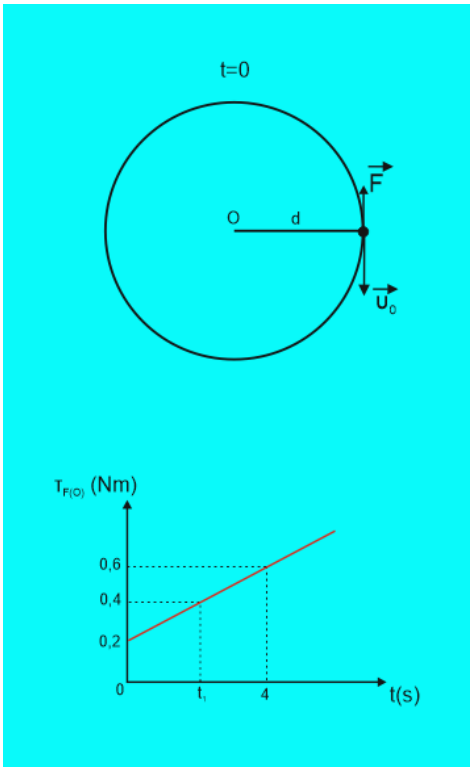
Ένα υλικό σημείο και η μεταβλητή ροπή

Ένα μικρό σώμα (υλικό σημείο) μάζας m = 1kg εκτελεί κυκλική κίνηση με ταχύτητα μέτρου $υ_0$ = 2m/s σε λείο οριζόντιο δάπεδο, δεμένο στο άκρο αβαρούς και μη εκτατού νήματος μήκους d = 0,5m, το άλλο άκρο του οποίου είναι ακλόνητα στερεωμένο σε σημείο Ο του δαπέδου. Τη χρονική στιγμή t = 0 το σώμα δέχεται δύναμη $\vec{F}$ αντίρροπη της ταχύτητάς του και συνεχώς εφαπτόμενη στην τροχιά του. Το μέτρο της ροπής της δύναμης ως προς το σημείο Ο μεταβάλλεται όπως φαίνεται στο διπλανό διάγραμμα, ενώ θετική φορά είναι η ωρολογιακή.



α. να σχεδιάσετε στο σχήμα τα διανύσματα της στροφορμής και της συνισταμένης ροπής που δέχεται το σώμα ως προς το σημείο Ο τη χρονική στιγμή t = 0

β. να υπολογίσετε τη χρονική στιγμή t_1 του διαγράμματος

γ. να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του σώματος ως προς το Ο και το μέτρο της ταχύτητάς του τη χρονική στιγμή t_1

δ. να υπολογίσετε:

i. το έργο της $\vec{F}$ από τη στιγμή t = 0 μέχρι τη στιγμή t_2 = 4s

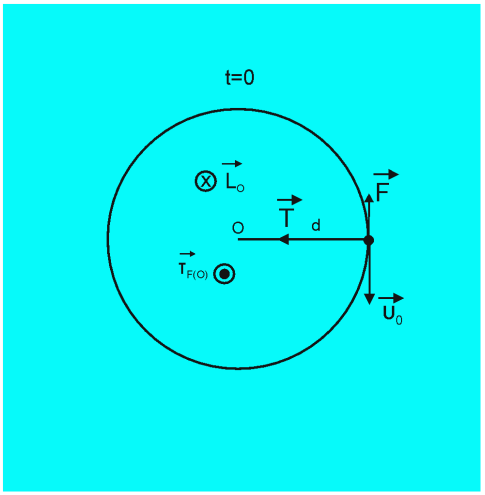
ii. την ισχύ της $\vec{F}$ τη χρονική στιγμή t_2 = 4s και

iii. την τάση του νήματος τη χρονική στιγμή t_2 = 4s

ε. να κατασκευάσετε ποιοτικό διάγραμμα της στροφορμής του σώματος ως προς το Ο σε συνάρτηση με το χρόνο από τη στιγμή t = 0 έως τη στιγμή t_1

Απάντηση

α. Με τον κανόνα του δεξιού χεριού βρίσκουμε ότι η στροφορμή του σώματος ως προς το σημείο Ο είναι κάθετη στο επίπεδο κίνησης και με κατεύθυνση από τον αναγνώστη προς τη σελίδα. Κατά τη διάρκεια της κίνησης στο σώμα ασκούνται το βάρος του $\vec{B}$, η δύναμη στήριξης $\vec{N}$ κάθετα στο επίπεδο, η τάση του νήματος $\vec{T}$ και η δύναμη $\vec{F}$, που είναι η μοναδική που έχει ροπή ως προς το Ο. Επομένως η συνισταμένη ροπή ως προς το Ο θα έχει φορά από τη σελίδα προς τον αναγνώστη.



Β. Με βάση το διάγραμμα το μέτρο της ροπής της $\vec{F}$ ως προς το Ο είναι της μορφής $\tau_{F(O)} = \alpha \cdot t + \beta$ (1)

Για t = 0 είναι $\tau_{F(O)}$ = 0,2 Nm, επομένως από (1) προκύπτει β = 0,2 Nm.

Για t = 4s είναι $\tau_{F(O)}$ = 0,6 Nm, επομένως από (1) προκύπτει α = 0,1 Nm/s.

Επομένως $\tau_{F(O)} = 0,2 + 0,1 \cdot t\,(S.I.)$ (2)

Τη χρονική στιγμή t_1 είναι $\tau_{F(O)}$ = 0,4 Nm, επομένως από τη σχέση (2) προκύπτει t_1 = 2s.

Γ. Είναι $\Sigma\vec{\tau}_{(O)} = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$. Τη χρονική στιγμή t_1 το μέτρο της συνισταμένης ροπής ως προς το Ο είναι ίσο με $\tau_{F(O)}$ = 0,4 Nm. Όμως η συνισταμένη ροπή είναι αντιωρολογιακή και έτσι τη στιγμή t_1 θα είναι $\frac{dL_O}{dt} = -0,4\,\frac{kg \cdot m^2}{s^2}$.

Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος ως προς το Ο από τη στιγμή t = 0 ως τη στιγμή t_1 θα έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό μεταξύ του διαγράμματος της ροπής της $\vec{F}$ και του άξονα των χρόνων. Λόγω θετικής φοράς όμως θα είναι αρνητική

$$\Delta L_O = -\frac{(0,4+0,2)\cdot 2}{2}\frac{kg\cdot m^2}{s} = -0,6\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

$$\Delta L_O = L_{O(t_1)} - L_{O(0)} \rightarrow L_{O(t_1)} = L_{O(0)} + \Delta L_O \rightarrow m\cdot \upsilon_1 \cdot d = m\cdot \upsilon_0 \cdot d + \Delta L_O \rightarrow$$
$$\rightarrow 0,5\cdot \upsilon_1 = 1 - 0,6 \rightarrow \upsilon_1 = 0,8\, m/s$$

δ.

i. Η μεταβολή της στροφορμής του σώματος ως προς το Ο από τη στιγμή t = 0 ως τη στιγμή t_2 = 4s θα έχει μέτρο ίσο με το εμβαδό μεταξύ του διαγράμματος της ροπής της $\vec{F}$ και του άξονα των χρόνων. Λόγω θετικής φοράς όμως θα είναι αρνητική

$$\Delta L_O = -\frac{(0,6+0,2)\cdot 4}{2}\frac{kg\cdot m^2}{s} = -1,6\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

$$\Delta L_O = L_{O(t_2)} - L_{O(0)} \rightarrow L_{O(t_2)} = L_{O(0)} + \Delta L_O \rightarrow L_{O(t_2)} = -0,6\frac{kg\cdot m^2}{s}$$

Αφού η τελική στροφορμή προέκυψε αρνητική, αυτό σημαίνει ότι το σώμα άλλαξε φορά κίνησης και για το μέτρο της ταχύτητάς του τη στιγμή t_2 θα είναι

$$\left|L_{O(t_2)}\right| = m\cdot \upsilon_2 \cdot d \rightarrow \upsilon_2 = 12\frac{m}{s}$$

Εφαρμόζουμε Θ.Μ.Κ.Ε. από τη στιγμή t = 0 μέχρι τη στιγμή t_2 = 4s

$$K_{\tau\varepsilon\lambda} - K_{\alpha\rho\chi} = \Sigma W \rightarrow W_F = \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_2^2 - \frac{1}{2}\cdot m\cdot \upsilon_0^2 \rightarrow W_F = 70\, J$$

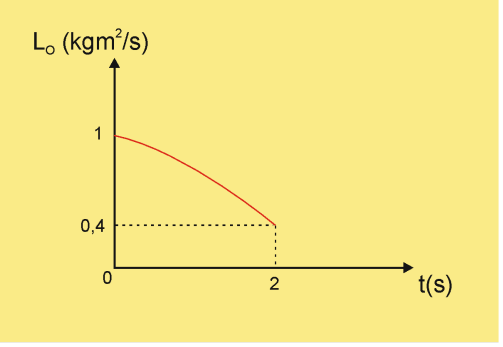
ii. Εφόσον το σώμα έχει αλλάξει φορά κίνησης τη χρονική στιγμή t_2 η $\vec{F}$ θα είναι ομόρροπη με την ταχύτητά του και έτσι η ισχύς της θα είναι

$$P_F = \left|\vec{F}\right|\cdot\left|\vec{\upsilon}_2\right|\cdot \sigma\upsilon\nu 0^0 \rightarrow P_F = \left|\frac{\vec{\tau}_{F(O)}}{d}\right|\cdot\left|\vec{\upsilon}_2\right|\cdot \sigma\upsilon\nu 0^0 \rightarrow P_F = 14,4\, W$$

iii. Για την τάση του νήματος τη στιγμή t_2 θα ισχύει

$$\Sigma\vec{F}_R = m\cdot\vec{\alpha}_\kappa \rightarrow T = m\cdot\frac{\upsilon_2^2}{d} \rightarrow T = 288\, N$$

ε. Το σώμα από τη στιγμή t = 0 έως τη στιγμή t_1 επιβραδύνεται. Επειδή το μέτρο της συνισταμένης ροπής που δέχεται αυξάνεται, θα αυξάνεται και το μέτρο του ρυθμού



μεταβολής της στροφορμής του ως προς το Ο, δηλαδή το σώμα θα επιβραδύνεται με αυξανόμενο ρυθμό. Όμως στο διάγραμμα στροφορμής - χρόνου η κλίση εκφράζει το ρυθμό μεταβολής της, επομένως το ζητούμενο διάγραμμα είναι το διπλανό.

Παπάζογλου Αποστόλης

apostolospapazoglou@gmail.com