

JHS 197 EUREF-FIN -koordinaattijärjestelmät, niihin liittyvät muunnokset ja karttalehtijako

Liite 2: Projektiokaavat

Versio: 1.0 / 5.2.2016

Julkaistu: 5.4.2016

Voimassaoloaika: toistaiseksi

Sisällys

1	Suomessa käytettävät ellipsoidit	2
1.1	Ellipsoidien parametrit	2
1.2	Kaavoissa esiintyvät ellipsoidin parametrien symbolit	2
1.3	Ellipsoidin parametrien laskentakaavat	2
2	Hyperboliset ja käänteiset hyperboliset funktiot	2
3	Poikittainen Mercator-projektio	3
3.1	Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät	3
3.2	Apusuureet	4
3.3	Projektiokaavat	4
3.4	Meridiaanikonvergenssi	6
3.5	Mittakaavakorjaus ja pituuskorjaus	6
3.6	Suuntakorjaus	6
4	Lambertin pinta-alatarkka projektio	7
4.1	Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät	7
4.2	Projektiokaavat	7
5	Lambertin konforminen karttioprojektio	9
5.1	Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät	9
5.2	Projektiokaavat	9

1 Suomessa käytettävät ellipsoidit

1.1 Ellipsoidien parametrit

Ellipsoidi	Isoakselin puolikas a	Pikkuakselin puolikas b	Käänteinen litistysuhde f^{-1}
Kansainvälinen 1924 (Hayford 1909)	6 378 388,0 m	6 356 911,946128 m	297,0
GRS80	6 378 137,0 m	6 356 752,314140 m	298,257222101
WGS84	6 378 137,0 m	6 356 752,314245 m	298,257223563

1.2 Kaavoissa esiintyvät ellipsoidin parametrien symbolit

Symboli	Määritelmä
a	= isoakselin puolikas
b	= pikkuakselin puolikas
f	= litistysuhde
n	= toinen litistysuhde
e^2	= ensimmäisen epäkeskisyyden neliö
e'^2	= toisen epäkeskisyyden neliö
A_1	= meridiaanin pituisen ympyrän säde

1.3 Ellipsoidin parametrien laskentakaavat

$$n = \frac{f}{2-f} = \frac{a-b}{a+b} \quad (01)$$

$$A_1 = \frac{a}{1+n} \left(1 + \frac{n^2}{4} + \frac{n^4}{64} \right) \quad (02)$$

$$e^2 = 2f - f^2 \quad (03)$$

$$e'^2 = \frac{e^2}{1-e^2} \quad (04)$$

2 Hyperboliset ja käänteiset hyperboliset funktiot

Hyperbolisten funktioiden kaavoissa e on Neperin luku. Kaikkialla muualla tässä liitteessä e on ellipsoidin ensimmäinen epäkeskisyyden neliö.

$$\sinh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

$$\cosh(x) = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

$$\tanh(x) = \frac{\sinh(x)}{\cosh(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arcsinh}(x) = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

$$\operatorname{arctanh}(x) = \frac{1}{2} \ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right)$$

$$\operatorname{sech}(x) = \frac{1}{\cosh(x)} = \frac{2}{e^x + e^{-x}}$$

$$\operatorname{arcsech}(x) = \ln\left(\frac{1 + \sqrt{1 - x^2}}{x}\right)$$

3 Poikittainen Mercator-projektio

Poikittaiselle Mercator-projektiolle on esitetty laskentakaavoja esimerkiksi seuraavissa lähteissä:

- Hirvonen, R. A., 1970. The Use of Subroutines in Geodetic Computations, *Maanmittaus*.
- Hirvonen, R. A., 1972. *Matemaattinen Geodesia*, Teknillisen korkeakoulun ylioppilaskunta, Helsinki.
- Hooijberg, M., 1997. *Practical Geodesy*, Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, ss. 81-84.
- Krüger, L., 1912. Konforme Abbildung des Erdellipsoids in der Ebene, *Veröffentlichung Königlich Preussischen Geodätischen Institutes*, Neue Folge N: 52:11-22, B. G. Teubner Verlag, Leipzig.
- König, R., ja K. H. Weise, 1951. *Mathematische Grundlagen der höheren Geodäsie und Kartographie*, Springer Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg.
- Meade, B. K., 1987. Program for Computing Universal Transverse Mercator (UTM) Coordinates for Latitudes North or South and Longitudes East or West, *Surveying and Mapping*, 47(1):37-49.
- Poder, K., ja K. Engsager, 1998. Some Conformal Mappings and Transformations for Geodesy and Topographic Cartography, *Publications 4 series, volume 6*, National Survey and Cadastre Denmark.

Seuraavaksi esitettävät kaavat ovat R. A. Hirvosen kirjasta *Matemaattinen Geodesia* ja *Maanmittaus*-lehden artikkelista. Kaavojen apusuureeseen h_2 liittyen, lähdeteoksessa Hirvonen, R. A. (1970) oleva virhe on korjattu tähän suositukseen.

3.1 Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät

Kaavoissa käytetään kulmayksikkönä radiaania.

Symboli	Määritelmä
k_0	= mittakaavakerroin keskimeridiaanilla
λ_0	= projektion keskimeridiaanin pituus
E_0	= itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (valeitä / väärä itä)
φ	= geodeettinen leveys
λ	= geodeettinen pituus
E	= projektion itäkoordinaatti
N	= projektion pohjoiskoordinaatti
γ	= meridiaanikonvergenssi
k	= mittakaavakerroin
A_1	= meridiaanin pituisen ympyrän säde
n	= toinen litistysuhde
t	= suuntakulma tasolla (suuntakorjauksen kaavassa $\delta = T - t$)
c	= napakaarevuussäde
M	= meridiaanikaarevuussäde
N	= poikittaiskaarevuussäde (kaavassa (42))

3.2 Apusuureet

$$V^2 = 1 + e'^2 \cos^2(\varphi) \quad (05)$$

$$h_1 = \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{37}{96}n^3 - \frac{1}{360}n^4 \quad (06)$$

$$h_2 = \frac{1}{48}n^2 + \frac{1}{15}n^3 - \frac{437}{1440}n^4$$

$$h_3 = \frac{17}{480}n^3 - \frac{37}{840}n^4$$

$$h_4 = \frac{4397}{161280}n^4$$

$$\begin{aligned}
 h'_1 &= \frac{1}{2}n - \frac{2}{3}n^2 + \frac{5}{16}n^3 + \frac{41}{180}n^4 \\
 h'_2 &= \frac{13}{48}n^2 - \frac{3}{5}n^3 + \frac{557}{1440}n^4 \\
 h'_3 &= \frac{61}{240}n^3 - \frac{103}{140}n^4 \\
 h'_4 &= \frac{49561}{161280}n^4
 \end{aligned} \tag{07}$$

3.3 Projektiokaavat

Geodeettisista koordinaateista (φ, λ) tasokoordinaateiksi (N, E)

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ)
Tulos: pisteen koordinaatit (N, E) projektiotasolla

$$Q' = \operatorname{arcsinh}(\tan(\varphi)) \tag{08}$$

$$Q'' = \operatorname{arctanh}(e \sin(\varphi)) \tag{09}$$

$$Q = Q' - eQ'' \tag{10}$$

$$l = \lambda - \lambda_0 \tag{11}$$

$$\beta = \operatorname{arctan}(\sinh(Q)) \tag{12}$$

$$\eta' = \operatorname{arctanh}(\cos(\beta)\sin(l)) \tag{13}$$

$$\xi' = \operatorname{arcsin}\left(\frac{\sin(\beta)}{\operatorname{sech}(\eta')}\right) \tag{14}$$

$$\xi_1 = h'_1 \sin(2\xi') \cosh(2\eta') \tag{15}$$

$$\xi_2 = h'_2 \sin(4\xi') \cosh(4\eta')$$

$$\xi_3 = h'_3 \sin(6\xi') \cosh(6\eta')$$

$$\xi_4 = h'_4 \sin(8\xi') \cosh(8\eta')$$

$$\eta_1 = h'_1 \cos(2\xi') \sinh(2\eta') \tag{16}$$

$$\eta_2 = h'_2 \cos(4\xi') \sinh(4\eta')$$

$$\eta_3 = h'_3 \cos(6\xi') \sinh(6\eta')$$

$$\eta_4 = h'_4 \cos(8\xi') \sinh(8\eta')$$

$$\xi = \xi' + \xi_1 + \xi_2 + \xi_3 + \xi_4 \tag{17}$$

$$\eta = \eta' + \eta_1 + \eta_2 + \eta_3 + \eta_4 \tag{18}$$

$$N = A_1 \xi k_0 \tag{19}$$

$$E = A_1 \eta k_0 + E_0 \tag{20}$$

Tasokoordinaateista (N, E) geodeettisiin koordinaatteihin (φ, λ)

Syöte: pisteen koordinaatit (N, E) projektiotasolla
Tulos: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ)

$$\xi = \frac{N}{A_1 k_0} \quad (21)$$

$$\eta = \frac{E - E_0}{A_1 k_0} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} \xi'_1 &= h_1 \sin(2\xi) \cosh(2\eta) \\ \xi'_2 &= h_2 \sin(4\xi) \cosh(4\eta) \\ \xi'_3 &= h_3 \sin(6\xi) \cosh(6\eta) \\ \xi'_4 &= h_4 \sin(8\xi) \cosh(8\eta) \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} \eta'_1 &= h_1 \cos(2\xi) \sinh(2\eta) \\ \eta'_2 &= h_2 \cos(4\xi) \sinh(4\eta) \\ \eta'_3 &= h_3 \cos(6\xi) \sinh(6\eta) \\ \eta'_4 &= h_4 \cos(8\xi) \sinh(8\eta) \end{aligned} \quad (24)$$

$$\xi' = \xi - \xi'_1 - \xi'_2 - \xi'_3 - \xi'_4 \quad (25)$$

$$\eta' = \eta - \eta'_1 - \eta'_2 - \eta'_3 - \eta'_4 \quad (26)$$

$$\beta = \arcsin(\operatorname{sech}(\eta') \sin(\xi')) \quad (27)$$

$$l = \arcsin\left(\frac{\tanh(\eta')}{\cos(\beta)}\right) \quad (28)$$

$$Q = \operatorname{arcsinh}(\tan(\beta)) \quad (29)$$

$$Q' = Q + e \operatorname{arctanh}(e \tanh(Q)) \quad (30)$$

$$Q' = Q + e \operatorname{arctanh}(e \tanh(Q')) \quad (31)$$

iterointi, kunnes muutos on ~ 0

$$\varphi = \arctan(\sinh(Q')) \quad (32)$$

$$\lambda = \lambda_0 + l \quad (33)$$

Käytännössä kaavassa (31) riittää kolme iteraatiokierrosta. Ensin kaavalla (29) laskettu Q sijoitetaan kaavaan (30), jolla saadaan Q' :n ensimmäinen likiarvo. Q' :n likiarvo sijoitetaan kaavaan (31), jota iteroidaan.

3.4 Meridiaanikonvergenssi

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ) , keskimeridiaani λ_0
Tulos: meridiaanikonvergenssikulma (γ)

$$\gamma = l \sin(\varphi) \left(1 + \frac{1}{3} V^2 (2V^2 - 1) \cos^2(\varphi) l^2 \right), \text{ missä } l = \lambda - \lambda_0 \quad (34)$$

3.5 Mittakaavakorjaus ja pituuskorjaus

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ) , keskimeridiaani λ_0
Tulos: mittakaavakerroin (k) pisteessä (φ, λ)

$$k = k_0 \left(1 + \frac{1}{2} \cos^2(\varphi) l^2 \right), \text{ missä } l = \lambda - \lambda_0 \quad (35)$$

Mittakaavakerroin muuttuu hitaasti ja sitä voidaan monissa tarkoituksissa pitää vakiona noin 10 km²:n suuruisella alueella. Pidemmällä etäisyyksillä mittakaavakerroin voidaan laskea kaavalla:

$$k = \frac{1}{6} (k_1 + 4k_m + k_2) \quad (36)$$

missä k_1 ja k_2 ovat mittakaavakertoimet linjan päissä ja k_m on mittakaavakerroin linjan puolessavälissä.

Maastomittauksissa voidaan käyttää kaavalla (35) määritettyä mittakaavakertoimen arvoa k , mikäli esimerkiksi takymetrissä tehdään muutkin etäisyysmittauksen reduktiot mittaushetkellä. Muuten ellipsoidin pinnalla tehty ja ellipsoidin kaareksi redukoitu etäisyys havainto korjataan projektiotasolle kertomalla se k :lla, joka saadaan joko kaavalla (36) tai tasokoordinaateista laskien kaavalla:

$$k = k_0 \left(1 + \frac{1}{6R^2} (E_1^2 + E_1 E_2 + E_2^2) \right) \quad (37)$$

3.6 Suuntakorjaus

Ellipsoidin pinnalla havaittu suunta korjataan tasolle suuntakorjauksella (Arc-to-chord Correction $\delta = T - t$). Suuntakorjaus δ lasketaan seuraavilla kaavoilla:

Syöte: kahden pisteen koordinaatit (N_1, E_1) ja (N_2, E_2)
Tulos: suuntakorjaus δ_{1-2} ja δ_{2-1}

$$\delta_{1-2} = \frac{1}{6R^2} (N_2 - N_1) (2E_1 + E_2) \quad (38)$$

$$\delta_{2-1} = \frac{1}{6R^2} (N_1 - N_2) (2E_2 + E_1) \quad (39)$$

Kaavoissa (37)-(39) käytettävistä itäkoordinaateista E_1 ja E_2 on vähennettävä valeitä eli itäkoordinaatin arvo keskimeridiaanilla (esimerkiksi 500 000 m ETRS-TM35FIN tapauksessa). R on keskikaarevuussäde, joka voidaan laskea kaavalla:

$$c = \frac{a^2}{b} \quad (40)$$

$$M = \frac{c}{V^3} \quad (41)$$

$$N = \frac{c}{V} \quad (42)$$

$$R = \sqrt{MN} \quad (43)$$

Suuntakulma (t) projektiotasolla, atsimuutti (α), konvergenssikulma (γ) ja suuntakorjaus (δ) riippuvat toisistaan seuraavan kaavan mukaisesti:

$$t = \alpha - \gamma - \delta \quad (44)$$

Kun piste on keskimeridiaanin itäpuolella, karttapohjoinen on itään napapohjoisesta ja meridiaanikonvergenssi on positiivinen. Pisteessä ollessa länteen keskimeridiaanista, karttapohjoinen on länteen napapohjoisesta ja meridiaanikonvergenssi on negatiivinen.

4 Lambertin pinta-alatarkka projektio

Alkuperäiset projektiokaavat on esitetty J. H. Lambertin teoksessa *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (1772). Seuraavaksi esitettävät kaavat ovat J. P. Snyderin kirjasta *Map Projections Used by the U.S. Geological Survey*, Geological Survey Bulletin 1532 (1982).

4.1 Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät

Kaavoissa käytetään kulmayksikkönä radiaania.

Symboli	Määritelmä
λ_0	= projektion luonnollisen origon pituus
φ_0	= projektion luonnollisen origon leveys
E_0	= itäkoordinaatin arvo luonnollisessa origossa (vareitā / vāārā itā)
N_0	= pohjoiskoordinaatin arvo luonnollisessa origossa (varepohjoinen / vāārā pohjoinen)
φ	= pisteen geodeettinen leveys
λ	= pisteen geodeettinen pituus
X	= pisteen itäkoordinaatti tasolla
Y	= pisteen pohjoiskoordinaatti tasolla

4.2 Projektiokaavat

Geodeettisista koordinaateista (φ, λ) tasokoordinaateiksi (X, Y)

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ)
Tulos: pisteen koordinaatit (X, Y) projektotasolla

$$m_0 = \frac{\cos(\varphi_0)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_0)}} \quad (45)$$

$$q = (1 - e^2) \left(\frac{\sin(\varphi)}{1 - e^2 \sin^2(\varphi)} - \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1 - e \sin(\varphi)}{1 + e \sin(\varphi)} \right) \right) \quad (46)$$

$$q_0 = (1 - e^2) \left(\frac{\sin(\varphi_0)}{1 - e^2 \sin^2(\varphi_0)} - \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1 - e \sin(\varphi_0)}{1 + e \sin(\varphi_0)} \right) \right) \quad (47)$$

$$q_{polar} = 1 - \frac{1 - e^2}{2e} \ln \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right) \quad (48)$$

$$\beta = \arcsin \left(\frac{q}{q_{polar}} \right) \quad (49)$$

$$\beta_0 = \arcsin \left(\frac{q_0}{q_{polar}} \right) \quad (50)$$

$$R_q = a \sqrt{\frac{q_{polar}}{2}} \quad (51)$$

$$B = R_q \sqrt{\frac{2}{1 + \sin(\beta_0) \sin(\beta) + \cos(\beta_0) \cos(\beta) \cos(\lambda - \lambda_0)}} \quad (52)$$

$$D = \frac{a m_0}{R_q \cos(\beta_0)} \quad (53)$$

$$X = BD \cos(\beta) \sin(\lambda - \lambda_0) + E_0 \quad (54)$$

$$Y = \frac{B}{D} (\cos(\beta_0) \sin(\beta) - \sin(\beta_0) \cos(\beta) \cos(\lambda - \lambda_0)) + N_0 \quad (55)$$

Tasokoordinaateista (X, Y) geodeettisiin koordinaatteihin (φ , λ)

Syöte: pisteen koordinaatit (X, Y) projektiotasolla
Tulos: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ , λ)

$$m_0 = \frac{\cos(\varphi_0)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_0)}} \quad (56)$$

$$q_0 = (1 - e^2) \left(\frac{\sin(\varphi_0)}{1 - e^2 \sin^2(\varphi_0)} - \frac{1}{2e} \ln \left(\frac{1 - e \sin(\varphi_0)}{1 + e \sin(\varphi_0)} \right) \right) \quad (57)$$

$$q_p = 1 - \frac{1 - e^2}{2e} \ln \left(\frac{1 - e}{1 + e} \right) \quad (58)$$

$$R_q = a \sqrt{\frac{q_p}{2}} \quad (59)$$

$$\beta_0 = \arcsin \left(\frac{q_0}{q_p} \right) \quad (60)$$

$$D = \frac{am_0}{R_q \cos(\beta_0)} \quad (61)$$

$$\rho = \sqrt{\left(\frac{X - E_0}{D} \right)^2 + (D(Y - N_0))^2} \quad (62)$$

$$C = 2 \arcsin \left(\frac{\rho}{2R_q} \right) \quad (63)$$

$$\beta = \arcsin \left(\cos(C) \sin(\beta_0) + \frac{D(Y - N_0) \sin(C) \cos(\beta_0)}{\rho} \right) \quad (64)$$

$$\varphi = \beta + \left(\frac{e^2}{3} + \frac{31e^4}{180} + \frac{517e^6}{5040} \right) \sin(2\beta) + \left(\frac{23e^4}{360} + \frac{251e^6}{3780} \right) \sin(4\beta) + \frac{761e^6}{45360} \sin(6\beta) \quad (65)$$

$$\lambda = \lambda_0 + \arctan \left(\frac{(X - E_0) \sin(C)}{D \rho \cos(\beta_0) \cos(C) - D^2 (Y - N_0) \sin(\beta_0) \sin(C)} \right) \quad (66)$$

5 Lambertin konforminen kartioprojektio

Alkuperäiset projektiokaavat on esitetty J. H. Lambertin teoksessa *Anmerkungen und Zusätze zur Entwerfung der Land- und Himmelscharten* (1772). Seuraavaksi esitettävät kaavat ovat J. P. Snyderin kirjasta *Map Projections – A Working Manual*. U.S. Geological Survey Professional Paper 1395 (1983). Kirjaa ei pidä sekoittaa vuotta aikaisemmin ilmestyneeseen J. P. Snyderin kirjaan *Map Projections Used by the U.S. Geological Survey*, Geological Survey Bulletin 1532 (1982), koska jälkimmäisessä kaavojen apusuure ρ on annettu väärin.

5.1 Kaavoissa esiintyvät symbolit ja niiden määritelmät

Kaavoissa käytetään kulmayksikkönä radiaania.

Symboli	Määritelmä
λ_0	= projektion väärän origon pituus
φ_0	= projektion väärän origon leveys
φ_1	= projektion 1. standardiparalleelin leveys
φ_2	= projektion 2. standardiparalleelin leveys
E_0	= itäkoordinaatin arvo väärässä origossa
N_0	= pohjoiskoordinaatin arvo väärässä origossa
φ	= pisteen geodeettinen leveys
λ	= pisteen geodeettinen pituus
E	= pisteen itäkoordinaatti tasolla
N	= pisteen pohjoiskoordinaatti tasolla

5.2 Projektiokaavat

Geodeettisista koordinaateista (φ, λ) tasokoordinaateiksi (N, E)

Syöte: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ)
Tulos: pisteen koordinaatit (N, E) projektioitasolla

$$t_i = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1 - e \sin(\varphi_i)}{1 + e \sin(\varphi_i)}\right)^e}}, \text{ missä } i = 0, 1, 2 \text{ tai } [] \quad (67)$$

$$m_i = \frac{\cos(\varphi_i)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_i)}}, \text{ missä } i = 1, 2 \text{ tai } [] \quad (68)$$

$$n = \frac{\ln(m_1) - \ln(m_2)}{\ln(t_1) - \ln(t_2)} \quad (69)$$

$$F = \frac{m_1}{nt_1^n} \quad (70)$$

$$\rho_0 = aFt_0^n \quad (71)$$

$$\rho = aFt^n \quad (72)$$

$$\theta = n(\lambda - \lambda_0) \quad (73)$$

$$N = \rho_0 - \rho \cos(\theta) + N_0 \quad (74)$$

$$E = \rho \sin(\theta) + E_0 \quad (75)$$

Tasokoordinaateista (N, E) geodeettisiin koordinaatteihin (φ, λ)

Syöte: pisteen koordinaatit (N, E) projektiotasolla
Tulos: pisteen geodeettiset koordinaatit (φ, λ)

$$t_i = \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\varphi_i}{2}\right)}{\sqrt{\left(\frac{1 - e \sin(\varphi_i)}{1 + e \sin(\varphi_i)}\right)^e}}, \text{ missä } i = 0, 1, 2 \text{ tai } [] \quad (76)$$

$$m_i = \frac{\cos(\varphi_i)}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2(\varphi_i)}}, \text{ missä } i = 1, 2 \text{ tai } [] \quad (77)$$

$$n = \frac{\ln(m_1) - \ln(m_2)}{\ln(t_1) - \ln(t_2)} \quad (78)$$

$$F = \frac{m_1}{nt_1^n} \quad (79)$$

$$\rho_0 = aFt_0^n \quad (80)$$

$$\rho = \text{sgn}(n) \sqrt{(E - E_0)^2 + (\rho_0 - (N - N_0))^2} \quad (81)$$

$$\theta = \arctan\left(\frac{E - E_0}{\rho_0 - (N - N_0)}\right) \quad (82)$$

$$t = \left(\frac{\rho}{aF}\right)^{\frac{1}{n}} \quad (83)$$

$$\varphi_{\text{Iter}(1)} = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan(t) \quad (84)$$

$$\varphi_{\text{Iter}(N)} = \frac{\pi}{2} - 2 \arctan\left(t \left(\sqrt{\frac{1 - e \sin(\varphi_{\text{Iter}(N-1)})}{1 + e \sin(\varphi_{\text{Iter}(N-1)})}}\right)^e\right) \quad (85)$$

$$\lambda = \frac{\theta}{n} + \lambda_0 \quad (86)$$

Kaava 84 vaatii iteroinnin, kunnes muutos on riittävän pieni. Funktio sgn() kaavassa 80 palauttaa sen attribuuttina olevan muuttujan etumerkin.