

11. SINIF MATEMATİK ÖĞRENME REHBERİ

Tema 2: Geometrik Şekiller | MAT.11.2.5. Çokgenlerle İlgili Problemler

1. Bölüm: Kavramsal Çerçeve ve Pedagojik Adımlama

Çokgenlerle ilgili problemler, matematiğin soyut kurallarını günlük hayatımızın somut ihtiyaçlarıyla buluşturan en güçlü köprüdür. Bir banyonun tabanını fayansla kaplamaktan, tarihi bir konağın çatısını restore etmeye ya da Türk-İslam mimarisindeki geleneksel çini motiflerini ölçeklendirmeye kadar pek çok gerçek yaşam durumu çokgen geometrisi ile çözülür. Türkiye Yüzyılı Maarif Modeli doğrultusunda bu konuyu beş kolay ve anlamlı adımda öğreniyoruz.

Adım 1: Gözlem ve Gerçek Yaşam Problem Verisini Anlama

Geometrik bir problemi çözmenin ilk adımı, günlük hayattaki karmaşık durumu dikkatle gözlemlemektir. Problemi okurken verilen ölçüleri, istenen unsurları ve şeklin sınırlarını tespit ederiz. Örneğin, bir bahçenin etrafına tel örgü çekilecekse veya bir salona ahşap kündekari kaplama yapılacaksa, öncelikle hangi çokgensel şekillerin (dikdörtgen, kare, paralelkenar, düzgün altıgen vb.) bir arada kullanıldığını belirleriz.

Adım 2: Geometrik Modelleme ve Şekle Dönüştürme

Gözlemlediğimiz sözel verileri veya günlük hayat resimlerini geometrik bir modele dönüştürürüz. Bu adımda, gerçek yaşam nesnesini kâğıt üzerinde çokgenler, köşegenler ve açı bağıntılarıyla temsil ederiz. Karmaşık bölgeleri, bildiğimiz basit üçgen ve özel dörtgen parçalarına ayırarak modelimizi basitleştiririz.

Adım 3: Matematiksel Strateji Belirleme ve Hesaplama

Modelimiz hazır olduktan sonra, hesaplama stratejimizi kurarız. Şeklin dış sınırları söz konusuysa çokgensel bölgenin çevresini; yüzey kaplaması, boya veya malzeme ihtiyacı söz konusuysa alan bağıntılarını kullanırız. Kenar sayısı n olan dışbükey bir çokgenin iç açı ölçüleri toplamının $(n-2) \cdot 180$ derece olduğunu, dış açı ölçüleri toplamının ise daima 360 dereceye eşit olduğunu hatırlayarak eksik açı ve kenar uzunluklarını hesaplarız.

Adım 4: Verimlilik, Malzeme ve Maliyet Analizi

Matematiksel çözümü bulmak günlük hayatta tek başına yeterli değildir. Elde ettiğimiz çevre veya alan değerlerini birim maliyet, malzeme fire oranı veya işçilik süreleriyle çarparak gerçek yaşam kararlarına dönüştürürüz. Örneğin, arıların petek yaparken minimum balmumu ile maksimum hacim elde etmek için düzgün altıgen yapısını seçmesi gibi, en verimli ve ekonomik tasarımı analiz ederiz.

Adım 5: Doğrulama, Kontrol ve Değerlendirme

Bulduğumuz sonucun gerçek yaşam mantığına ve geometrik kurallara uygunluğunu test ederiz. Bir alan değerinin negatif çıkamayacağını, açı ölçülerinin çokgenin türüne uygun olması gerektiğini kontrol ederiz. Böylece problem çözme sürecini güvenle tamamlarız.

2. Bölüm: Bilgi Tasarımı ve Görselleştirme

Çokgen problemlerini çözerken zihnimizde net bir harita oluşturmak için temel adımları ve ilkelere ait özet bilgileri aşağıda bulabilirsiniz.

Problem Çözme Sürecinin Dört Temel Taşı

- **Problemi Anlama:** Verilen metindeki sayısal verileri, uzunlukları, birim maliyetleri ve istenen hedefi netleştirmek.
- **Geometrik Modelleme:** Gerçek yaşam durumunu dışbükey çokgenler, dik üçgenler ve özel dörtgenler kullanarak kâğıda çizmek.
- **Matematiksel İcra:** Çevre, alan, iç açı ve dış açı formüllerini doğru sırayla uygulayarak çözüme ulaşmak.
- **Sonucu Yorumlama:** Elde edilen sonucun mantıklı olup olmadığını kontrol etmek ve gerçek yaşam kararına dönüştürmek.

Sık Kullanılan Geometrik Bağlıntılar Rehberi

- **İç Açı Toplamı Bağlıntısı:** Kenar sayısı n olan bir dışbükey çokgenin iç açı ölçüleri toplamı $(n-2) * 180$ derecedir.
- **Dış Açı Sabiti:** Bütün dışbükey çokgenlerin dış açı ölçüleri toplamı kenar sayısından bağımsız olarak daima 360 derecedir.
- **Üçgensel Ayrıştırma:** Bir n -genin bir köşesinden $(n-3)$ tane köşegen çizilir ve şekil $(n-2)$ tane üçgensel bölgeye ayrılır.
- **Düzgün Çokgen Açılı:** Bütün kenarları ve açıları eşit olan düzgün n -genin bir dış açısı $360 / n$, bir iç açısı ise $180 - (360 / n)$ derecedir.
- **Parçalayarak Alan Hesabı:** Bir çokgensel bölgenin alanını hesaplamak için şekil dik üçgenlere, dikdörtgenlere ve yamuklara parçalanabilir.

Mimari ve Yüzey Kaplama İpuçları

- **Yüzey Kaplama (Tessellation) Şartı:** Bir yüzeyin boşluk kalmadan ve üst üste binmeden kaplanabilmesi için bir köşede birleşen iç açıların toplamı 360 derece olmalıdır.
- **Düzgün Çokgensel Kaplama:** Düzgün üçgen (60 derece), kare (90 derece) ಮತ್ತು düzgün altıgen (120 derece) tek başlarına tam yüzey kaplaması yapabilirler.
- **Geleneksel Sanat Dengesi:** Selçuklu ve Osmanlı mimarisinde künde-kari ahşap sanatı ve çini süslemelerinde farklı düzgün çokgenler bir arada kullanılarak estetik dengeler kurulmuştur.

3. Bölüm: Mini Sınav (Öz Değerlendirme)

Öğrendiğiniz bilgileri pekiştirmek ve kendi gelişiminizi değerlendirmek için aşağıdaki soruları yanıtlayınız.

A) Boşluk Doldurma Soruları

- Gerçek yaşam durumlarının çokgenler, açı ve kenar bağıntıları kullanılarak kâğıt üzerine aktarılması sürecine geometrik _____ adı verilir.
- Kenar sayısı 8 olan dışbükey bir çokgenin iç açı ölçüleri toplamı _____ derecedir.
- Bütün dışbükey çokgenlerin dış açı ölçüleri toplamı kenar sayısına bakılmaksızın sabit olup _____ derecedir.
- Bir yüzeyin boşluk kalmadan ve üst üste binmeden kaplanabilmesi için birleşme noktasındaki iç açıların toplamı _____ derece olmalıdır.
- Bir düzgün altıgenin bir iç açısının ölçüsü _____ derecedir.

B) Doğru / Yanlış Soruları

- () Kenar sayısı arttıkça dışbükey bir çokgenin dış açı ölçüleri toplamı da artar.
- () Bütün kenar uzunlukları ve iç açı ölçüleri eşit olan çokgenlere düzgün çokgen denir.
- () Düzgün beşgenler tek başlarına aralarında hiç boşluk kalmayacak şekilde bir düzlemi tamamen kaplayabilirler.
- () Karmaşık bir çokgensel bölgenin alanını hesaplarken şekli bildiğimiz üçgen ve dörtgenlere ayırmak pratik bir yöntemdir.
- () Bir n-genin tek bir köşesinden $n - 2$ tane köşegen çizilebilir.

C) Kısa Cevaplı Sorular

- Soru 1: Bir mimar, bir salonun tabanına çevre uzunluğu 24 metre olan düzgün altıgen şeklinde bir süsleme yapacaktır. Bu altıgenin bir kenar uzunluğu kaç metredir?
- Soru 2: İç açı ölçüleri toplamı 1080 derece olan bir dışbükey çokgenin kenar sayısı kaçtır?
- Soru 3: Bir düzgün sekizgenin bir dış açısı ile bir iç açısının ölçüsünü sırasıyla bulunuz.
- Soru 4: Arılar bal peteklerini inşa ederken neden düzgün altıgen şeklini tercih ederler? Matematiksel gerekçesini açıklayınız.
- Soru 5: Düzgün beşgenlerin bir köşesindeki iç açısı 108 derecedir. Neden sadece düzgün beşgenler kullanılarak bir zemin boşluksuz kaplanamaz?

Cevap Anahtarı

A) Boşluk Doldurma Yanıtları:

- 1. modelleme | 2. 1080 | 3. 360 | 4. 360 | 5. 120

B) Doğru / Yanlış Yanıtları:

- 1. Yanlış (Dış açı toplamı daima 360 derecedir, değişmez.)
- 2. Doğru

- 3. Yanlış (Düzgün beşgenin iç açısı 108 derecedir; 360, 108'e tam bölünmediği için boşluk kalır.)
- 4. Doğru
- 5. Yanlış (Tek bir köşeden $n - 3$ tane köşegen çizilir.)

C) Kısa Cevaplı Soru Yanıtları:

- **1. Cevap:** Düzgün altıgenin 6 eşit kenarı vardır. Çevre 24 metre ise bir kenar uzunluğu $24 / 6 = 4$ metredir.
- **2. Cevap:** İç açı toplamı $(n-2) * 180 = 1080$ bağıntısından, $n - 2 = 6$ bulunur. Buradan kenar sayısı $n = 8$ olarak elde edilir.
- **3. Cevap:** Bir dış açısı $360 / 8 = 45$ derecedir. Bir iç açısı ise $180 - 45 = 135$ derecedir.
- **4. Cevap:** Düzgün altıgen, birim çevreye karşılık en büyük alanı sağlayan ve düzlemi boşluksuz kaplayan mükemmel bir geometrik şekildir. Bu sayede arılar en az balmumu harcayarak en fazla balı depolarlar.
- **5. Cevap:** Bir noktadaki açıların toplamının 360 derece olması gerekir. Düzgün beşgenin bir iç açısı 108 derecedir. 360 sayısı 108'e tam bölünmediği için $(108 + 108 + 108 = 324)$ derece, 36 derece boşluk kalır) düzlem kaplanamaz.

4. Bölüm: Derinleşme ve Araştırma Soruları

Aşağıdaki sorular elinizdeki kaynakları (NotebookLM kaynakları, ders kitabı ve müfredat metinleri) detaylıca inceleyerek kendi cümlelerinizle yanıtlamanız için hazırlanmıştır.

- Soru 1: Selçuklu ve Osmanlı mimarisinde yer alan künde kari ahşap sanatı ve çini süslemelerinde kullanılan geometrik motifleri inceleyiniz. Bu eserlerde farklı düzgün çokgenlerin (kare, düzgün sekizgen, düzgün onikigen vb.) bir arada kullanılmasının estetik ve yapısal nedenlerini araştırıp değerlendiriniz.
- Soru 2: Doğadaki geometrik formlar ile mühendislik tasarımları arasındaki ilişkiyi ele alınız. Arıların altıgen petek yapısı ile günümüz uçak kanatlarında ve bina yalıtımlarında kullanılan altıgen 'bal Peteği (honeycomb)' panellerin dayanıklılık ve malzeme tasarrufu açısından benzerliklerini açıklayınız.
- Soru 3: Tarihi bir konağın çokgensel avlusunun restorasyon projesinde görev alan bir mimar olduğunuzu hayal ediniz. Avlunun zemin kaplamasında malzeme firesini en aza indirmek ve maliyeti optimize etmek için çokgenlerin çevre ve alan özelliklerini nasıl bir stratejiyle kullanırsınız?
- Soru 4: Düzgün çokgensel bölgelerle yüzey kaplama (tessellation) kurallarını araştırınız. Neden sadece üç çeşit düzgün çokgenin (üçgen, kare, altıgen) tek başına düzenli kaplama yapabildiğini, diğer düzgün çokgenlerin ise neden yapamadığını matematiksel olarak gerekçelendiriniz.
- Soru 5: Şehir planlamasında ve peyzaj mimarisinde parkların, meydanların ve yürüyüş yollarının çokgensel bölgeler şeklinde tasarlanmasının çevre uzunluğu, alan kullanımı ve insan dolaşım verimliliği üzerindeki etkilerini tartışınız.

5. Bölüm: Farklılaştırma - Ek Öğrenme

Sınıf içindeki farklı öğrenme ihtiyaçlarına yanıt verebilmek amacıyla hazırlanan pedagojik destek ve ilerletme adımları aşağıda sunulmuştur.

Destekleme (Basitleştirilmiş Öğrenme Adımları)

- **Somut Materyal Kullanımı:** Öğrencilere hazır kesilmiş renkli kartonlardan üçgen, kare, dikdörtgen ve düzgün altıgen parçaları verilir.
- **Görsel Dokunsal Deneyim:** Öğrencilerden bu parçaları masalarında bir araya getirerek aralarında boşluk kalıp kalmadığını gözlemlmeleri istenir.
- **Adım Adım İlerleme:** Formüller yerine öncelikle şekilleri bilinen basit üçgenlere bölerek alan ve çevre hesabı yapmaları sağlanır.
- **Akran Rehberliği:** Akran eşleşmesi yapılarak hazır bulunuşluğu yüksek öğrencilerle birlikte problem aşamaları adım adım çözülür.

Zenginleştirme (İleri Seviye ve Derinleşme Adımları)

- **Pick Teoremi Araştırması:** Noktalı veya kareli kâğıt üzerinde köşeleri ızgara noktalarında olan çokgenlerin alanını hesaplamada kullanılan Pick Teoremi araştırmaya açılır.
- **Dinamik Geometri Modellemesi:** GeoGebra veya benzeri dinamik geometri yazılımları kullanılarak iki veya daha fazla farklı düzgün çokgenin (örneğin düzgün sekizgen ve kare) bir arada oluşturduğu yarı-düzenli kaplamalar dijital ortamda tasarlanır.
- **İslam Sanatında Geometrik Derinlik:** Geleneksel Türk çini sanatındaki 8'li ve 12'li geometrik yıldız sistemlerinin matematiksel çizim adımları analiz ettirilir.

6. Bölüm: Terimler Sözlüğü

Rehber boyunca geçen anahtar kavramların net ve anlaşılır tanımları aşağıda listelenmiştir.

- **Çokgen:** Düzlemde herhangi üçü doğrusal olmayan n tane noktayı sırayla birleştiren doğru parçalarının oluşturduğu kapalı geometrik şekil.
- **Dışbükey Çokgen:** Bütün iç açıları 180 dereceden küçük olan ve iç bölgesindeki her iki noktayı birleştiren doğru parçası tamamen şeklin içinde kalan çokgen.
- **Düzgün Çokgen:** Bütün kenar uzunlukları ve bütün iç açı ölçüleri birbirine eşit olan çokgen.
- **Köşegen:** Çokgenin ardışık olmayan iki köşesini birleştiren doğru parçası.
- **Geometrik Modelleme:** Gerçek yaşam durumlarının çokgenler, açı ve kenar bağıntıları kullanılarak kâğıt üzerinde matematiksel olarak temsil edilmesi.
- **Yüzey Kaplama (Tessellation):** Çokgensel bölgelerin aralarında hiç boşluk kalmayacak ve şekiller üst üste binmeyecek biçimde birleştirilerek bir düzlemin örtülmesi işlemi.
- **Çokgensel Çevre:** Çokgenlerin kenar uzunlukları toplamı ile sınırlandırılan uzunluk değeri.
- **Çokgensel Alan:** Çokgenin iki boyutlu düzlemde kapladığı toplam yüzey miktarı.
- **Kündekari:** Ahşap parçalarının çivi veya tutkal kullanılmadan, geçme yöntemiyle birleştirilerek çokgensel ve yıldız motiflerin oluşturulduğu geleneksel Türk marangozluk sanatı.
- **Malzeme Verimliliği:** Karşılaşılan problemin çözümünde mevcut malzemeyi en az fire ile kullanma ve en yüksek verimi elde etme stratejisi.

Öğretmen İmecesı Matematik Zümresi tarafından Hazırlanmıştır. ogretmenimecesi.com