Cours de maths à l’usage du philosophe 14

Théorie du chaos

L’appellation *théorie du chaos* est typiquement post-moderne. Là où les mathématiciens du passé mettaient en avant la puissance simplificatrice et organisatrice de leurs théories, on préfère aujourd’hui faire la une des magazines avec un nom vendeur. Mais de quoi s’agit-il en réalité ? Est-ce à dire que la physique contemporaine serait obsolète au sens où ses prédictions seraient remises en question ? Cela signifie-t-il que tous les phénomènes sont chaotiques ? Et que signifie exactement ce terme de chaos en mathématiques ? L’étude des systèmes dynamiques (par exemple des systèmes différentiels) montre que certains d’entre eux sont “sensibles aux conditions initiales” : il est impossible de prévoir leur évolution à long terme. Pourtant, cela ne signifie pas qu’il faille renoncer à les étudier. On peut souvent leur attribuer des comportements qui, s'ils sont chaotiques, ne sont pas dépourvus d’un certain ordre. D’un point de vue philosophique, cette théorie est particulièrement intéressante parce qu’elle remet en question la position déterministe de Laplace et réhabilite dans un certain sens ce qu’Aristote appelait “cause formelle”.

Genèse

Une des principales avancées du calcul différentiel et intégral est la possibilité de prévoir l’avenir d’un phénomène à partir de la connaissance de son état présent et des équations différentielles qui traduisent son évolution. Henri Poincaré découvre au début du XXème siècle que certains systèmes dynamiques, bien qu’en théorie parfaitement déterministes, sont extrêmement sensibles aux incertitudes sur leurs conditions initiales. En d’autres termes, <u>l’imprécision consubstantielle à toute mesure effective de l’état actuel du système empêche toute prédiction au-delà d’un temps très court</u>. L’utilisation des simulations par ordinateurs permet aujourd’hui de visualiser ce phénomène, ce qui était très difficile à l’époque de Poincaré.

En mécanique des fluides, des techniques à base d’équations aux dérivées partielles remontant au XIXème siècle permettaient dans les cas les plus simples de calculer un écoulement régulier et laminaire, les faibles perturbations étant absorbées.

Pourtant, au-delà du certain seuil de turbulence, les perturbations rendent les prévisions impossibles. Le mathématicien Landau fait alors l’hypothèse d’une montée graduelle vers la complexité, où des fréquences multiples se superposent, mais dans une expérience de Swinney et Gollub, la séquence annoncée par Landau s’interrompit. Le courant sautait dans un état désordonné sans qu’on puisse y déceler le moindre cycle : plus de fréquences.
La compréhension de ce seuil est devenue alors devenue un des enjeux majeurs de la science.

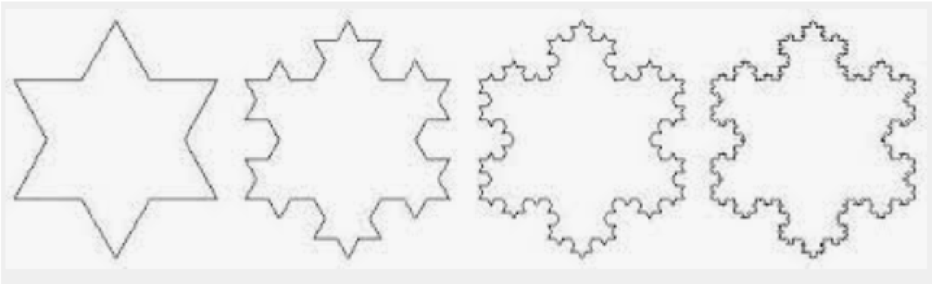
En faisant “tourner” des simulations numériques de systèmes chaotiques, on s’est rendu compte dans les années 1970 que “chaotique” ne signifie pas incompréhensible ou inaccessible à toute étude. David Ruelle, considérant l’espace comme un matériau malléable qu’il fallait contracter, étirer et plier, découvre dans l'espace des phases des **attracteurs étranges**, différents de ceux que les physiciens connaissaient déjà : les points fixes et les cycles limites.

Comment la stabilité pouvait-elle résulter d'un énorme spectre de fréquences possibles, comme un bruit blanc ? Cette orbite devait avoir une longueur infinie contenue dans une surface finie.

Des ensembles fractals

On avait découvert à la fin du XIXème siècle des surfaces extrêmement irrégulières, dont le contour est un ensemble **fractal**.

Par exemple, le flocon de Von Koch est construit itérativement en collant des petits triangles sur les côtés du flocon précédent :



La circonférence du flocon de Von Koch est infinie, alors qu'il délimite clairement une aire finie. Cet exemple montre qu'à partir de courbes très régulières (ici, des segments de droites), on peut, par passage à la limite, construire des courbes fractales.

Attracteur de Hénon (1976)

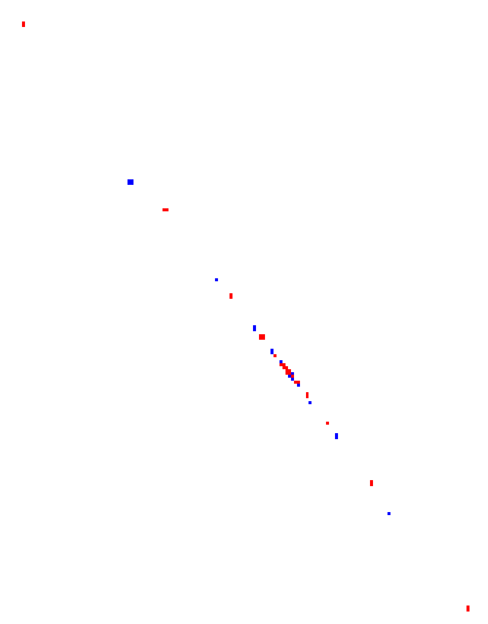
Derrière le chaos se cacherait donc un ordre, où les trajectoires du système sont attirées par des courbes, surfaces ou variétés de plus grande dimension qui ont souvent la caractéristique d'être des objets fractals. Là où la prévision semblait impossible, on peut donc encore trouver des choses à dire, des prévisions à faire. La **théorie du chaos** est donc plutôt la théorie de l'ordre caché dans le chaos apparent.

L'attracteur que nous allons présenter permit d'éclaircir ce phénomène parce qu'il était très simple. Il est dû à de Michel Hénon, astronome à l'observatoire de Nice. C'est un système discret en deux dimensions, une transformation du plan.

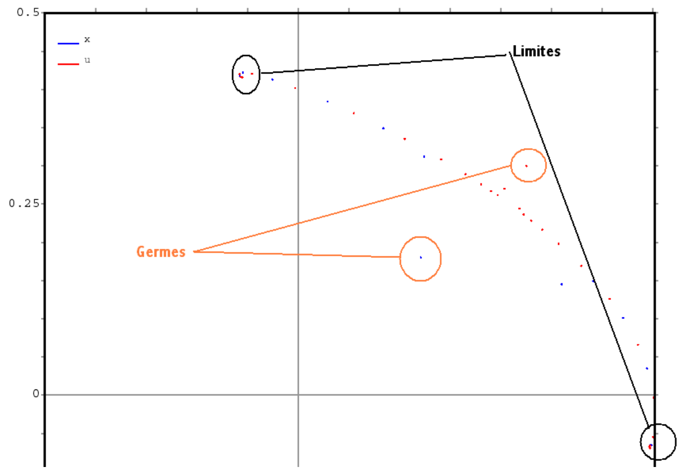
$$x_{n+1} = 1 + y_n - a{x_n}^2$$
$$y_{n+1} = bx_n$$

On peut calculer l'état du système à l'instant $n + 1$en connaissant son état à l'instant $n$en utilisant les équations ci-dessus. En l'itérant, on peut visualiser des trajectoires :

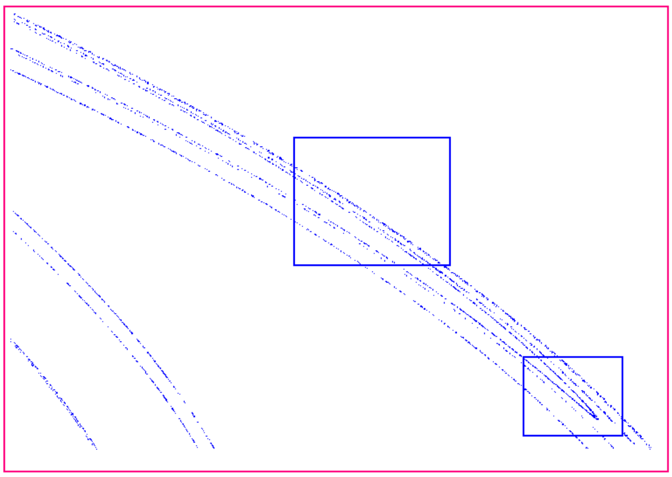
En fixant les paramètres a = 0,1 et b=1,3 , on observe que le système converge vers une limite (les points se concentrent)

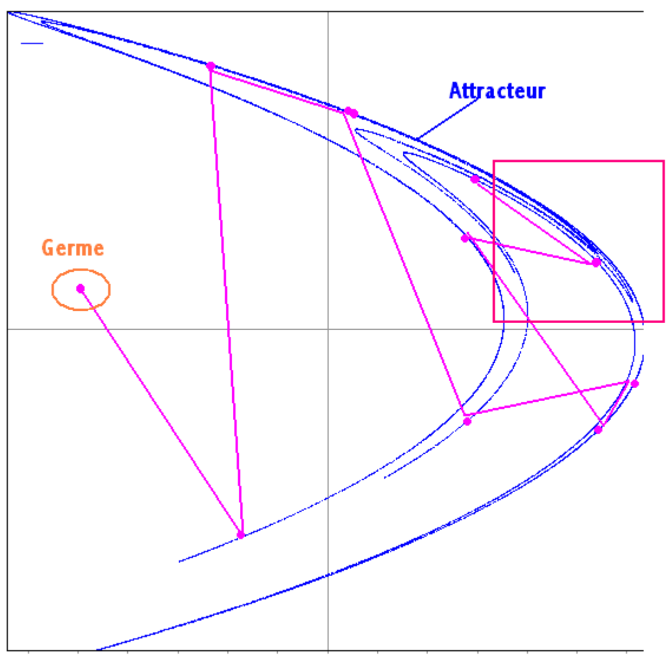


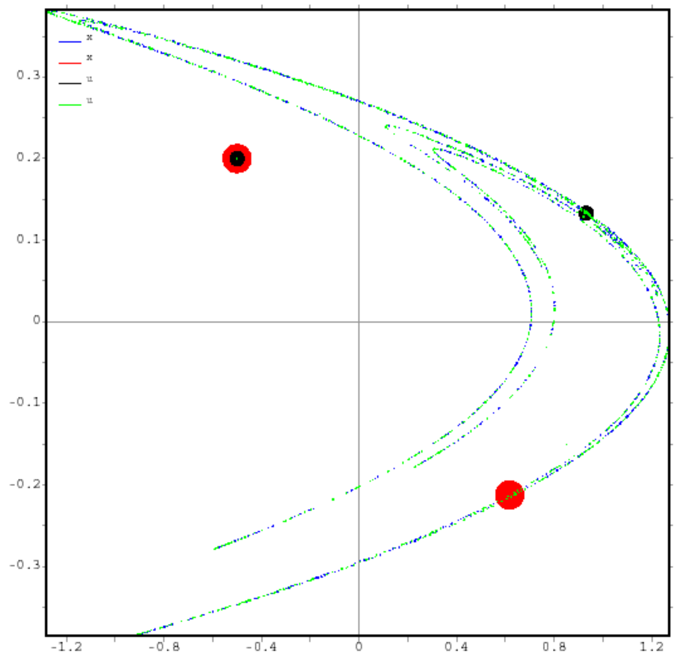
En fixant les paramètres a = 0,6 et b=1,3 , on observe que le système converge vers deux points



En fixant les paramètres a = 1 et b=1,3 , on observe que le système converge vers un attracteur étrange…





Après 1500 itérations, germes (-0,4999999999;0,2) et (-0,5;0,2)	

L'attracteur de Hénon est une courbe fractale dont certaines caractéristiques peuvent être prédites à partir des propriétés du système de départ. Il agit comme une *cause formelle*, au sens aristotélicien, là où le mécanisme classique, qui raisonne en termes de *cause efficiente*, échoue à prévoir quoi que ce soit.

Au confluent de la simulation informatique et de la géométrie

La théorie du chaos est donc aujourd'hui une discipline mathématique à part entière, où se croisent les domaines du calcul numérique informatique et de la topologie géométrique la plus abstraite. Ainsi, les équations utilisées en météorologie sont connues pour être très souvent génératrices de chaos. Dans certaines situations, on peut prévoir le temps qu'il fera une bonne semaine à l'avance, dans d'autres cas, il est très compliqué d'établir des prévisions fiables au-delà de quelques heures.

La simulation par ordinateur de l'évolution d'un système permet d'expérimenter sur de tels phénomènes, pour ensuite les expliquer mathématiquement. Beaucoup de choses restent donc à découvrir dans ce domaine qui était difficilement accessible sans moyens informatiques.