

Лекція 3

Тема 1.1.2: Плоска система сил.

План лекції

- 1 Система збіжних сил.
2. Геометричний та аналітичний способи визначення рівнодійної системи збіжних сил.
3. Геометрична та аналітична умови рівноваги плоскої системи збіжних сил.
4. Раціональний вибір координатних осей

<https://www.rafk.if.ua/ebook/mech/Dokument/Lekzia/1%20%D1%80%D0%BE%D0%B7%D0%B4%D1%96%D0%BB/1.2.htm>

https://docs.google.com/presentation/d/1TEaxVjbCJFeazn-u3t2Is3tg5S0jYKws/edit?usp=share_link&ouid=103912148940254308897&rtpof=true&sd=true

Зміст лекції

. 1 Система збіжних сил.

2. Геометричний спосіб визначення рівнодійної плоскої системи збіжних сил

Систему сил, лінії дії яких лежать в одній площині і перетинаються в одній точці, називають плоскою системою збіжних сил

Теорема. Плоска система збіжних сил у загальному випадку еквівалентна рівнодійній, яка дорівнює векторній сумі цих сил; лінія дії рівнодійної проходить через точку перетину ліній дії складових.

Нехай дано плоску систему трьох сил P_1, P_2, P_3 , лінії дії яких сходяться у точці A . За висновками з аксіом III і IV перенесемо ці сили вздовж ліній їх дії у точку A . Додавши сили P_1 і P_2 за правилом паралелограма, знайдемо їх рівнодійну R_1 , (рис. 2.1, а):

$$R_1 = P_1 + P_2$$

Застосовуючи ту саму аксіому паралелограма, додамо рівнодійну R_1 і силу P_3 :

$$R = R_1 + P_3 = P_1 + P_2 + P_3,$$

де R — рівнодійна даної системи трьох сил.

Такі самі міркування можна застосувати де будь-якої кількості збіжних сил, тоді

$$R = P_1 + P_2 + \dots + P_n$$

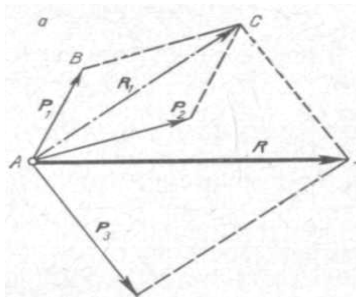


Рис. 2.1,а

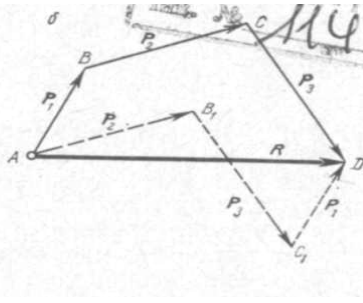


Рис.2.1,б

Скорочено це можна записати так:

$$R = \sum P_i$$

де i — усі цілі числа від 1 до n , а грецька велика літера $\sum$ (сигма) означає суму.

Очевидно, що побудову, як на рис. 2.1 а, можна замінити простішою, зображеною на рис. 2.1, б. Багатокутник $ABCD$ називають *силовим багатокутником*. Сторону AD , яка сполучає початок першого з кінцем останнього вектора, називають *замикаючою стороною*. Треба пам'ятати, що стрілки векторів складових сил утворюють певний напрям обходу за контуром силового багатокутника, а *замикаюча сторона*, що визначає модуль і напрям рівнодіючої, має стрілку, напрямлену проти напрямку обходу (рис. 2.1, б).

Якщо рівнодіючу знаходять, застосовуючи геометрію і тригонометрію, то такий спосіб називають *геометричним*. Якщо у певному масштабі накреслити силовий багатокутник, то рівнодіючу можна визначити, вимірявши *замикаючу сторону* і помноживши її величину на масштаб. Такий спосіб знаходження рівнодіючої називають *графічним*. Порядок додавання векторів за допомогою силового багатокутника на величину рівнодіючої не впливає, бо векторна сума від зміни місць доданків не змінюється (рис. 2.1, б, багатокутник AB_1C_1D).

3. Геометрична та аналітична умови рівноваги плоскої системи збіжних сил

Геометрична умова рівноваги плоскої системи збіжних сил

Під час побудови силового багатокутника можливі випадки, коли кінець останнього вектора збігається з початком першого. Тоді *замикаючої сторони* не буде, і такий багатокутник називають *замкненим*.

Очевидно, що рівнодійна R системи збіжних сил, які утворюють замкнений силовий багатокутник, дорівнює нулю і, отже, ця система еквівалентна нулю, тобто перебуває у рівновазі.

Звідси випливає умова, за якої плоска система збіжних сил перебуватиме у рівновазі. Ця умова записується:

$$\mathbf{R} = \mathbf{P}_1 + \mathbf{P}_2 + \dots + \mathbf{P}_n = \sum \mathbf{P}_i = 0$$

і формулюється так:

..для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб силовий многокутник був замкнений.

Умови рівноваги, записані у вигляді рівностей, які мають невідомі величини, називають **рівняннями рівноваги**.

Застосовуючи геометричну умову рівноваги, зручно розв'язувати задачі, в яких на тіло діють три сили, бо тоді силовий багатокутник є трикутником.

Розв'язання більшості задач статки має три етапи:

- 1) вибирають тіло, рівновага якого розглядатиметься;
- 2) відкидають зв'язки, замінюючи їх реакціями, і встановлюють, яка система сил діє на тіло;
- 3) з умов рівноваги знаходять невідомі величини.

Розв'язуючи задачі технічної механіки, треба суворо дотримуватися правила про те, що *розмірності й одиниці вимірювання всіх доданків і обох частин рівності мають бути однакові*.

Користуючись цим правилом, у сумнівних випадках доцільно перевіряти правильність ходу розв'язування задач. Для цього в доданки рівності потрібно поставити одиниці вимірювання всіх величин, що входять до нього, і, зробивши можливі скорочення, порівняти добути одиниці вимірювання правої і лівої частин

Проекції сили на осі координат

Коли на тіло діє більше, ніж три сили, і невідомі напрями деяких сил, під час розв'язування задач зручно користуватися не геометричною, а аналітичною умовою рівноваги, яка ґрунтується на м е т о д і проекцій.

Проекцією сили на вісь називають відрізок осі, що лежить між двома перпендикулярами, опущеними на вісь з початку і кінця вектора сили.

Нехай дані координати осі x , y , сила $\mathbf{F}$, прикладена в точці A і розміщена в площині координатних осей (рис. 2.3). Проекціями сили $\mathbf{F}$ на осі будуть відрізки ab і $a'b'$. Позначимо ці проекції відповідно F_x і F_y

Проекція сили на вісь — це величина алгебраїчна, яка може бути додатною або від'ємною, залежно від напрямку проекції.

За напрям проекції візьмемо напрям від проекції початку до проекції кінця вектора сили.

Встановимо таке правило знаків:

якщо напрям проекції сили на вісь збігається з додатним напрямом осі, то ця проекція вважається додатною, і навпаки.

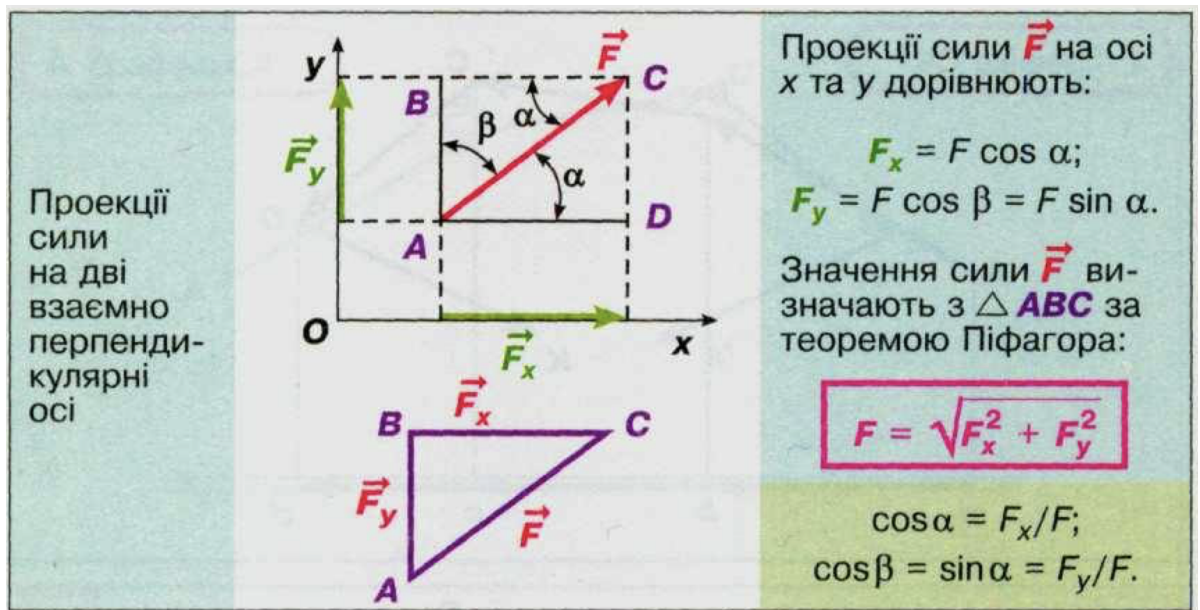
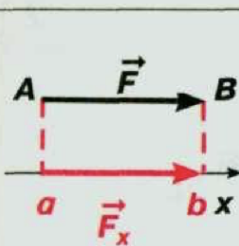
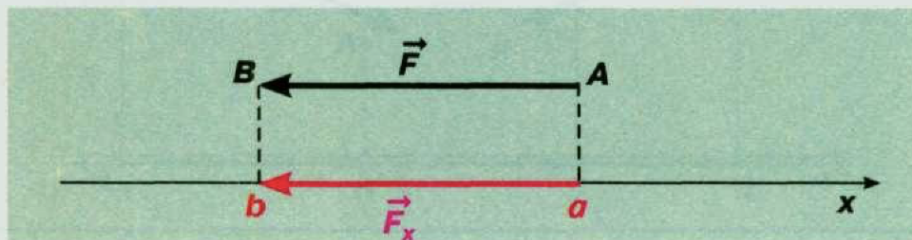
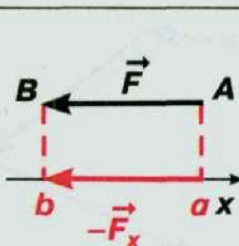


Рис 2.3

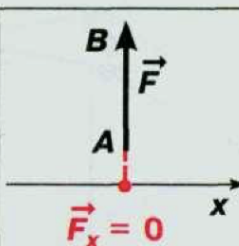
Величина відрізка ab , взята зі знаком «+» або «-», називається проекцією сили $\vec{F}$ на вісь x і позначається $\vec{F}_x$.



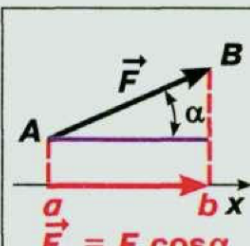
Проекцію вважають додатною, якщо напрями проекції та осі збігаються.



Проекцію вважають від'ємною, якщо напрями проекції протилежний напрями осі.



Проекція сили на вісь перетворюється на нуль тільки тоді, коли ця сила перпендикулярна до цієї осі.



Проекція сили на будь-яку вісь дорівнює добутку значення цієї сили на косинус кута між напрями сили й осі.

Знаючи дві проекції F_x і F_y , з трикутника ABC визначаємо модуль і напрям вектора сили F за формулами:

модуль сили:

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2}$$

напрямний тангенс кута між вектором сили F і віссю x

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{F_y}{F_x}$$

Зазначимо, що силу F можна подати як рівнодіючу двох складових сил F_x і F_y , паралельних осям координат (рис. 2.3).

Складові F_x і F_y і проекції F_x і F_y принципово відмінні одна від одної, оскільки складова — величина векторна, а проекція — величина алгебраїчна; але проекції сили на дві взаємно перпендикулярні осі x і y і модулі складових тієї самої сили відповідно чисельно однакові, коли сила розкладається у двох взаємно перпендикулярних напрямках, що паралельні осям x і y .

Аналітичний спосіб визначення рівнодіючої плоскої системи збіжних сил

Нехай дано плоску систему n збіжних сил

$$(F_1, F_2, \dots, F_n).$$

Рівнодіюча цієї системи

$$R = \sum F_i$$

У площині дії цієї системи візьмемо вісь координат і спроекуємо дані сили і їх рівнодіючу на цю вісь. З математики відома властивість проекції векторної суми, на підставі якої можна твердити, що проекція рівнодіючої на вісь дорівнює алгебраїчній сумі проекцій складових сил на ту саму вісь, тобто

$$R_x = \sum F_{ix}$$

Праву частину цієї рівності записуватимемо спрощено, а саме:

$$R_x = \sum X$$

Щоб визначити рівнодіючу будь-якої плоскої системи збіжних сил, спроекуємо їх на осі координат x і y , алгебраїчно додамо проекції усіх сил і тоді знайдемо проекції рівнодіючої

$$R_x = \sum X \quad R_y = \sum Y.$$

Знаючи проекції, визначимо модуль і напрям рівнодіючої:

$$\text{модуль рівнодіючої} \quad R = \sqrt{R_x^2 + R_y^2}$$

напрямний тангенс кута між вектором $\mathbf{R}$ і віссю x $tg(R, x) = \frac{R_y}{R_x}$

Лінія дії рівнодіючої проходить через точку перетину ліній дії складових сил

Аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил

Якщо дана плоска система збіжних сил перебуває у рівновазі, то рівнодіюча $\mathbf{R}$ такої системи, а отже, і проекції рівнодіючої на осі координат дорівнюють нулю:

$$R=0, R_x=0, R_y=0.$$

Враховуючи, що

$$R_x=\sum X, R_y=\sum Y,$$

знаходимо рівності, що виражають аналітичні умови рівноваги плоскої системи збіжних сил:

$$\sum X=0, \sum Y=0$$

. Формулюються ці умови так:

для рівноваги плоскої системи збіжних сил необхідно і достатньо, щоб алгебраїчна сума проекцій цих сил на кожну з двох координатних осей дорівнювала нулю.

4. Раціональний вибір координатних осей

За допомогою рівнянь рівноваги можна визначити два невідомі елементи даної системи сил, наприклад модуль і напрям однієї сили або модулі двох сил, напрями яких відомі і т. д. Виведені умови рівноваги дійсні для будь-яких осей координат, але для спрощення розв'язування задач осі координат доцільно вибирати по можливості перпендикулярними до невідомих сил, щоб кожне рівняння рівноваги мало одну невідому.

Коли напрям шуканої сили відомий, то її можна розкласти на дві складові за заданими напрямками, звичайно за напрямками координатних осей; за знайденими двома взаємно перпендикулярними складовими легко визначити невідому силу. Якщо під час аналітичного розв'язування задач шукана реакція виявиться від'ємною, то це означає, що дійсний її напрям протилежний до напрямку, взятого на рисунку.