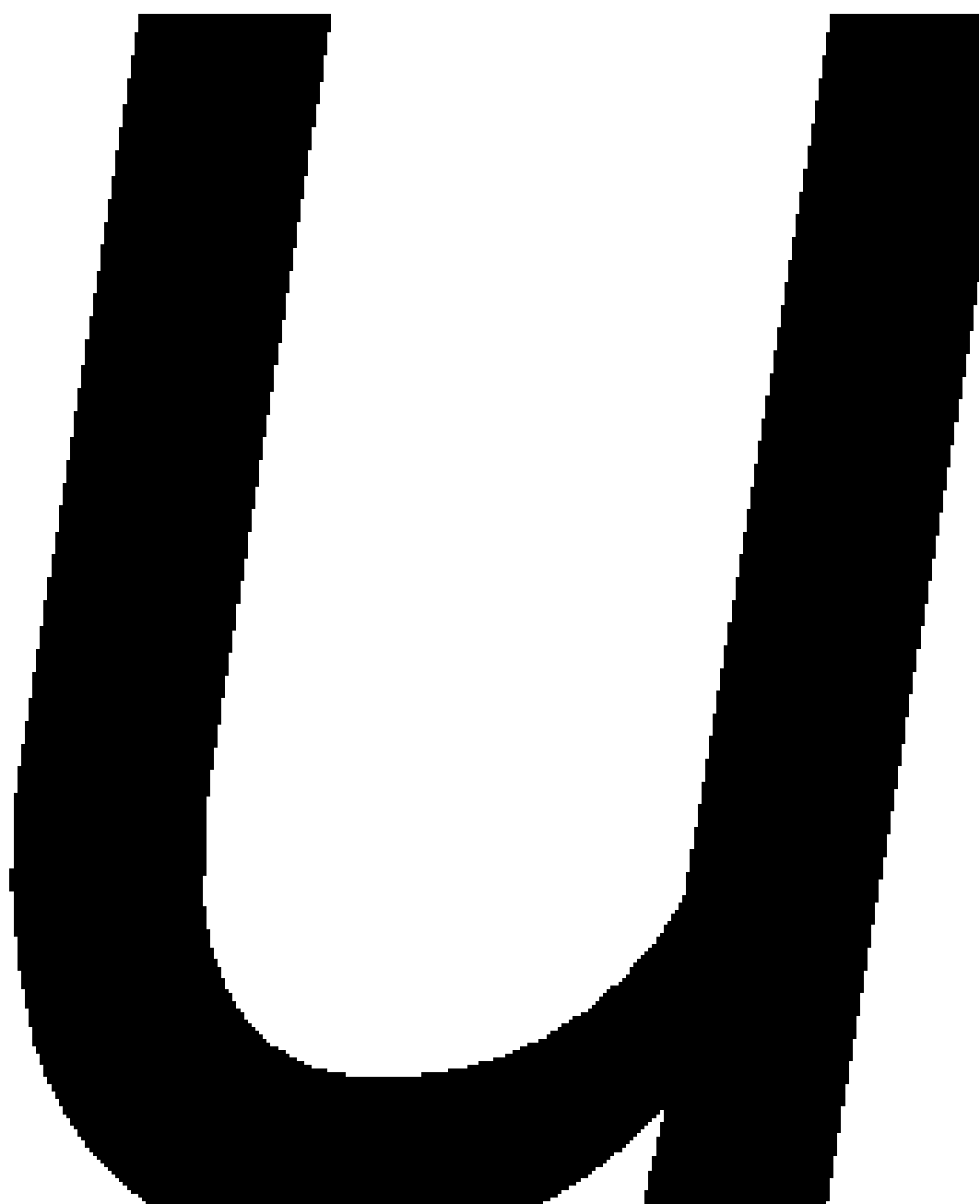
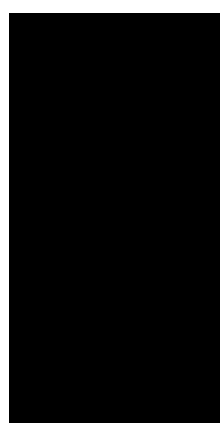
, tournant autour d'un axe vertical $\hat{z}$ la vitesse angulaire

TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

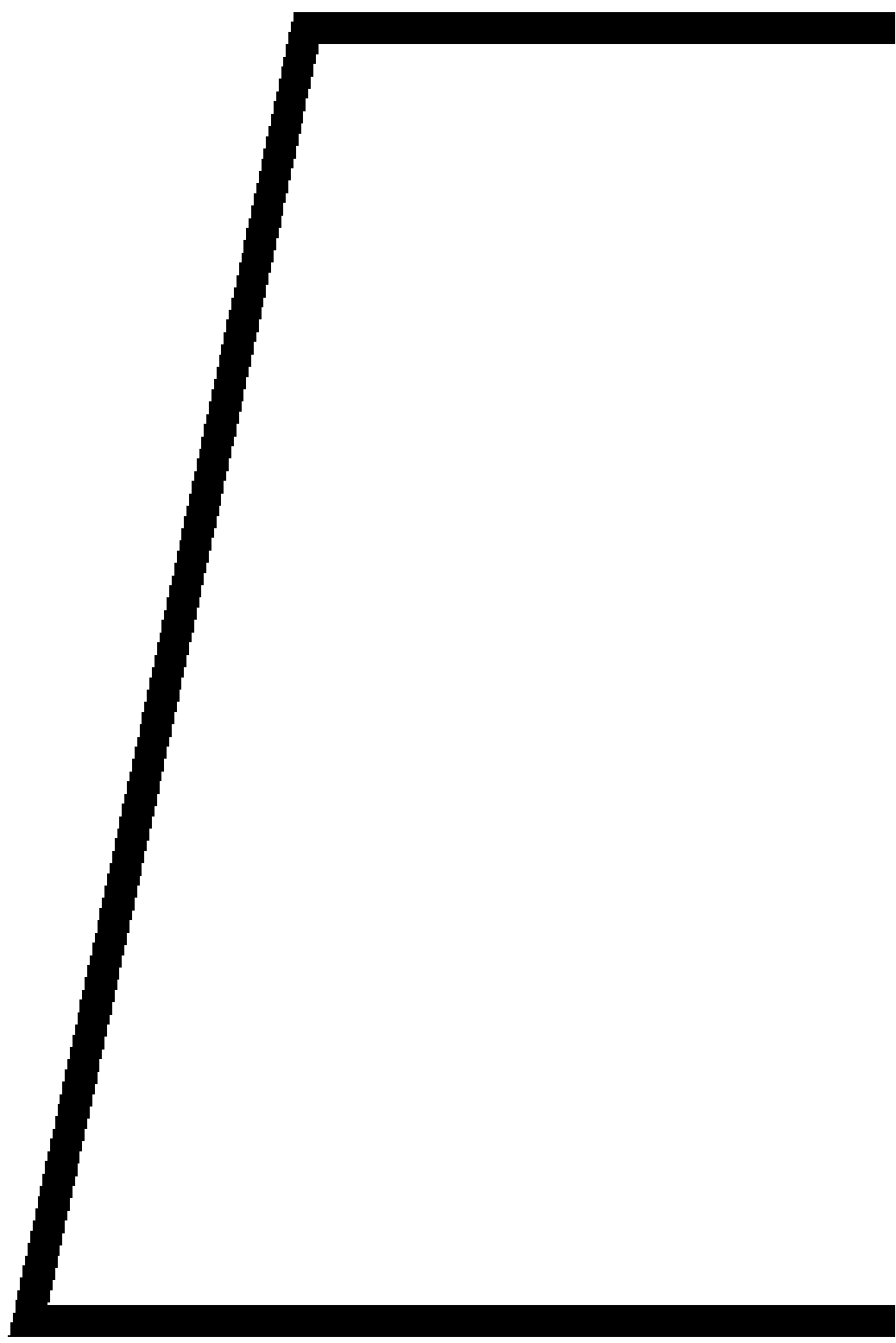
.



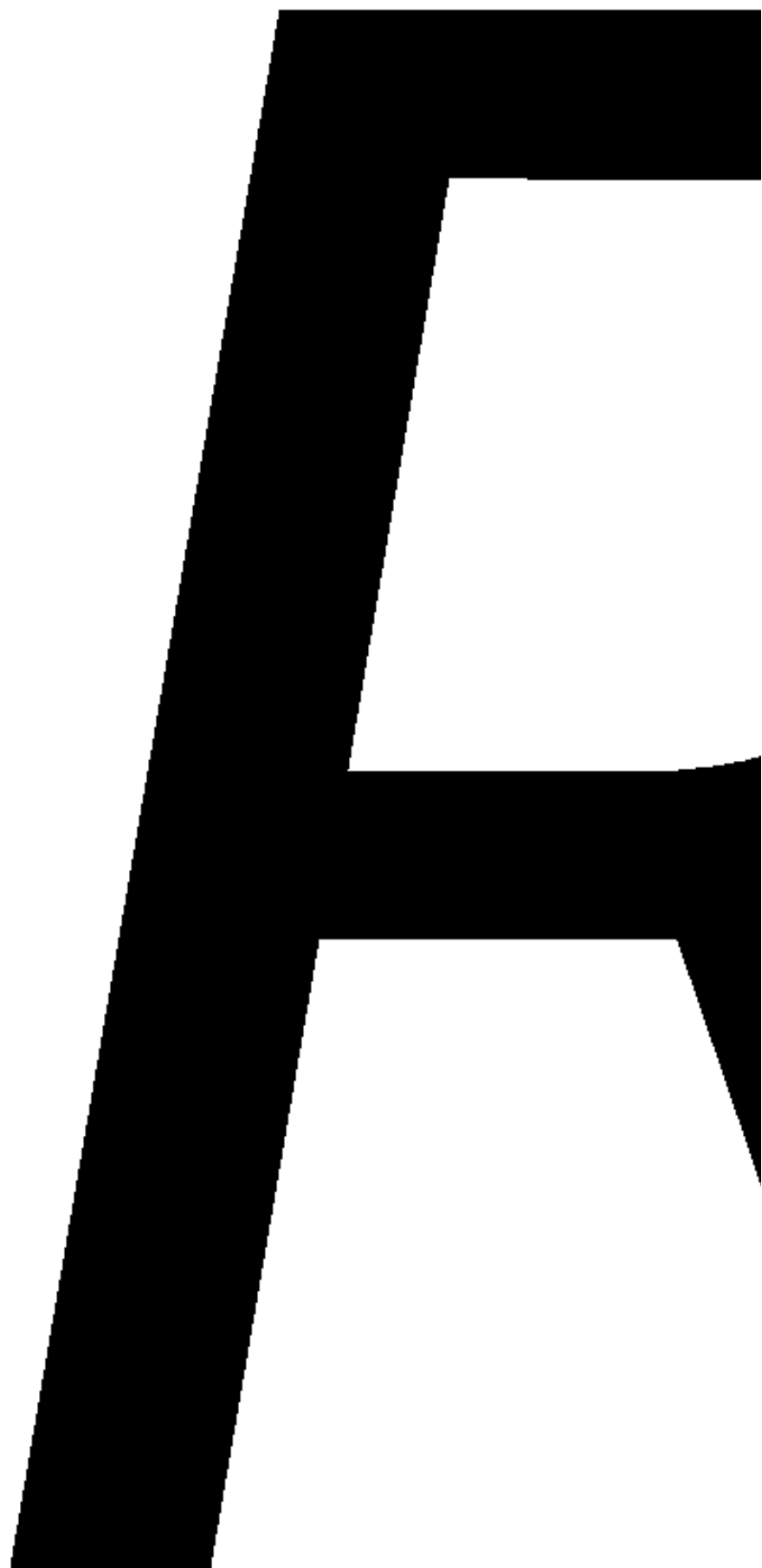
. Le vent souffle avec une vitesse uniforme constante



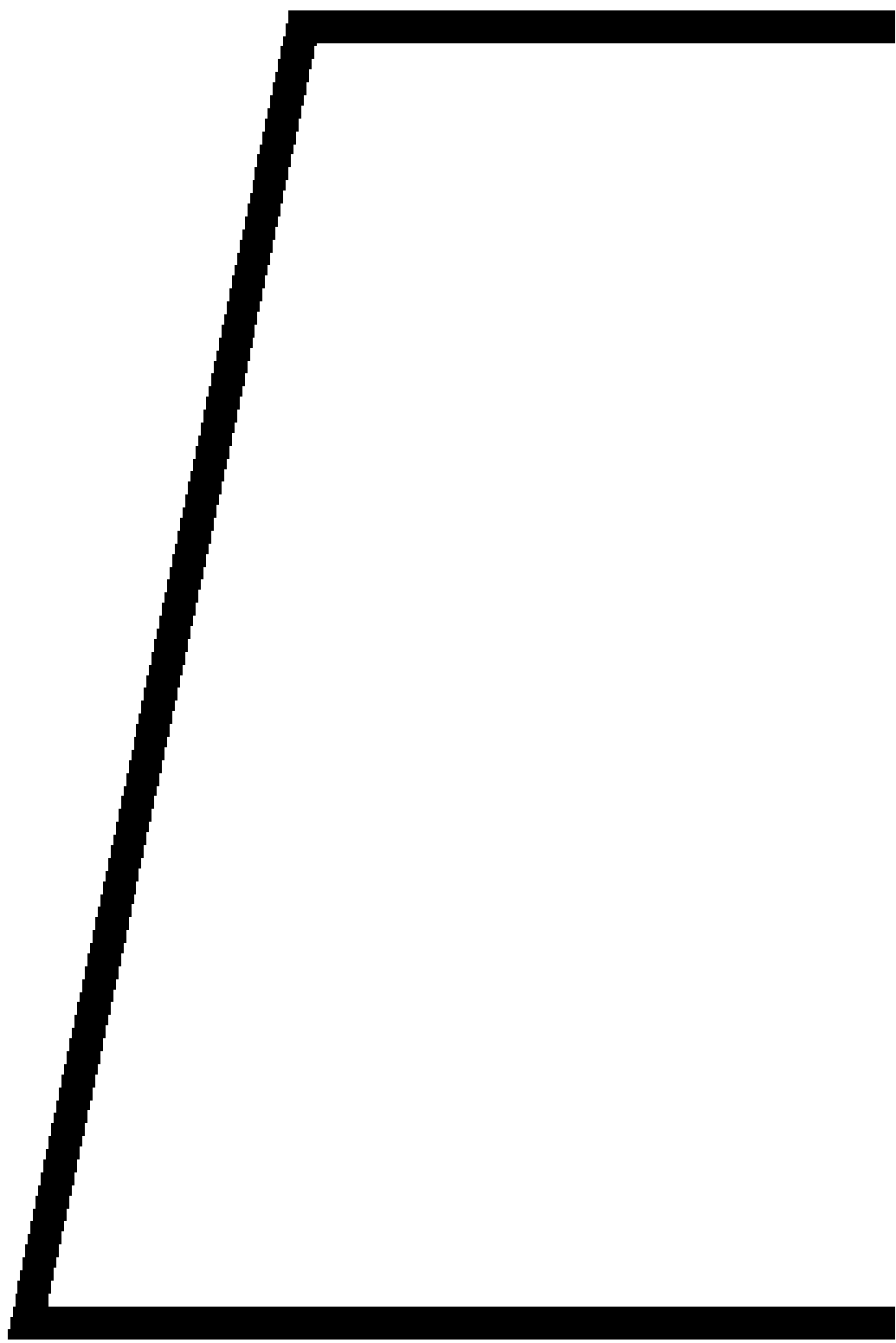
. L'écoulement de potentiel des vitesses



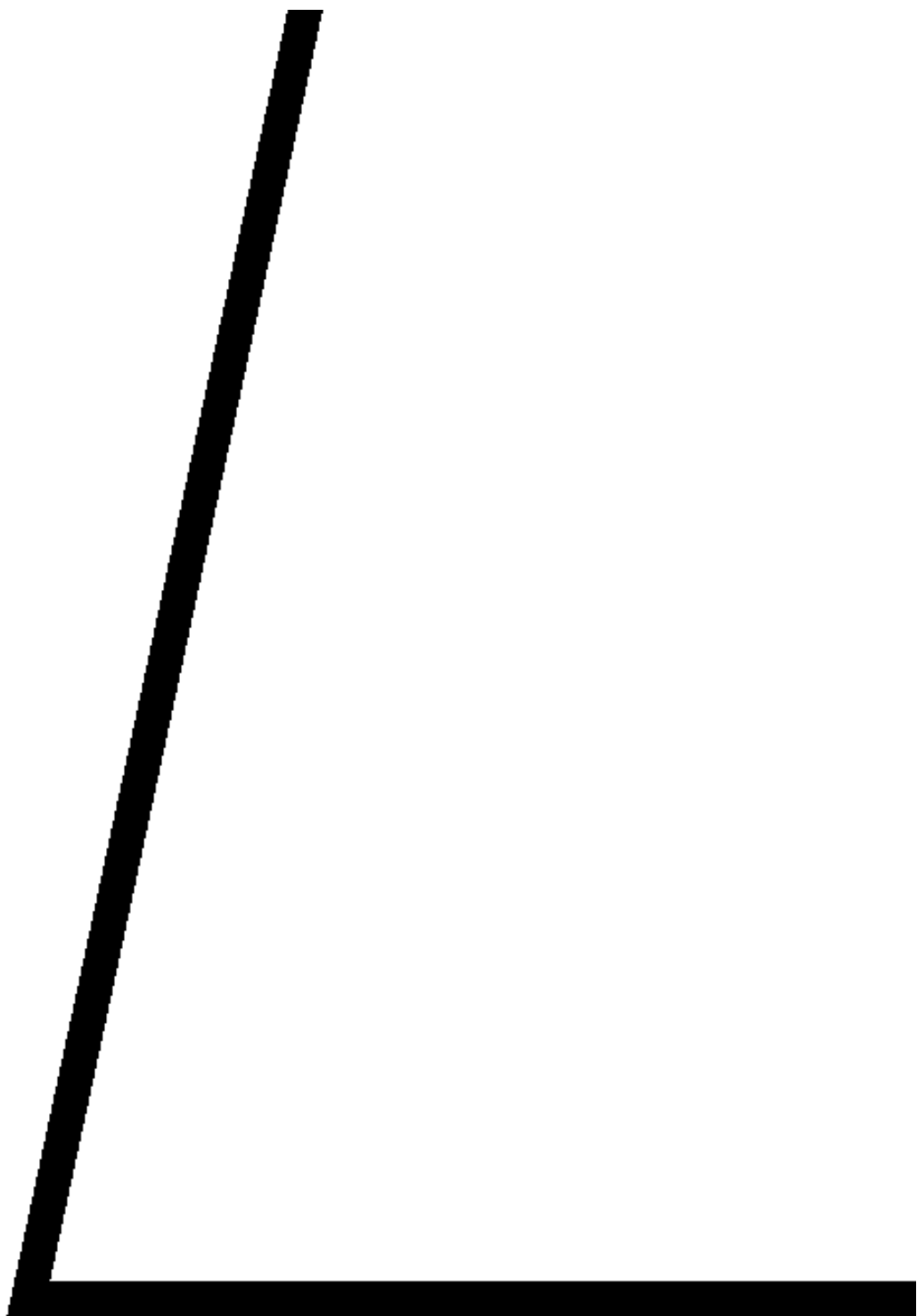
de la question I-7) correspond à l'écoulement du vent autour du cylindre de rayon



, satisfaisant aux conditions aux limites. L'écoulement de potentiel des vitesses

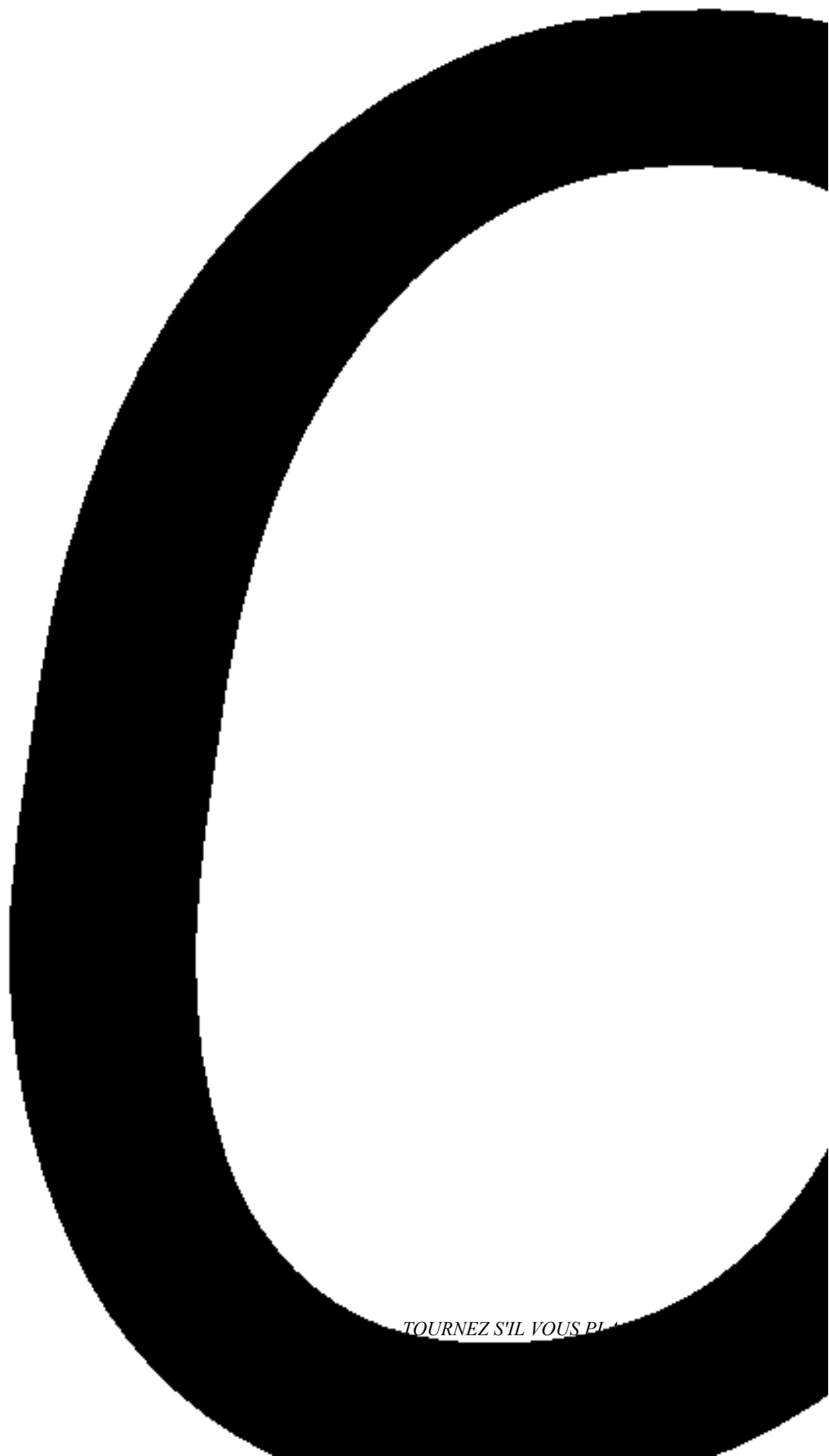


de la question I-8) correspond à l'effet d'enracinement de l'air (de masse volumique



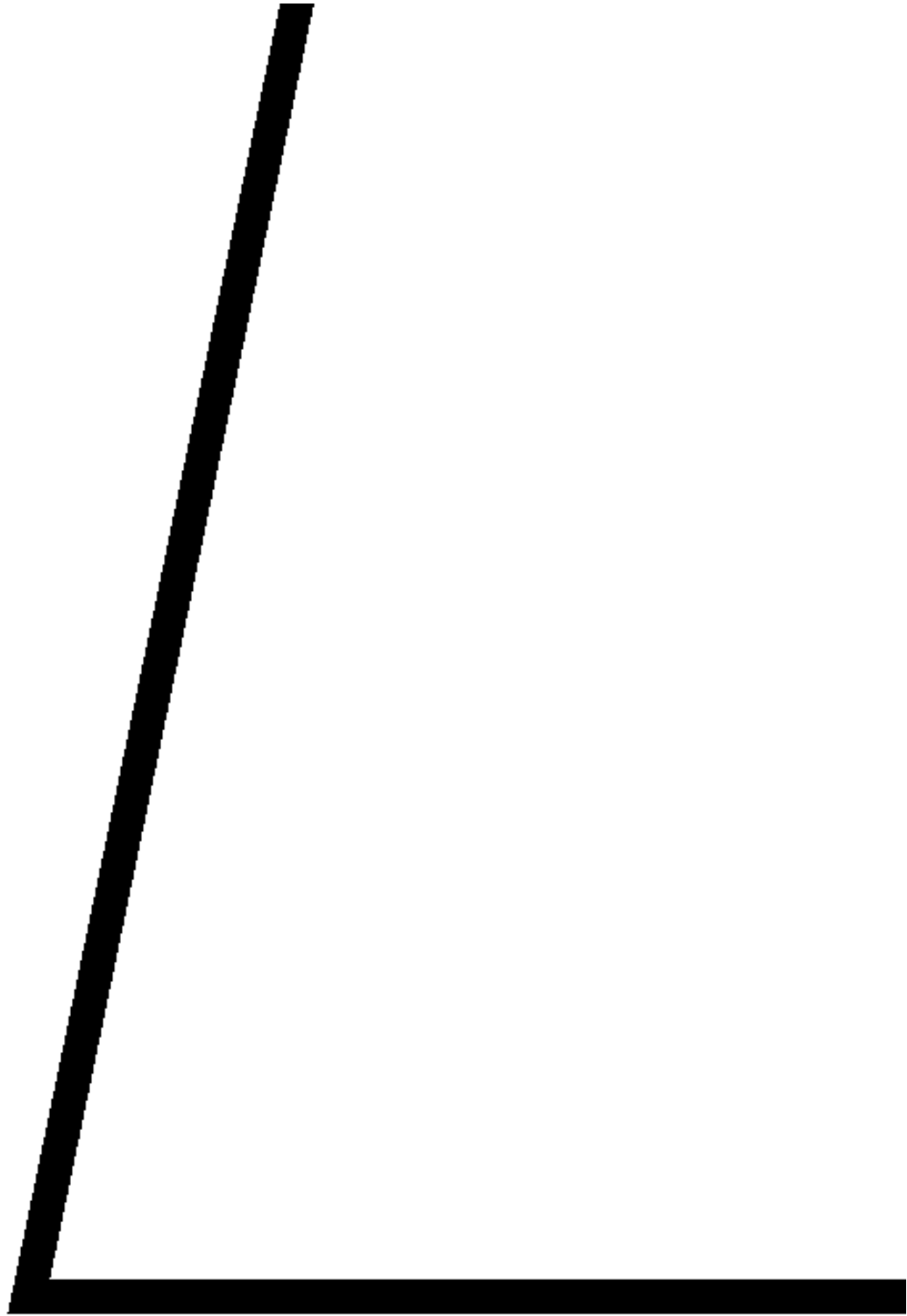
) par la rotation du cylindre.

II-1) Donner la relation entre la constante



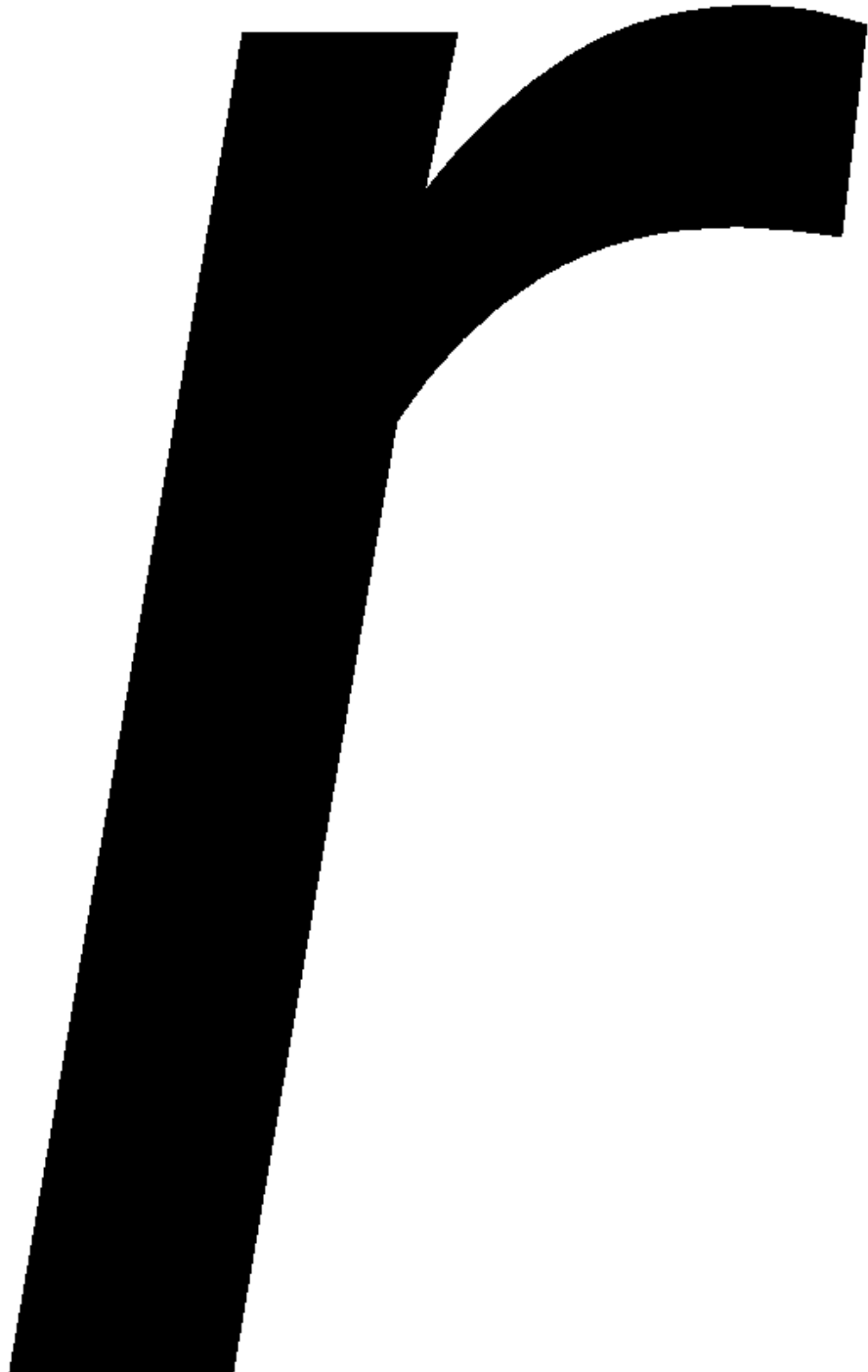
TOURNEZ S'IL VOUS PLAIT

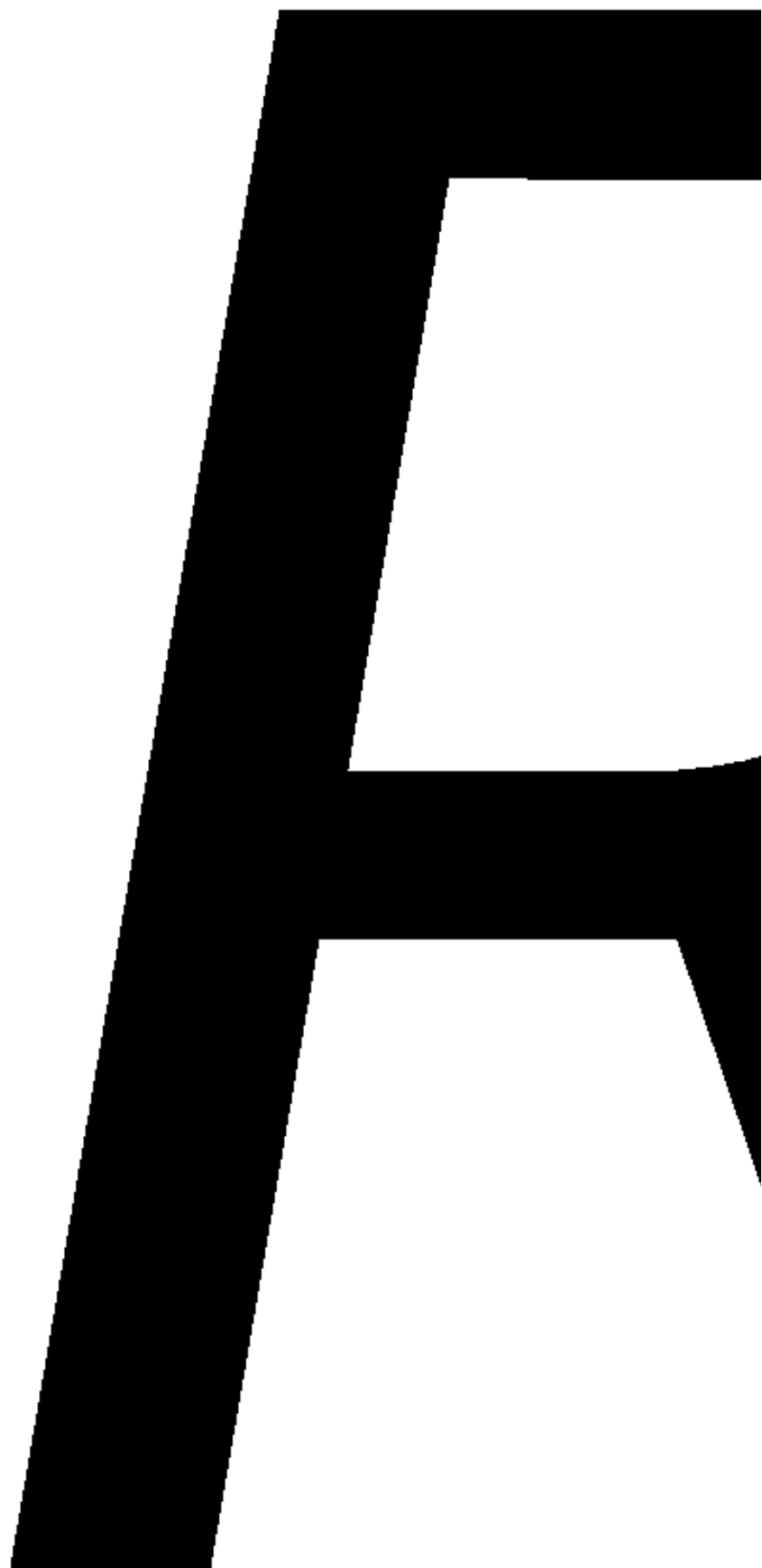
et



. On remarquera que, dans ce modèle, la vitesse du vent sur le cylindre est celle du cylindre, autrement dit que la vitesse tangentielle ne s'annule pas sur la paroi du cylindre (ce point relève, en fait, de la viscosité).

II-2) Calculer, en coordonnées polaires, les composantes de la vitesse résultante pour

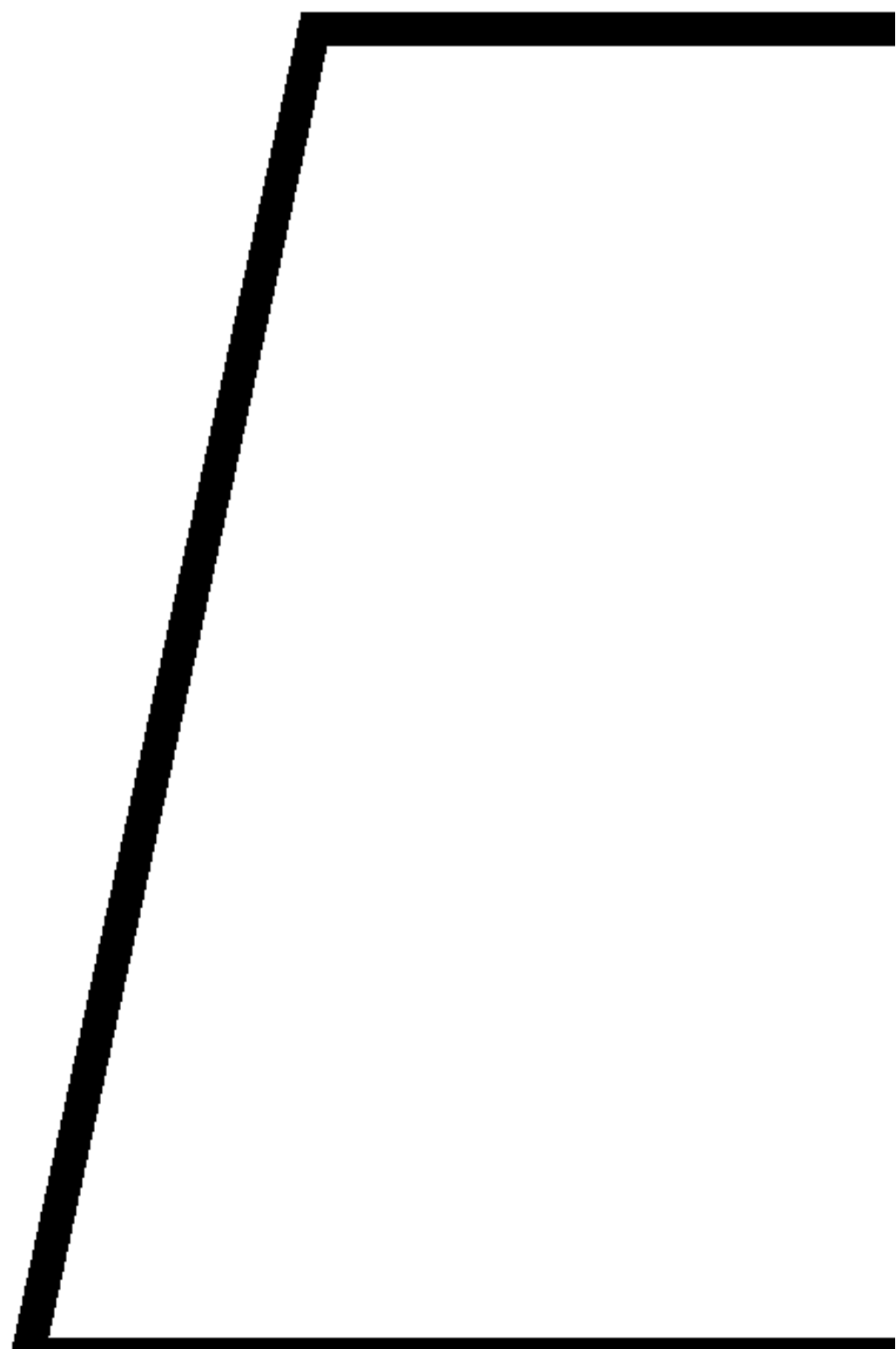




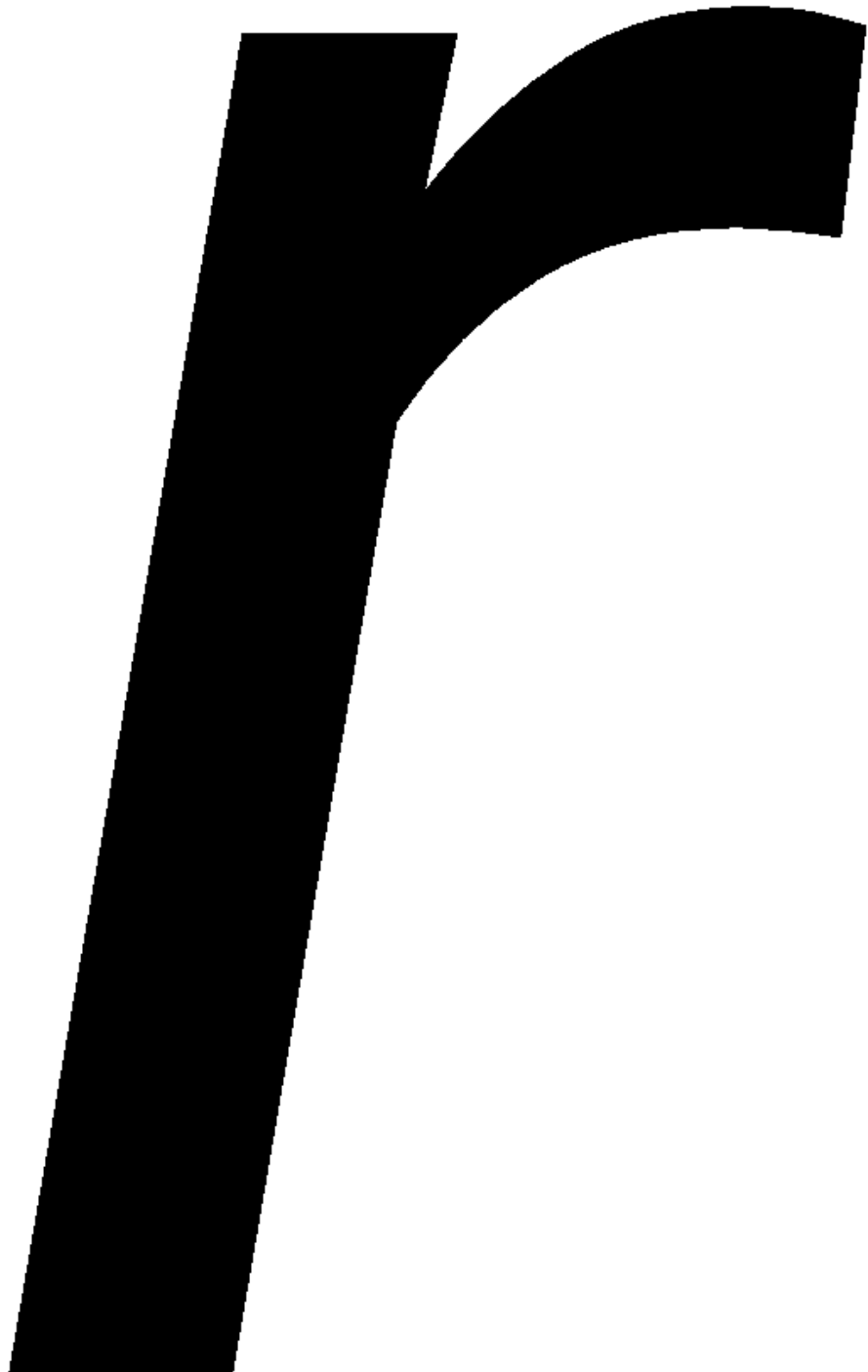
II-3) Sachant que, loin du bateau, le vent n'est pas perturbé et que la pression est égale à
la pression atmosphérique normale

P

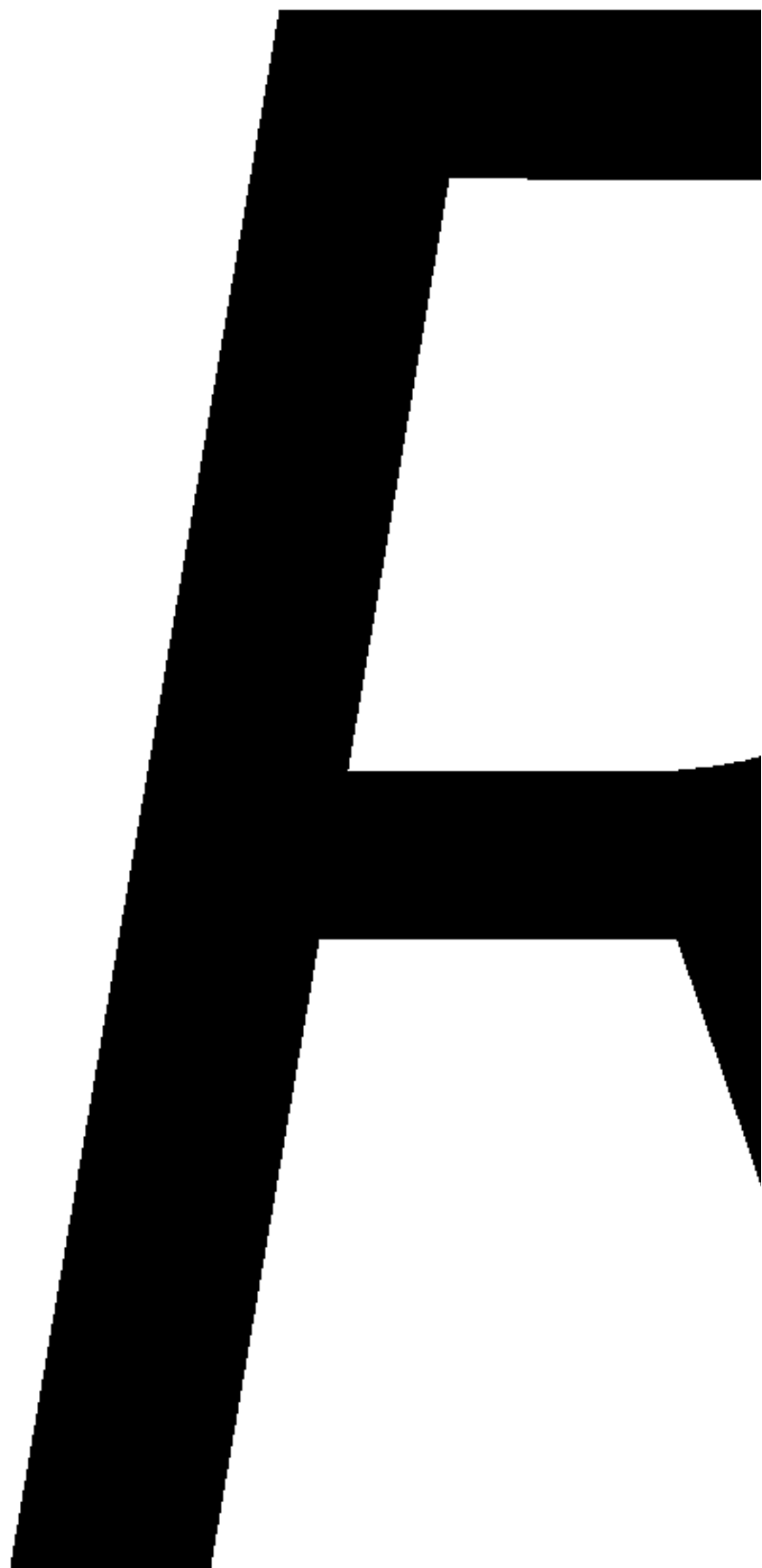
, dŽterminer, en fonction de l’angle



, la pression autour du cylindre (

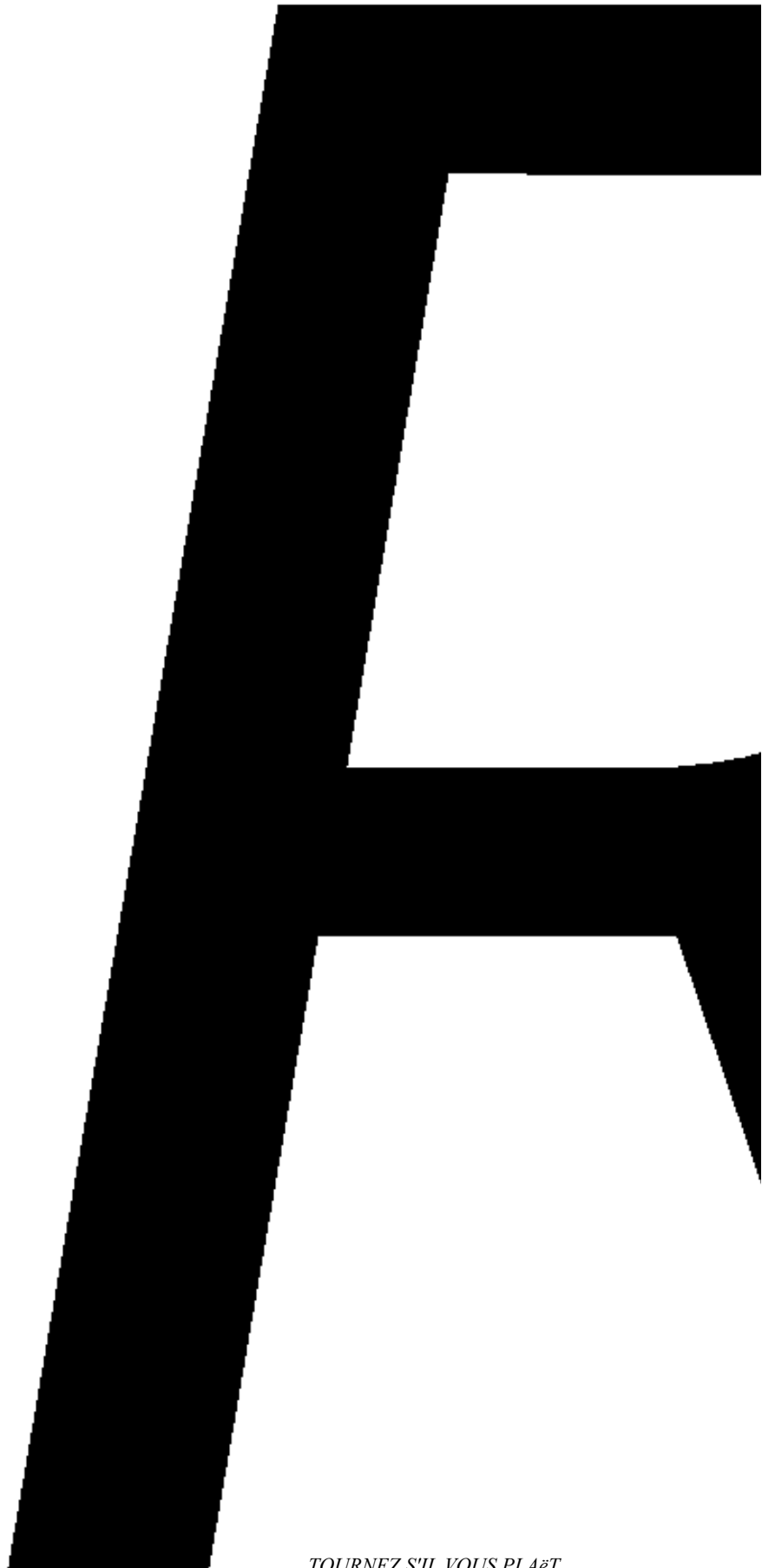


=

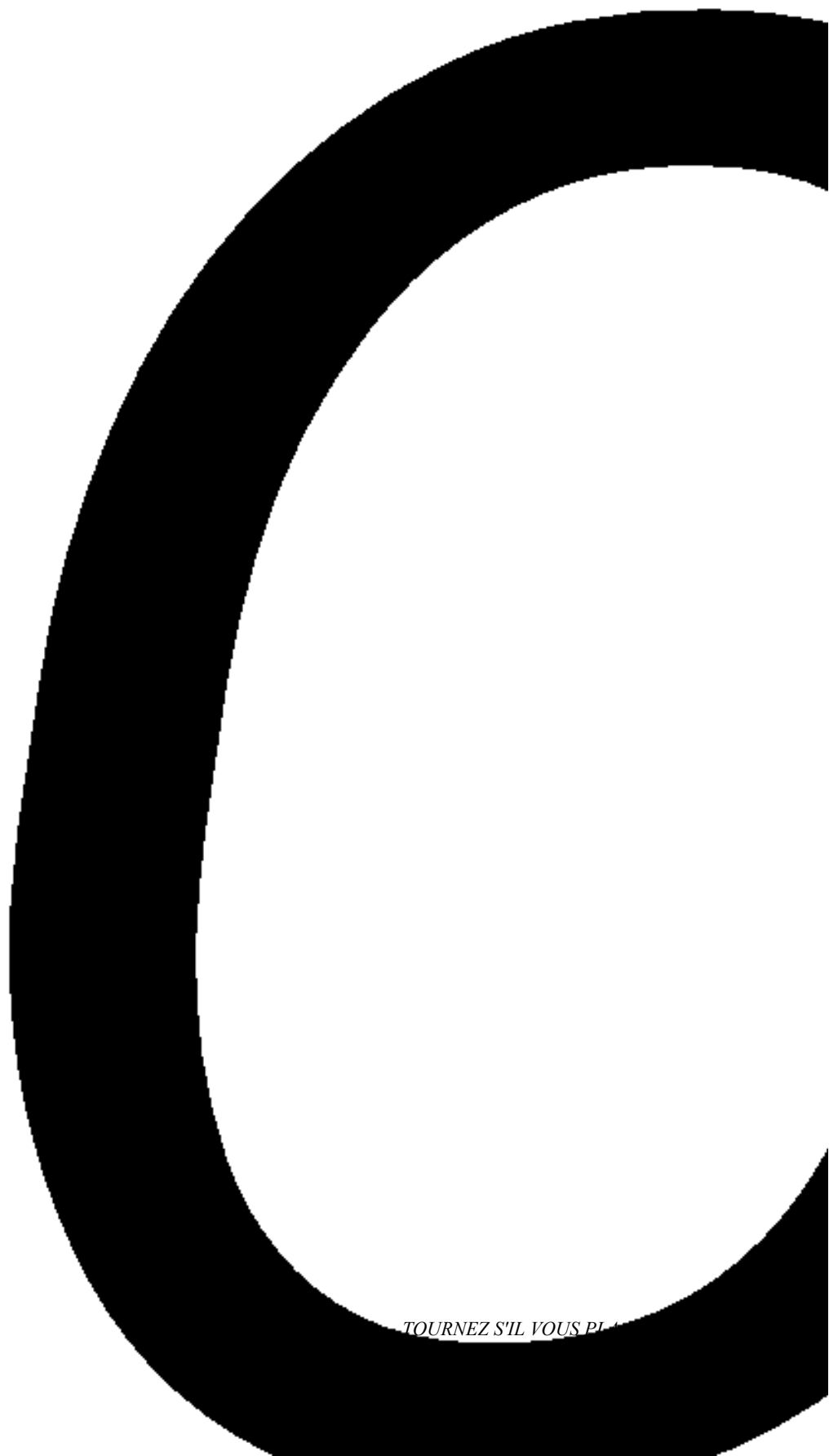


).

II-4) Quelle est, en fonction de

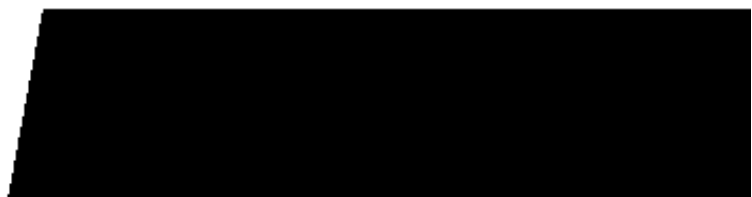


TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

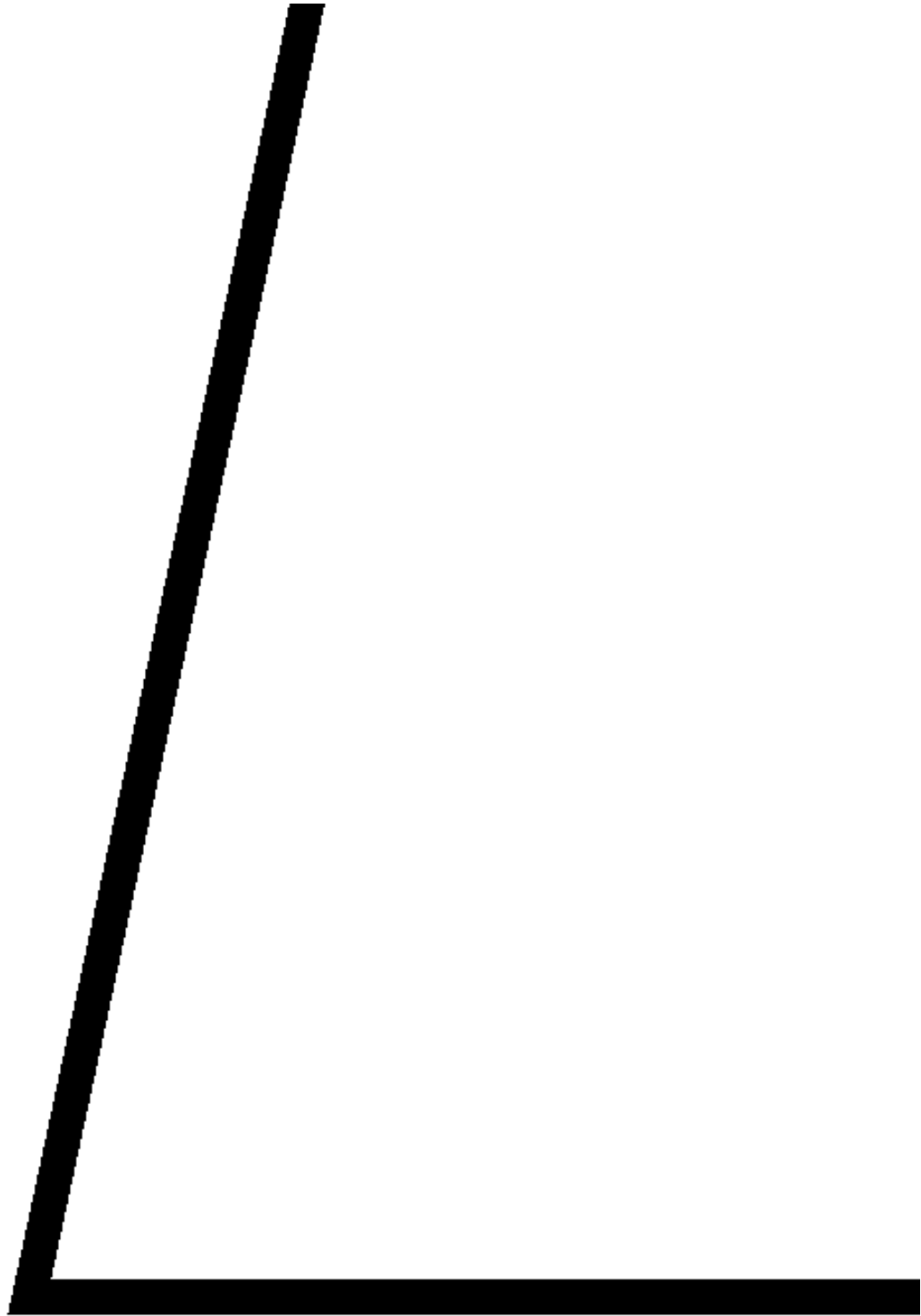




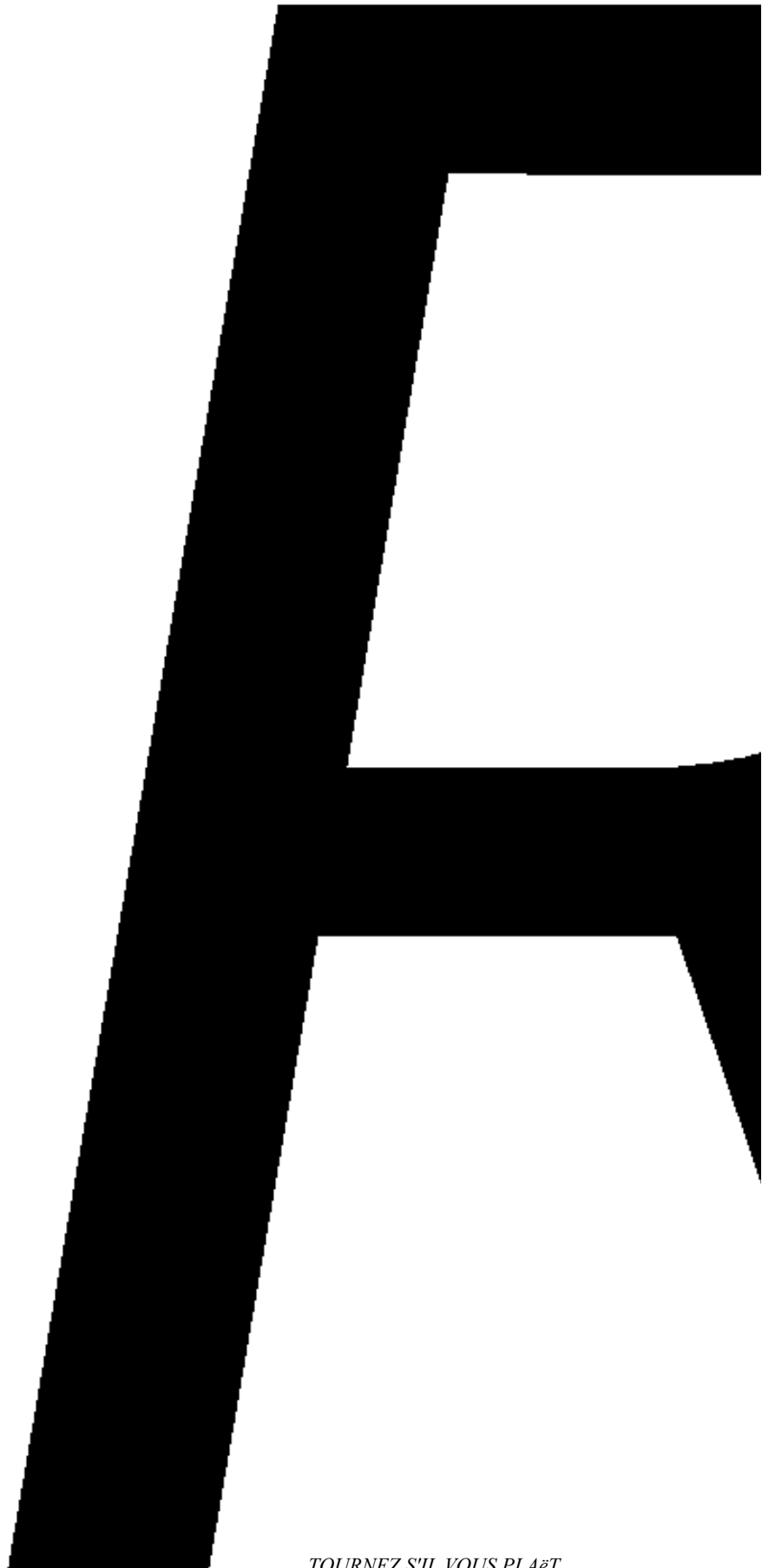
U



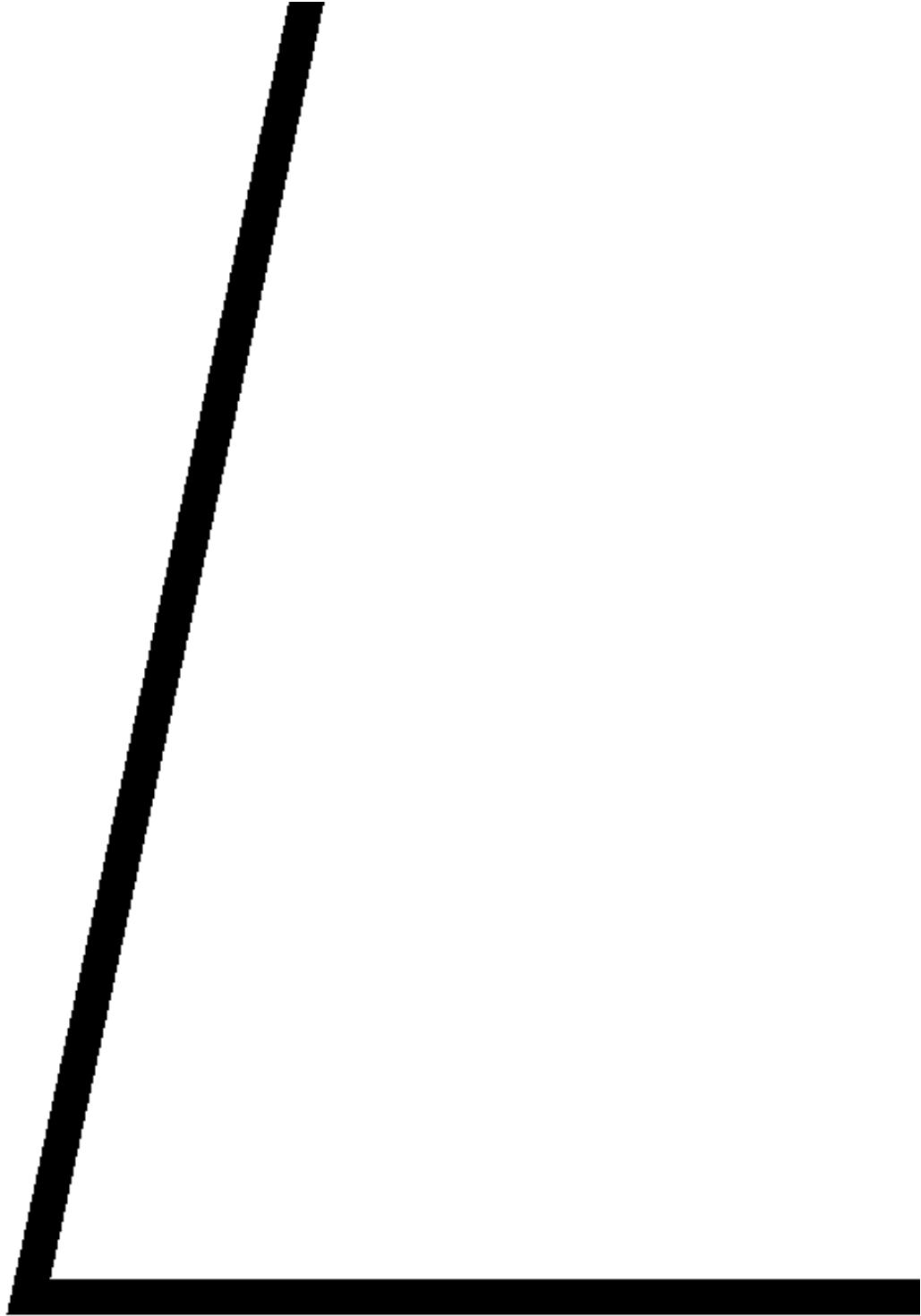
et de la masse volumique de l'air



, la résultante des forces de pression par unité de hauteur sur le cylindre ? On pourra aussi bien exprimer le résultat en fonction de



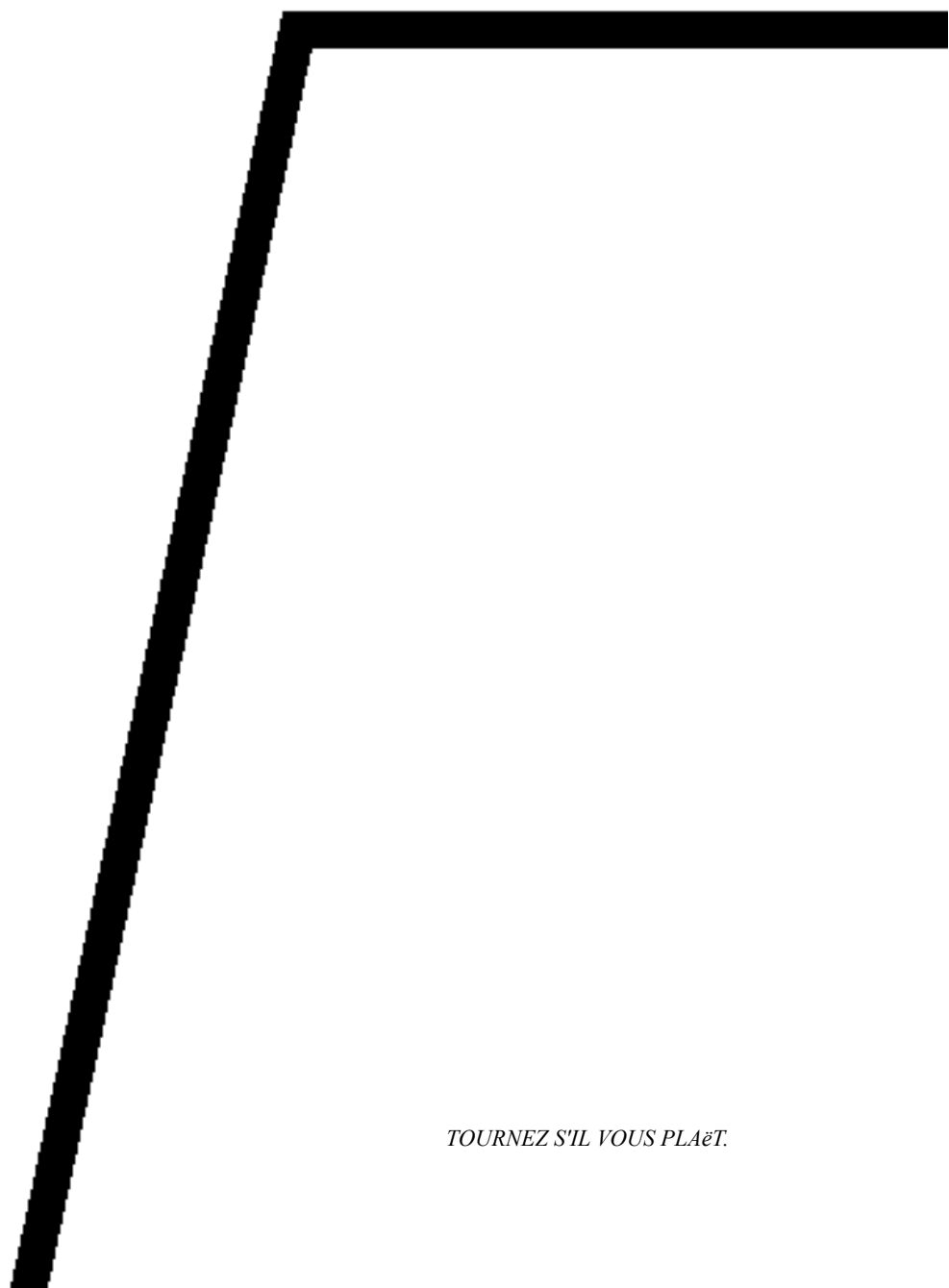
TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.





U

et



TOURNEZ S'IL VOUS PLAÎT.

II-5) Préciser sur un schéma le sens de rotation du cylindre correspondant à une force propulsive. Quelle est l'allure du vent la plus favorable (vent de proue, vent de travers et vent arrière sont précisés sur la figure 3-a).

fig. 3a : Allures du vent

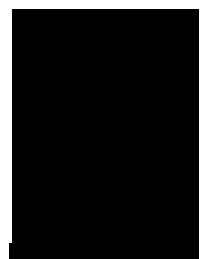
fig. 3b : Voile classique et vent (cf. II-7))

fig. 3c : Bordage optimal

II-6) La vitesse du vent est



m.s^{-1} ; la masse volumique de l'air est



kg.m⁻³. Le cylindre a une hauteur de



m

et

un

rayon

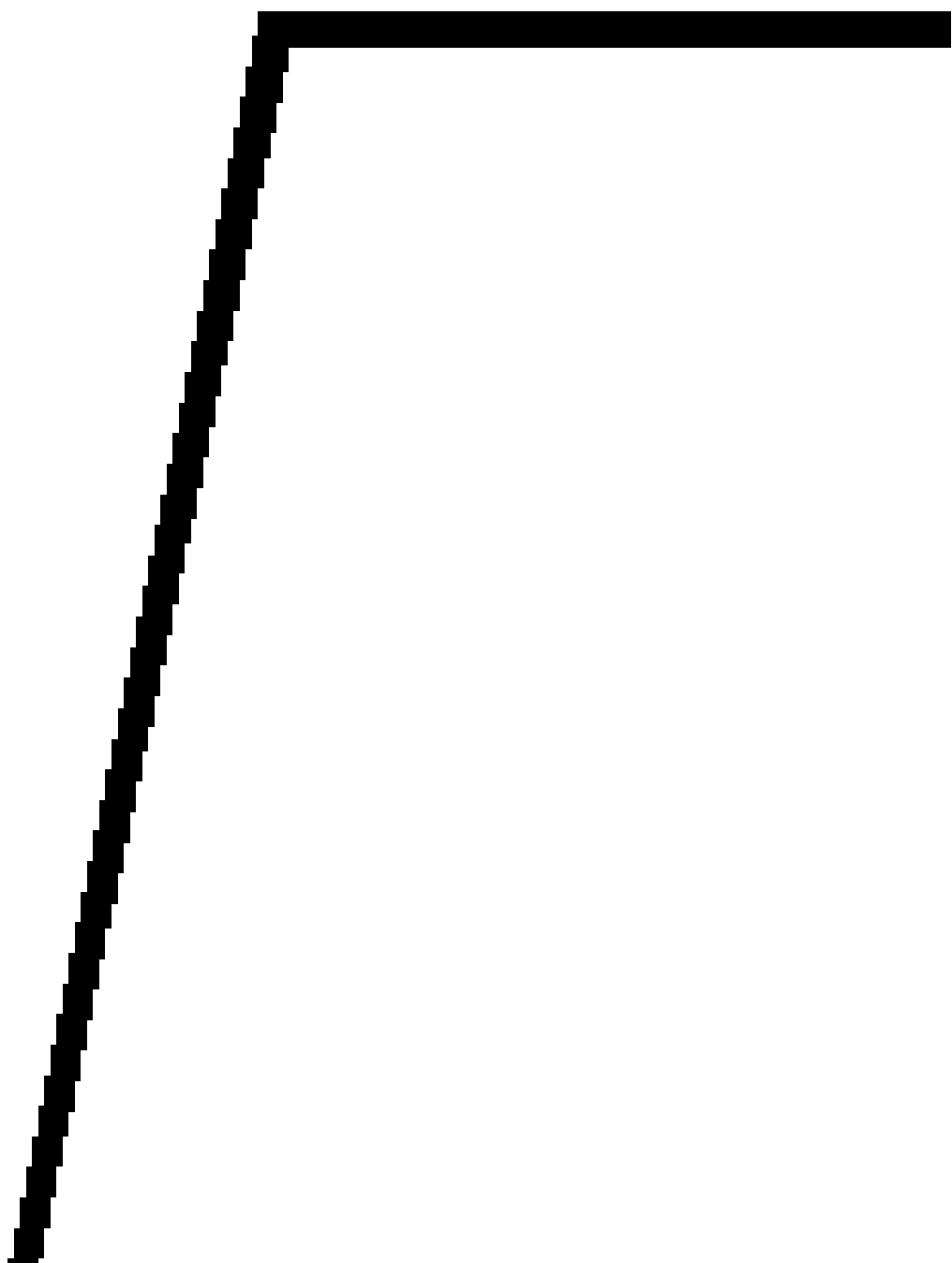
de

3

cm

;

.



- . Calculer la valeur numérique maximale de la force propulsive.

Troisième partie : Comparaison avec une voile classique

III-1) Une voile plane d'Oaire

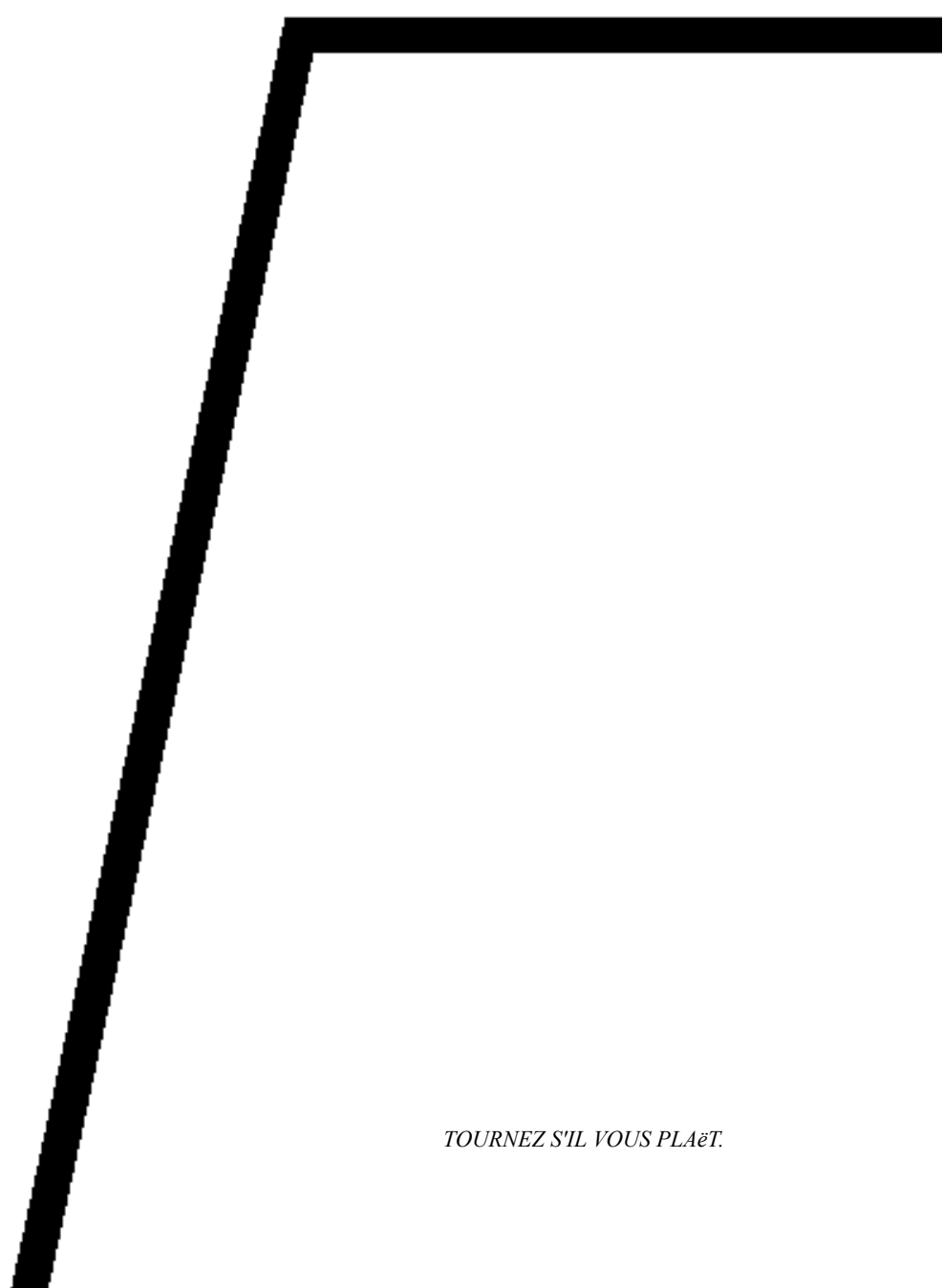
et

de

vecteur

unitaire

normal



reoit

une

veine

de

vent

de

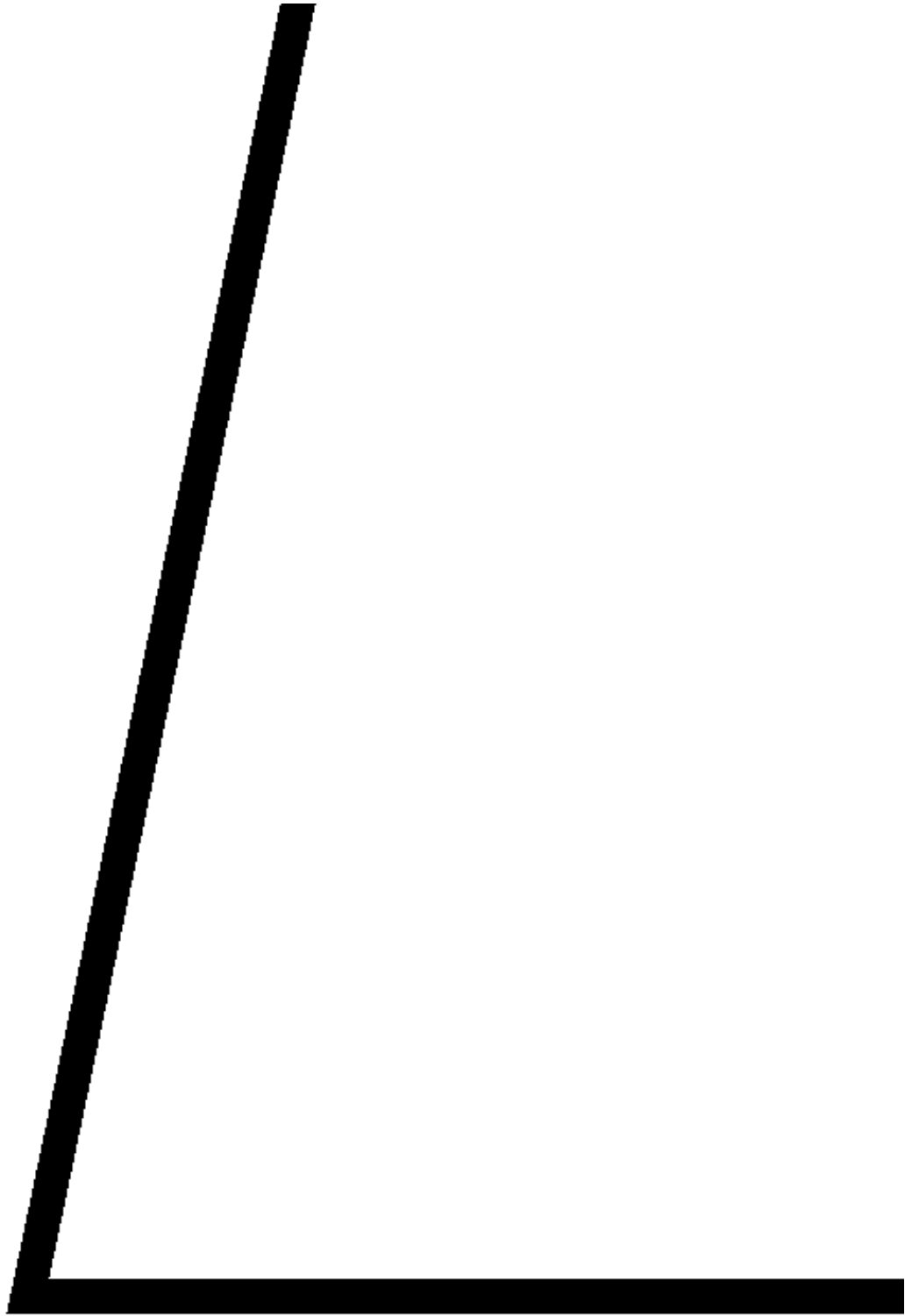
vitesse



U

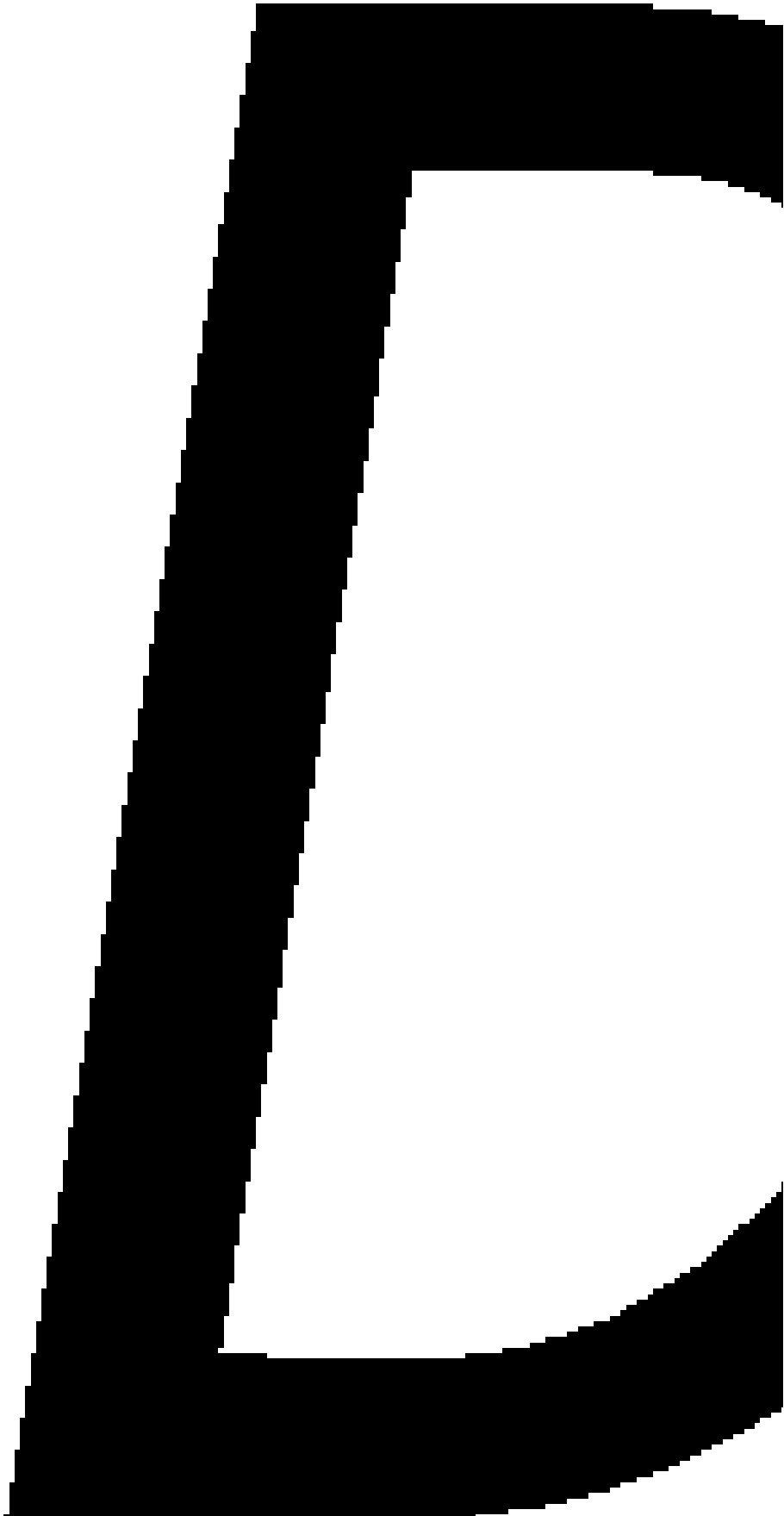
sous

l'angle

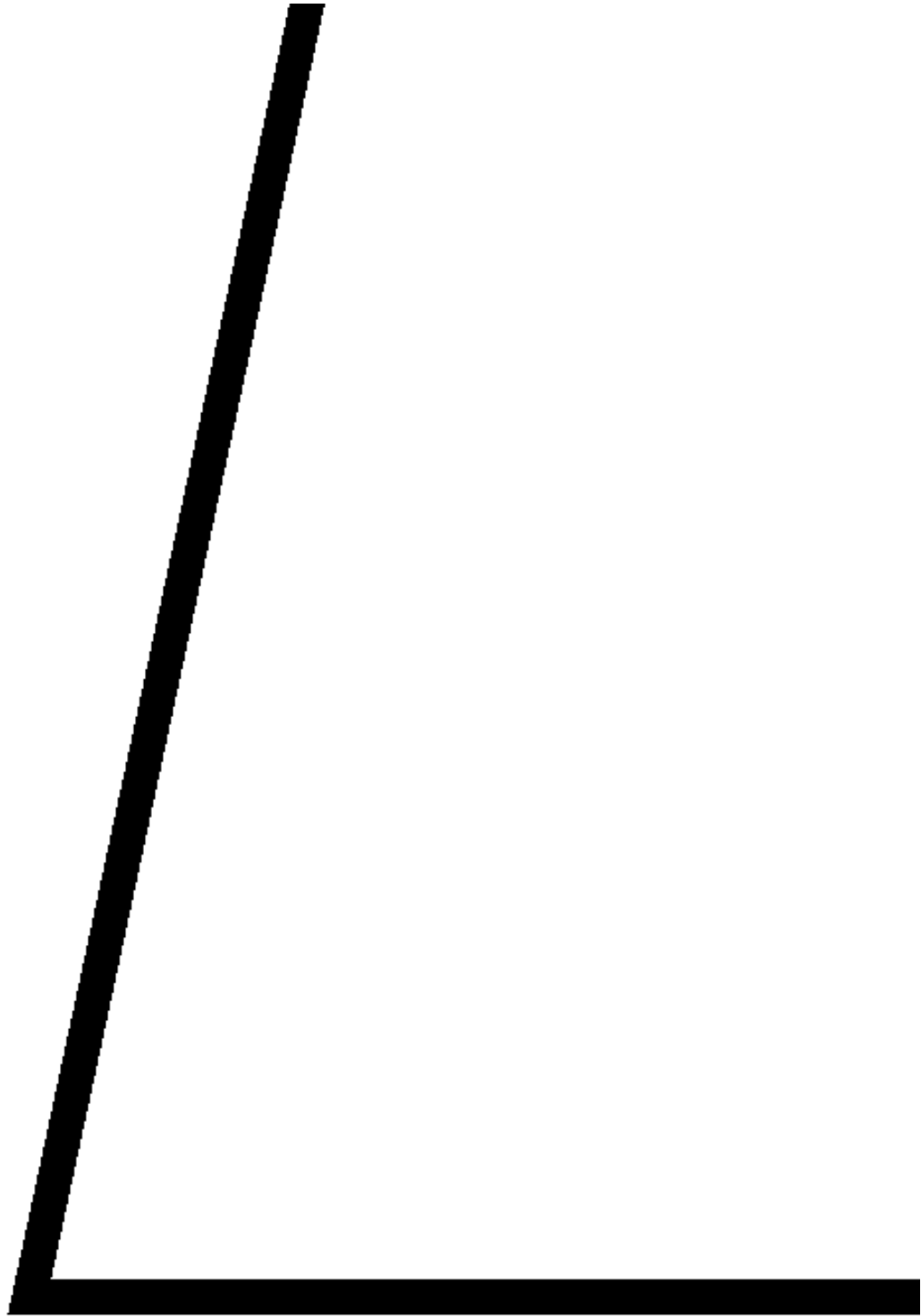


et la résultante selon la loi de Descartes (fig. 3-b). Quel est le vecteur force exercé par le vent sur la voile ? On pourra introduire le drapeau

.

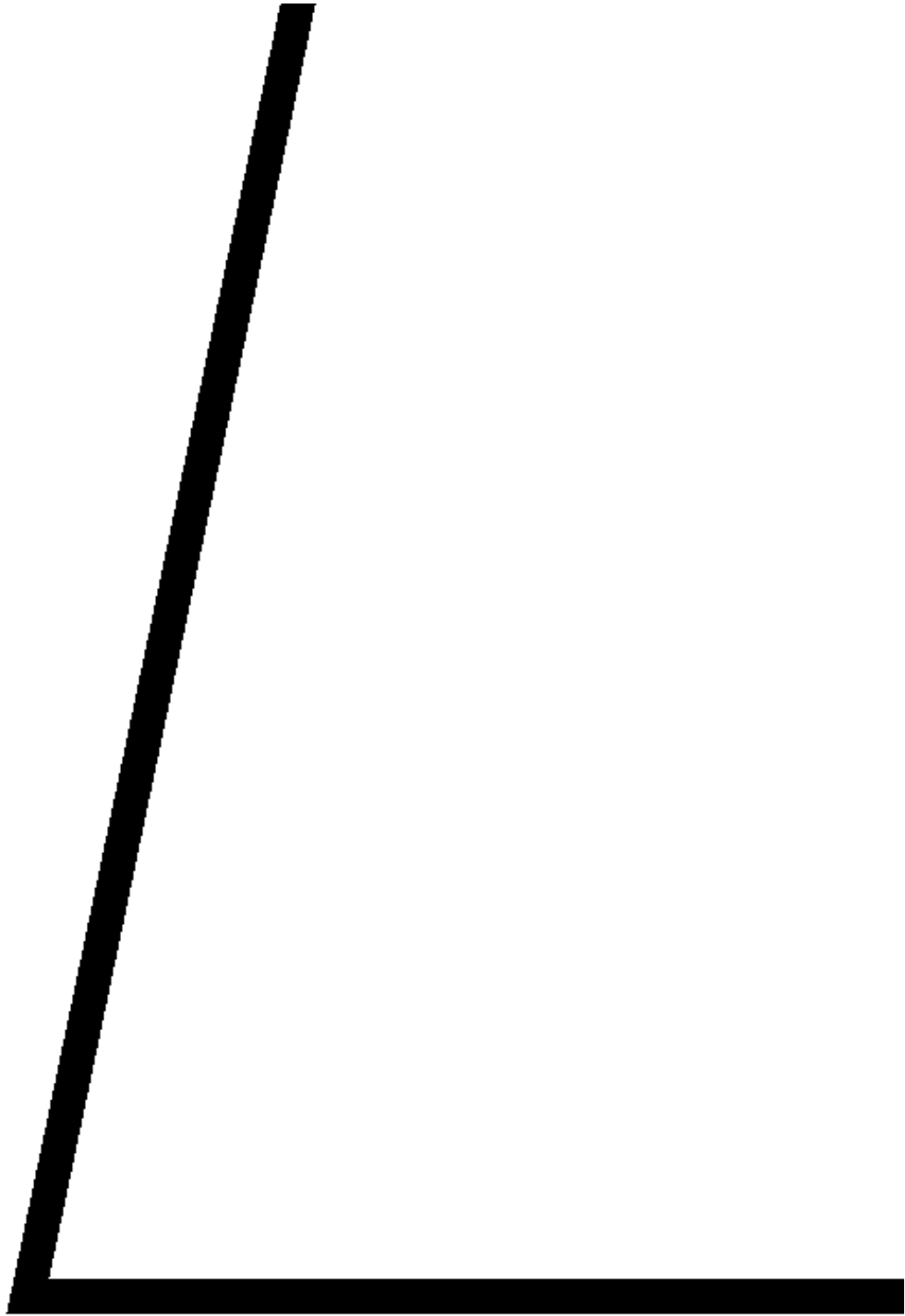


III-2) Le bateau reçoit le vent par le travers (fig. 3-c), l'axe du bateau est perpendiculaire au vent relatif. Quelle est dans ces conditions, en fonction de



U

et



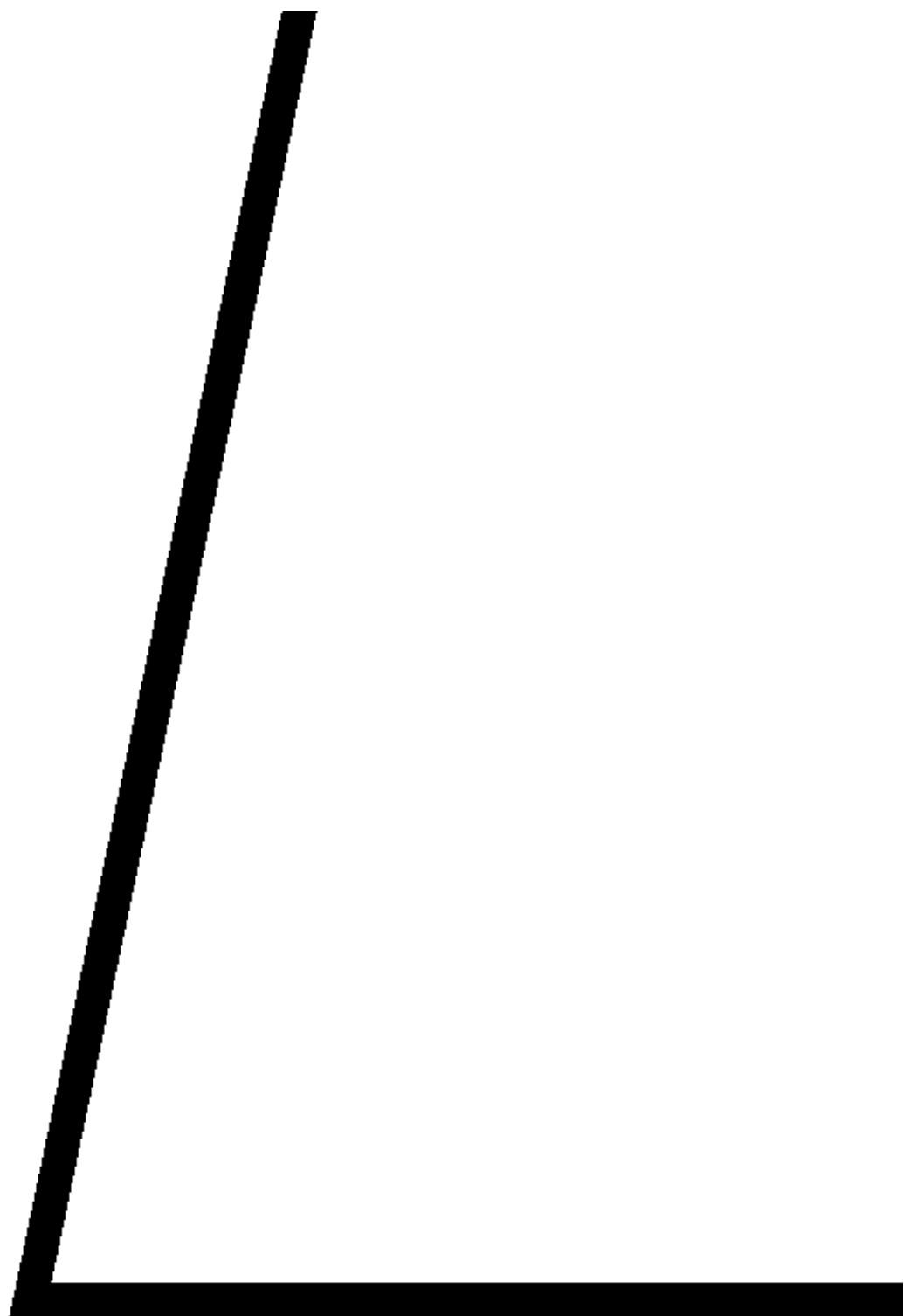
la composante propulsive de la force prŽcŽdente ?

III-3) Pour

quelle

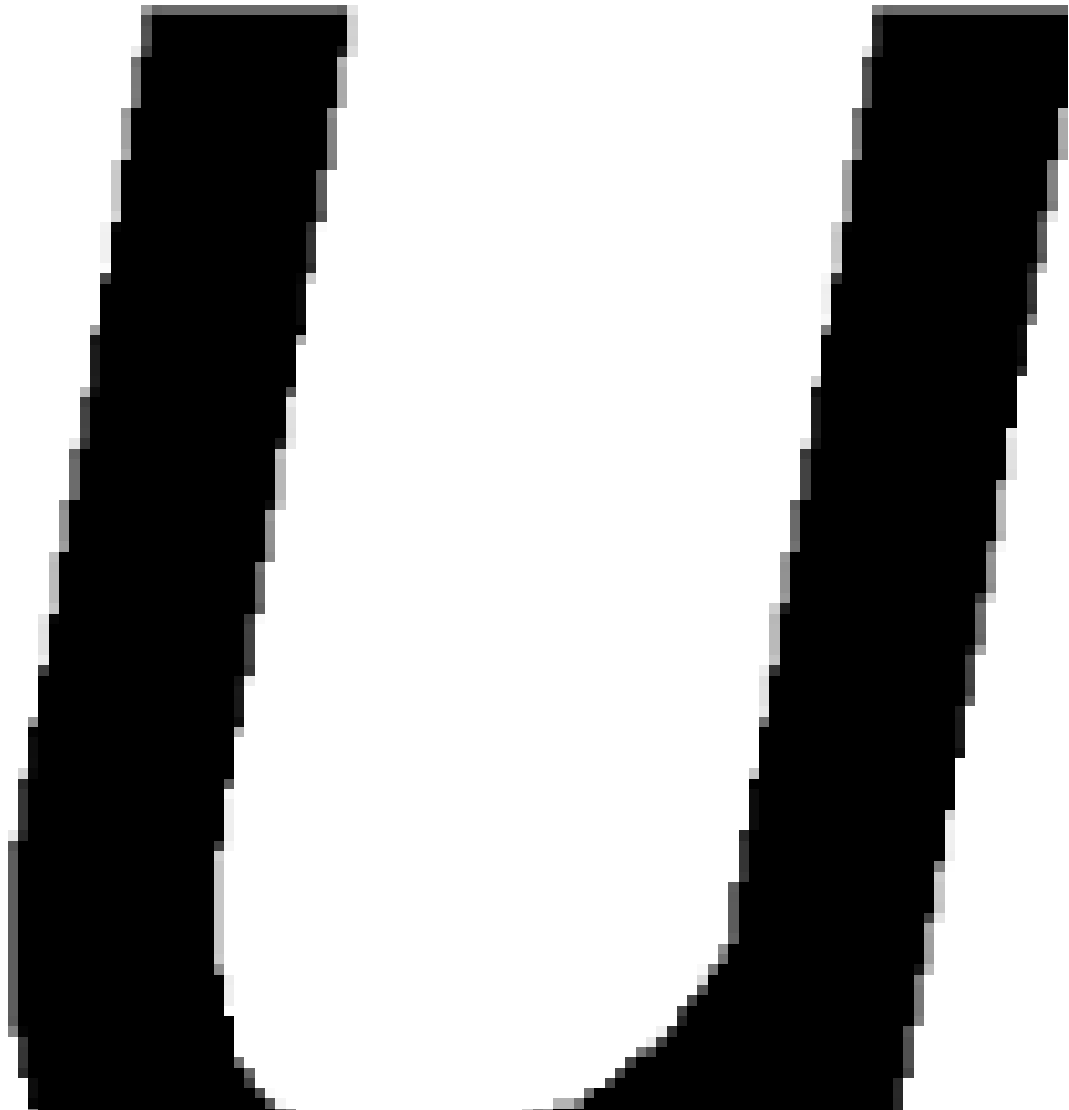
valeur

de

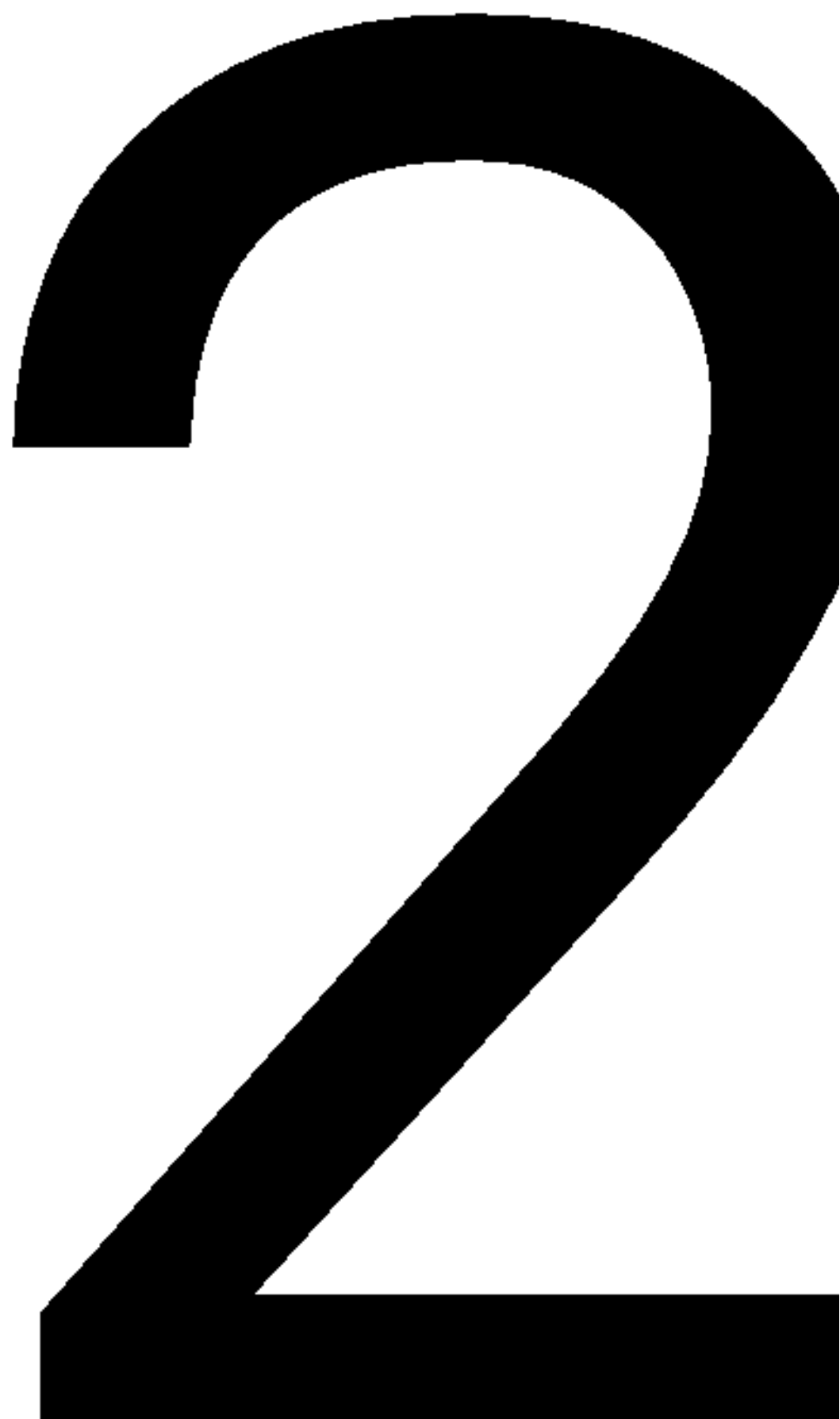


cette composante est-elle maximale ? De quel type de vent s'agit-il ? Calculer numériquement la force propulsive maximale avec le même vent qu'en II-6) (

.



) pour - 299 - une voile de

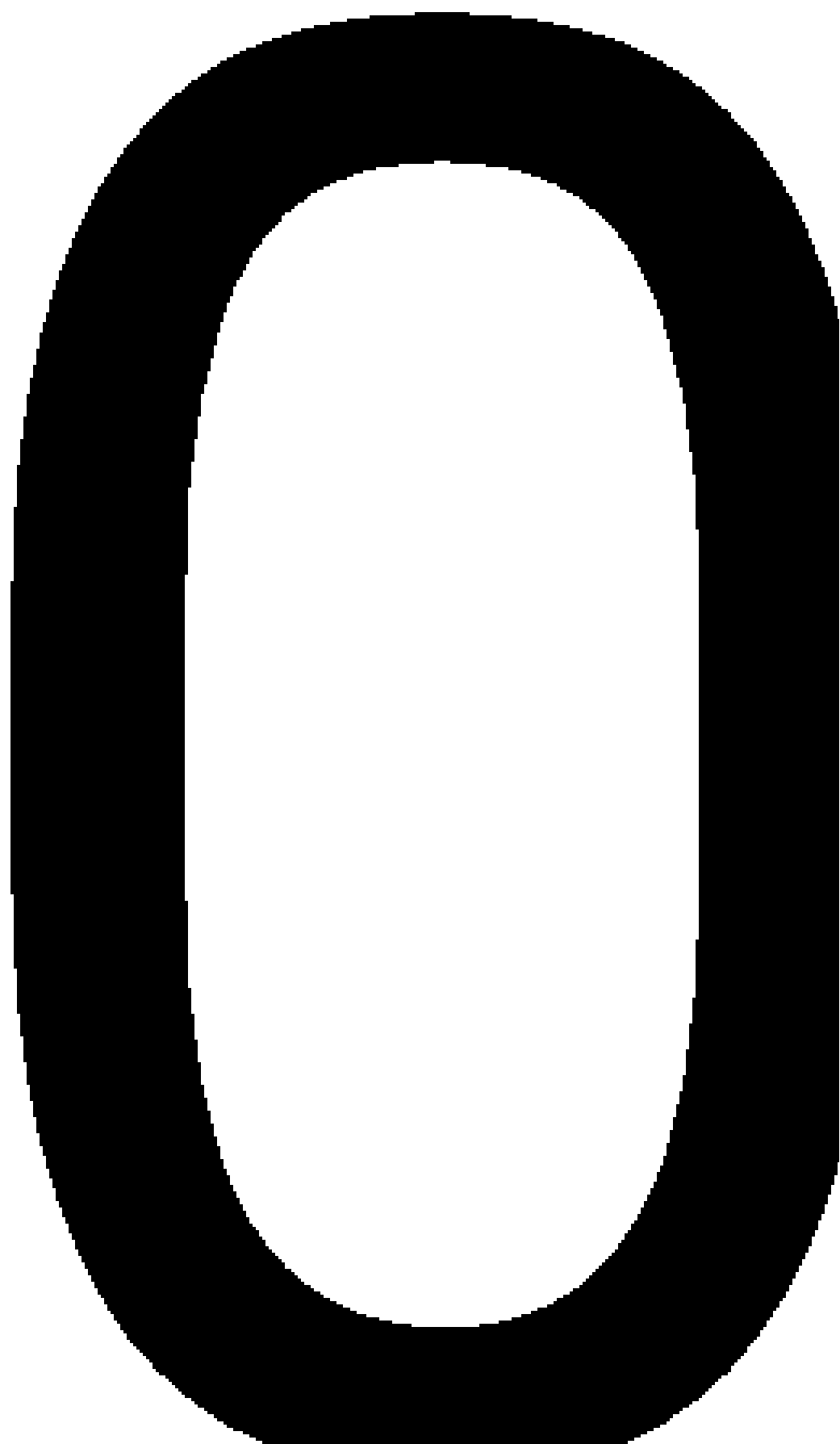


m^2 . Comparer avec le cylindre de Flettner (le maximum de la fonction

.



vaut



).

FIN DE CE PROBLÈME