

Нахождение НОК

Кратным числу A называют такое натуральное число, которое без остатка делится на A .

Так, числами кратными 5 можно считать 15, 20, 25 и так далее.

Делителей конкретного числа может быть ограниченное количество, а вот кратных бесконечное множество.

Общее кратное натуральных чисел - это такое число, которое делится на них без остатка.

Общим кратным натуральных чисел a и b называется число, которое кратно каждому из данных чисел.

Наименьшее число из всех общих кратных чисел a и b называется наименьшим общим кратным этих чисел.

Наименьшее общее кратное чисел a и b условимся обозначать $K(a,b)$.

Например, два числа 12 и 18 общими кратными являются: 36, 72, 108, 144, 180 и т.д. Число 36 - наименьшее общее кратное чисел 12 и 18. Можно записать: $K(12,18) = 36$.

Для наименьшего общего кратного справедливы следующие утверждения:

1. Наименьшее общее кратное чисел a и b всегда существует и является единственным.

2. Наименьшее общее кратное чисел a и b не меньше большего из данных чисел, т.е. если $a > b$, то $K(a,b) > a$:

Любое общее кратное чисел a и b делится на их наименьшее общее кратное.

Как найти НОК

- Нахождение путём разложения на множители
- Нахождение путём подбора
- Нахождение путём последовательного нахождения НОК

Рассмотрим способы нахождения наименьшего общего кратного.

Для небольших чисел удобно выписать в строчку все кратные этих чисел до тех пор, пока среди них не найдется общее. Кратные обозначают в записи заглавной буквой K .

Например, кратные числа 4 можно записать так:

$$K(4) = \{8, 12, 16, 20, 24, \dots\}$$

$$K(6) = \{12, 18, 24, \dots\}$$

Так, можно увидеть, что наименьшим общим кратным чисел 4 и 6 является число 24. Эту запись выполняют следующим образом:

$$\text{НОК}(4, 6) = 24$$

Нахождение путём разложения на множители

Первый способ заключается в нахождении наименьшего общего кратного путём разложения данных чисел на простые множители.

Допустим, нам требуется найти НОК чисел: 99, 30 и 28. Для этого разложим каждое из этих чисел на простые множители:

$$\begin{array}{r|l} 99 & 3 \\ 33 & 3 \\ 11 & 11 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 28 & 2 \\ 14 & 2 \\ 7 & 7 \\ 1 & \end{array}$$

$$99 = \underline{3^2} \cdot \underline{11}$$

$$30 = 2 \cdot 3 \cdot \underline{5}$$

$$28 = \underline{2^2} \cdot \underline{7}$$

Чтобы искомое число делилось на 99, на 30 и на 28, необходимо и достаточно, чтобы в него входили все простые множители этих делителей. Для этого нам необходимо взять все простые множители этих чисел в наибольшей встречающейся степени и перемножить их между собой:

$$2^2 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11 = 13\,860$$

Таким образом, $\text{НОК}(99, 30, 28) = 13\,860$. Никакое другое число меньше 13 860 не делится нацело на 99, на 30 и на 28.

Чтобы найти наименьшее общее кратное данных чисел, нужно разложить их на простые множители, затем взять каждый простой множитель с наибольшим показателем степени, с каким он встречается, и перемножить эти множители между собой.

Так как взаимно простые числа не имеют общих простых множителей, то их наименьшее общее кратное равно произведению этих чисел. Например, три числа: 20, 49 и 33 – взаимно простые. Поэтому $\text{НОК}(20, 49, 33) = 20 \cdot 49 \cdot 33 = 32\,340$.

Таким же образом надо поступать, когда отыскивается наименьшее общее кратное различных простых чисел. Например, $\text{НОК}(3, 7, 11) = 3 \cdot 7 \cdot 11 = 231$.

Нахождение путём подбора

Второй способ заключается в нахождении наименьшего общего кратного путём подбора.

Пример 1. Когда наибольшее из данных чисел делится нацело на другие данные числа, то НОК этих чисел равно большему из них. Например, дано четыре числа: 60, 30, 10 и 6. Каждое из них делится нацело на 60, следовательно:

$$\text{НОК}(60, 30, 10, 6) = 60$$

В остальных случаях, чтобы найти наименьшее общее кратное используется следующий порядок действий:

1. Определяем наибольшее число из данных чисел.
2. Далее находим числа, кратные наибольшему числу, умножая его на натуральные числа в порядке их возрастания и проверяя делятся ли на полученное произведение остальные данные числа.

Пример 2. Дано три числа 24, 3 и 18. Определяем самое большое из них – это число 24. Далее находим числа кратные 24, проверяя делятся ли каждое из них на 18 и на 3:

$$24 \cdot 1 = 24 \text{ – делится на 3, но не делится на 18.}$$

$$24 \cdot 2 = 48 \text{ – делится на 3, но не делится на 18.}$$

$$24 \cdot 3 = 72 \text{ – делится на 3 и на 18.}$$

$$\text{Таким образом, } \text{НОК}(24, 3, 18) = 72.$$

Нахождение путём последовательного нахождения НОК

Третий способ заключается в нахождении наименьшего общего кратного путём последовательного нахождения НОК.

НОК двух данных чисел равно произведению этих чисел, поделённого на их наибольший общий делитель.

Пример 1. Найдём НОК двух данных чисел: 12 и 8. Определяем их наибольший общий делитель: $\text{НОД}(12, 8) = 4$. Перемножаем данные числа:

$$12 \cdot 8 = 96.$$

Делим произведение на их НОД:

$$96 : 4 = 24.$$

$$\text{Таким образом, } \text{НОК}(12, 8) = 24.$$

Чтобы найти НОК трёх и более чисел используется следующий порядок действий:

1. Сначала находят НОК каких-нибудь двух из данных чисел.

2. Потом, НОК найденного наименьшего общего кратного и третьего данного числа.
3. Затем, НОК полученного наименьшего общего кратного и четвертого числа и т. д.
4. Таким образом поиск НОК продолжается до тех пор, пока есть числа.

Пример 2. Найдём НОК трёх данных чисел: 12, 8 и 9. НОК чисел 12 и 8 мы уже нашли в предыдущем примере (это число 24). Осталось найти наименьшее общее кратное числа 24 и третьего данного числа – 9. Определяем их наибольший общий делитель: $\text{НОД}(24, 9) = 3$. Перемножаем НОК с числом 9:

$$24 \cdot 9 = 216.$$

Делим произведение на их НОД:

$$216 : 3 = 72.$$

Таким образом, $\text{НОК}(12, 8, 9) = 72$.