

# Métodos Semi-clássicos em mecânica quântica

**2022-2**

*Disciplina para Doutorado em Matemática*

**Prof:** [Alejandro](#)

Horário: Seg-Qua 15-17hs

Sala: F2-005 no CCMN

Conteúdos desta página:

[Ementa](#)

[Referências e conteúdos](#)

[Cronologia das aulas](#)

[Calendário](#)

---

## Ementa:

Esta disciplina visa introduzir os alunos aos conceitos e técnicas modernas do chamado Análise Semi-Clássico, um conjunto de ferramentas fundamentais na Física-matemática contemporânea relacionada à mecânica quântica e seu limite clássico.

Esta área se distingue por fazer a ponte entre a análise funcional de operadores e a geometria simplética. A ideia básica é que se consideram famílias de operadores pseudo-diferenciais em um espaço  $X$  (dependendo de um parâmetro de escala, tipicamente sendo a "constante de Planck"  $h$  em mecânica quântica) e equações de evolução tipo Schrodinger. Se estabelece um certo tipo de cálculo simbólico-assintótico (para  $h$  indo a zero) para estes operadores que dá lugar a funções ("observáveis clássicos") no fibrado cotangente de  $X$  e à correspondente dinâmica simplética/Hamiltoniana. Ainda, esta teoria se estende para operadores Fourier-integrais e seus "wave-fronts" sendo subvariedades lagrangianas, mediante métodos "micro locais" (seguindo uma teoria clássica de Hormander).

Todas estas técnicas permitem desenvolver uma teoria com resultados muito interessantes e profundos (veja [F] embaixo) que relacionam propriedades analíticas dos operadores com

propriedades geométrico-simpléticas subjacentes (e.g: aproximações às soluções de EDPs, Ley de Weyl, teorema de Egorov, e outros).

A ideia da disciplina será ver, detalhadamente, os elementos básicos envolvidos seguindo livros de texto bem estabelecidos sobre estes tópicos e enfatizando a relação com os problemas físicos subjacentes. No final da disciplina, discutiremos aplicações mais avançadas desta teoria.

## Referencias e conteúdos:

- + [F] C.L. Fefferman, The uncertainty principle, Bull. Amer. Math. Soc. 9 (1983), 129-206
- + V. Guillemin and S. Sternberg. Semi-classical analysis. International Press, Boston, MA, 2013.
- + A. Martinez. An introduction to semiclassical and microlocal analysis. Universitext. Springer-Verlag, New York, 2002.
- + L. Takhtajan, Quantum mechanics for Mathematicians, Graduate studies in Mathematics, AMS.
- + **M. Zworski. Semiclassical analysis**, volume 138 of Graduate Studies in Mathematics. American Mathematical Society, Providence, RI, 2012.

Outras relacionadas (mais avançadas):

- + Karasev, Maslov, Quantization of non-linear Poisson brackets, Translation of Mathematical Monographs 119, AMS.

### Conteúdos a serem desenvolvidos:

- 1) [Takhtajan] Motivação via sistemas quânticos simples: espaços de Hilbert, operadores hamiltonianos, autoestados, evolução temporal. Limite clássico e expansões semi-clássicas.
- 2) [Zworski; Guillemin-Sternberg; Martinez] Ferramentas: transformada de Fourier, lema da fase estacionária, operadores pseudo diferenciais, cálculo simbólico, elementos de análise microlocal.
- 3) [Zworski; Guillemin-Sternberg; Martinez] Aproximações semi clássicas em sistemas quânticos simples, autovalores e Lei de Weyl, aproximando autofunções, teo. De Egorov e relação entre dinâmica clássica e quântica. Quantização de transformações simpléticas e operadores Fourier integrais (FIO).  
[Guillemin-Sternberg] teoria global dos operadores FIO e relações lagrangianas. Fórmulas de traços.
- 4) Tópicos avançados (possíveis):
  - + [Martinez] WKB em EDPs e estimativas microlocais
  - + [Zworski] Ergodicidade clássica e consequências quânticas
  - + Quantização de variedades simpléticas: quant. Geométrica, quant. Berezin-Toeplitz, quant. Formal de Fedosov e teoremas de índice.

- +A fórmula de integral de Feynman do ponto de vista semi clássico.
- +Quantização de variedades de Poisson e teoria de Lie ([Karasev-Maslov])

## Aulas em ordem cronológica:

Embaixo, aparecerá um resumo do conteúdo visto em cada aula (A1=aula #1, etc.), assim como listas de exercícios e atividades. As separações são por semanas, veja também o [Calendário](#) abaixo para as datas.

# A1: Introdução a disciplina, sumário de conteúdos e ideias. [Takhtajan, Cap 2, S 2.3,2.4,2.6]: O formalismo da mecânica quântica. Elementos de análise funcional. Comparação breve com a mec. Clássica. Alguns sistemas quânticos simples, 1 partícula quântica livre, oscilador harmônico.

---

# A2: [Takhtajan, Cap 3, S6] Mais exemplos. Ideias gerais sobre asintótica semi-clássica. O caso da função de onda e o método das características.

# A3: [Takhtajan, Cap 5, S6] Mais sobre ideias gerais de asintótica semi-clássica em sistemas quânticos simples. A eq. De Schrodinger estacionaria e WKB. Asintótica do kernel do operador evolução.

---

# A4: Começando com [Zworski], Capitulo 3. Espaço de Schwartz de funções. Transformada de Fourier (clássica) e propriedades. Distribuições temperadas. Transformada de Fourier de uma função oscilatório-gaussiana.

# A5: Continuando com [Zworski], Capitulo 3. Transformada de Fourier semi-clássica. Principio de incerteza (paramétrico). Stationary phase (SP) em 1 dim.

---

# A6: Continuando com [Zworski], Capitulo 3. Segunda demonstração de SP em dim 1. SP em n dim via Lema de Morse (parte I).

---

# A7: Continuando com [Zworski], Capitulo 3. SP em n dim via Lema de Morse (parte II). Exemplos importantes. Integrais oscilatórias como distribuições.

# A8: [Zworski], Capitulo 4: Quantização Semiclássica. Classes de símbolos. Fórmulas de quantização: operadores pseudo-diferenciais  $\leftrightarrow$  símbolos. Definição dos operadores para

símbolos Schwartz e distribuições.

---

#A9: Continuando com [Zworski], Capítulo 4. Fórmulas de quantização de símbolos. Exponenciais..

---

#A10: Continuando com [Zworski], Capítulo 4. Composição de operadores e star product de símbolos, o caso da quantização de Weyl.

#A11: Continuando com [Zworski], Capítulo 4. Fórmulas para mudança de quantizações. Composição de símbolos para quantização Standard. Classes de símbolos e suas séries assintóticas. Teorema de Borel.

---

#A12: Continuando com [Zworski], Capítulo 4. Quantização das novas classes de símbolos. Fórmulas para composição detalhadas.

#A13: Continuando com [Zworski], Capítulo 4. Operadores quantizados são limitados em  $L^2$ . Casos em que são operadores compactos.

---

#A14: Continuando com [Zworski], Capítulo 4. Inversas, símbolos elípticos e estimativas de Garding.

---

*(Até aqui cobrimos os fundamentos técnicos básicos. A partir da A15, vamos ir mais rápido, entrando em menos detalhe técnico mas abarcando mais tópicos.)*

---

#A15: [Z], Cap 5. Medidas de defecto semi clássicas. Aplicações em EDP. Eq. de onda amortecida.

#A16: [Z], Cap 6. Autovalores e autofunções. Lei de Weyl.

---

#A17: [Z], Cap 7. Estimativas na Eq. de Schrodinger. Regiões classicamente proibidas. Efeito tunel. Quasi-modos.

---

#A18: [Z], Cap 8. Cálculo simbólico avançado. Exponencial de operadores. Espaços de Sobolev. Wavefronts e micro-localidade.

#A19: [Z], Cap 9. Transformações de coordenadas e cálculo simbólico.

---

#A20: [Z], Cap 10. Operadores Fourier Integrais. Evolução de operadores e fórmulas integrais.

---

#A21: [Z], Cap 11. Relacionando dinâmica quântica e clássica. Teorema de Egorov. Quantização de simplectomorfismos.

#A22: [Z], Cap 14. Análise semi-clássico em variedades. Operadores pseudo-diferenciais. Comentários sobre [Guillemin-Sternberg]: Operadores Fourier Integrais em variedades. Seus wavefronts (relações Lagrangianas) e seus símbolos (half-densities). Alguns teoremas (traços de operadores).

---

A23-A28: elaboração do trabalho final (tópico a escolher), dúvidas, apresentações finais.

---

---

## Calendário

	seg	qua	
A1	September 5	September 7	
A2	September 12	September 14	A3
A4	September 19	September 21	A5
Aulas suspensas na ufrj	September 26	September 28	A6
A7	October 3	October 5	A8
A9	October 10	October 12	
A10	October 17	October 19	A11
A12	October 24	October 26	A13
A14	October 31	November 2	
<a href="#">A15</a>	November 7	November 9	A16
	November 14	November 16	A17
A18	November 21	November 23	A19
Jogo brasil	November 28	November 30	
Jogo brasil	December 5	December 7	A20
	December 12	December 14	
A21	December 19	December 21	A22
	December 26	December 28	
A23	January 2, 2023	January 4	A24
A25	January 9	January 11	A26
A27	January 16	January 18	A28