



## Chapitre 10 Vecteurs, droites et plans de l'espace

### I. Positions relatives de droites et de plans

#### 1. Position relative de deux droites

##### Propriété

Deux droites de l'espace sont soit **coplanaires** (dans un même plan) soit **non coplanaires**.

| Droites coplanaires |                                |                    | Droites non coplanaires |
|---------------------|--------------------------------|--------------------|-------------------------|
| Droites sécantes    | Droites parallèles             |                    |                         |
|                     | Droites strictement parallèles | Droites confondues |                         |
|                     |                                |                    |                         |

##### Remarque

Deux droites sont **orthogonales** si leurs directions sont perpendiculaires.

##### Exemple

On considère le parallélépipède ci-contre.

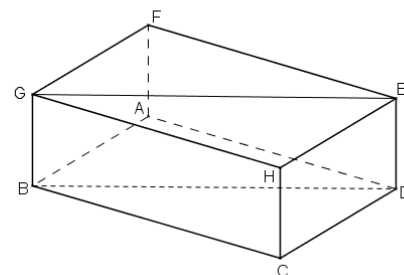
Les droites (BG) et (BA) appartiennent au plan (ABG) et sont sécantes en B.

Les droites (GE) et (BD) appartiennent au plan (DEG) et sont parallèles.

Les droites (FA) et (CD) sont non coplanaires.

Les droites (GE) et (EH) sont coplanaires.

Les droites (BG) et (EF) sont orthogonales.



#### 2. Position relative de deux plans

##### Propriété

Deux plans de l'espace sont soit **sécants** soit **parallèles**.

| Plans parallèles             |                 | Plans sécants                             |
|------------------------------|-----------------|-------------------------------------------|
| Plans strictement parallèles | Plans confondus | Les plans sont sécants suivant une droite |
|                              |                 |                                           |

##### Exemple

On considère le parallélépipède ci-dessus.

Les plans (AFE) et (BCH) sont parallèles.

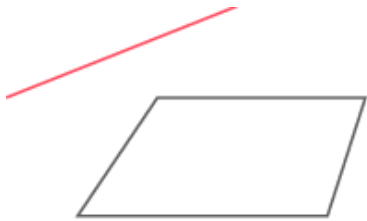
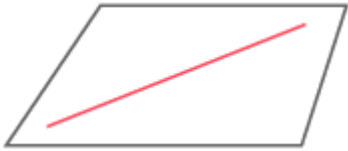
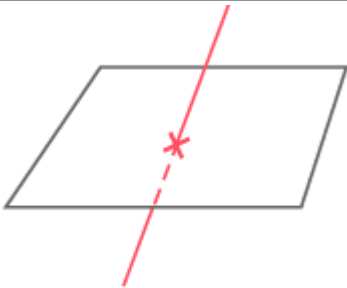
Les plans (BCD) et (ABD) sont confondus.

Les plans (GBE) et (GBF) sont sécants suivant la droite (GB).

### 3. Position relative d'une droite et d'un plan

#### Propriété

Une droite et un plan de l'espace sont soit sécants soit parallèles.

| Droite et plan parallèles                                                                                                         |                                                                                                                         | Droite et plan sécants                                                              |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Droite et plan strictement parallèles</b><br> | <b>Droite incluse dans le plan</b><br> |  |

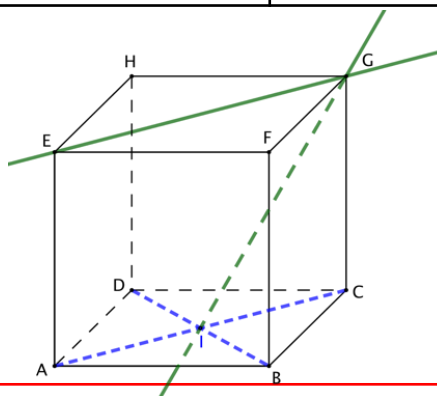
#### Exemple

ABCDEFGH est un cube.

La droite (GI) et le plan (ABC) sont sécants en I.

La droite (EG) est incluse dans le plan (EFG).

La droite (EG) et le plan (ABC) sont parallèles.



## II. Droites et plans parallèles

### 1. Droites parallèles à un plan

#### Propriété

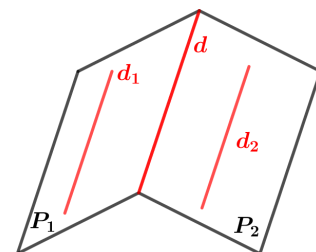
Si une droite est parallèle à une droite d'un plan, alors elle est parallèle à ce plan.

#### Théorème du « toit »

Si deux droites  $d_1$  et  $d_2$  sont parallèles telles que

- Un plan  $P_1$  contienne la droite  $d_1$
- Un plan  $P_2$  contienne la droite  $d_2$
- Les plans  $P_1$  et  $P_2$  sont sécants suivant une droite  $d$

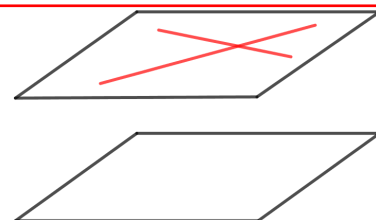
alors  $d$  est parallèle aux droites  $d_1$  et  $d_2$ .



### 2. Plans parallèles

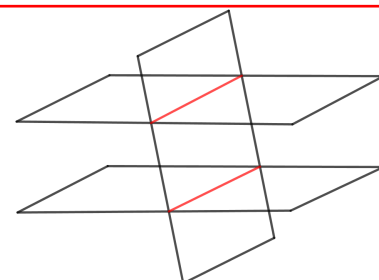
#### Propriété

Si un plan contient deux droites sécantes et parallèles à un autre plan, alors les deux plans sont parallèles.



#### Théorème des plans parallèles

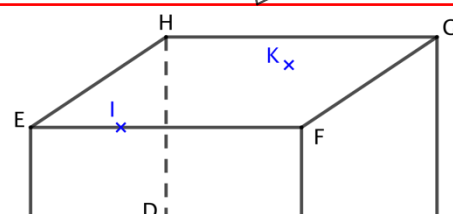
Si deux plans sont parallèles, tout plan qui coupe l'un coupe l'autre et leurs intersections sont deux droites parallèles.



#### Méthode

Construire la section d'un solide par un plan

 Vidéo <https://youtu.be/vgXcf3M0f9w>



ABCDEFGH est un pavé droit.

I est un point de l'arête [EF], J est un point de l'arête [AB] et K est un point de la face EFGH.

Construire la section du pavé par le plan (IJK).

### Solution

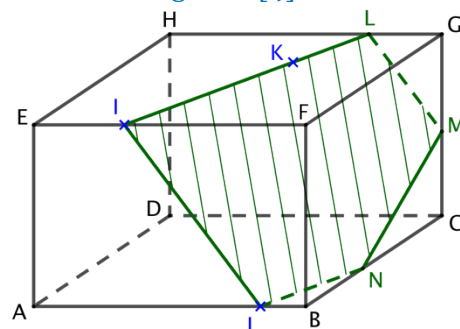
Le plan (IJK) coupe la face ABFE suivant la droite (IJ). On commence donc par tracer le segment [IJ].

Le plan (IJK) coupe la face EFGH suivant la droite (IK). Soit L le point d'intersection de la droite (IK) avec l'arête [HG]. On trace le segment [IL]. D'après le théorème des plans parallèles 2, les faces ABFE et DCGH étant parallèles, le plan (IJK) coupe la face DCGH suivant une droite parallèle à (IJ).

Le plan (IJK) coupe donc la face DCGH suivant la droite parallèle à (IJ) et passant par L. On trace cette droite qui coupe l'arête [CG] en M.

On justifie de même que le plan (IJK) coupe la face ABCD suivant la droite parallèle à (IK) passant par J. On trace cette droite qui coupe l'arête [BC] en N.

Pour finir la section, on trace le segment [MN].



### Méthode

Appliquer le théorème du toit

 Vidéo <https://youtu.be/TG-bVLDmAX4>

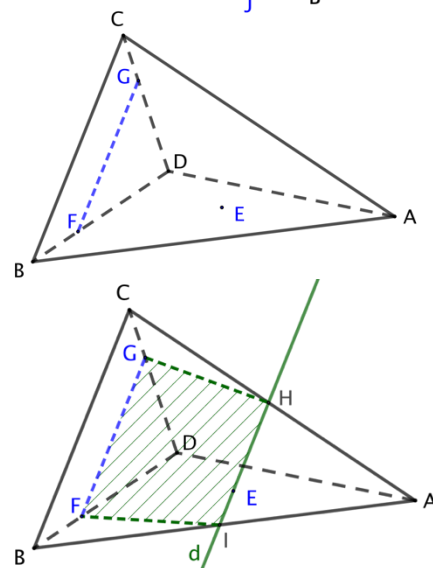
ABCD est une pyramide. La droite (FG) est parallèle à l'arête (BC). E est un point du plan (ABC). Construire l'intersection du plan (EFG) avec la pyramide.

### Solution

(BC) est une droite du plan (ABC) et (FG) est une droite du plan (EFG).

Les droites (FG) et (BC) étant parallèles, on peut appliquer le théorème du toit pour en déduire que les plans (ABC) et (EFG) se coupent suivant une droite  $d$  passant par E et parallèle à (FG) et (BC). Cette droite coupe [AC] en H et [AB] en I.

Il suffit enfin de tracer le quadrilatère FGHI : intersection du plan (EFG) avec la pyramide.



## III. Caractérisation vectorielle d'un plan

### 1. Notion de vecteur dans l'espace

#### Définition

Un **vecteur de l'espace** est défini par une direction de l'espace, un sens et une norme (longueur).

### Remarque

Les vecteurs de l'espace suivent les mêmes règles de construction qu'en géométrie plane : relation de Chasles, propriétés en rapport avec la colinéarité... restent valides.

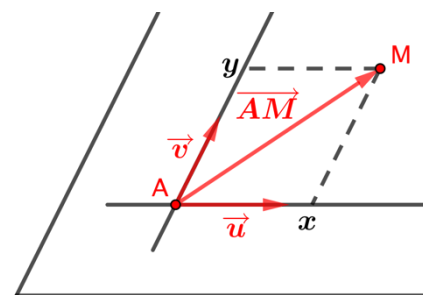
### 2. Plan de l'espace

#### Propriété

Soit un point A et deux vecteurs de l'espace  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  non colinéaires. L'ensemble des points M de l'espace tels que  $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  où  $x, y \in \mathbb{R}$  est le **plan passant par A et dirigé par  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$** .

### Remarque

Dans ces conditions, le triplet  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère du plan.



### Démonstration

- Soit deux points B et C tel que  $\vec{u} = \vec{AB}$  et  $\vec{v} = \vec{AC}$

$\vec{u}$  et  $\vec{v}$  ne sont pas colinéaires donc  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère du plan  $(ABC)$ . Dans ce repère, tout point M de coordonnées  $(x; y)$  est tel que  $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$

▪ Réciproquement, soit M un point de l'espace tel que  $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$   
Soit N le point du plan  $(ABC)$  de coordonnées  $(x; y)$  dans le repère  $(A, \vec{u}, \vec{v})$ .

$$\vec{AN} = x\vec{u} + y\vec{v} \Rightarrow \vec{AN} = \vec{AM}$$

M et N sont donc confondus et M appartient au plan  $(ABC)$ .

### Remarque

Un plan est donc totalement déterminé par un point et deux vecteurs non colinéaires.

### Propriété

Deux plans déterminés par le même couple de vecteurs non colinéaires sont parallèles.

### Démonstration

Soit deux plans  $P$  et  $P'$  de repères respectifs  $(A, \vec{u}, \vec{v})$  et  $(B, \vec{u}, \vec{v})$ .

- Si  $P$  et  $P'$  sont confondus, la démonstration est triviale.
- Dans la suite  $P$  et  $P'$  ne sont pas confondus. Supposons que  $P$  et  $P'$  possèdent un point M en commun.

$M \in P$  donc  $\vec{AM} = x\vec{u} + y\vec{v}$  où  $(x; y)$  sont les coordonnées de M dans  $P$ .

$M \in P'$  donc  $\vec{BM} = x'\vec{u} + y'\vec{v}$  où  $(x'; y')$  sont les coordonnées de M dans  $P'$ .

Donc  $\vec{AB} = \vec{AM} - \vec{BM} = (x - x')\vec{u} + (y - y')\vec{v}$  donc B appartient à  $P$ .

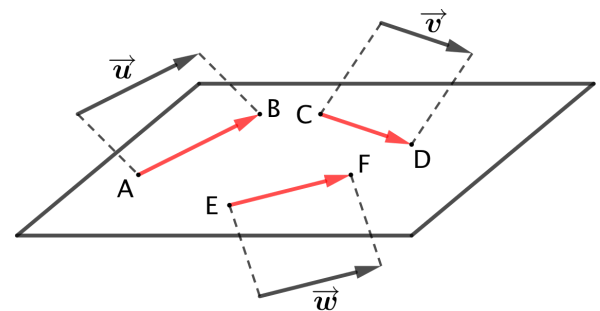
Donc le repère  $(B, \vec{u}, \vec{v})$  est un repère de  $P$  et donc  $P$  et  $P'$  sont confondus ce qui est contraire à l'hypothèse de départ.  $P$  et  $P'$  n'ont donc aucun point en commun et sont donc parallèles.

## IV. Vecteurs coplanaires et repère de l'espace

### 1. Vecteurs coplanaires

#### Définition

Trois vecteurs sont **coplanaires** s'ils possèdent des représentants appartenant à un même plan.



### Remarques

- Deux vecteurs sont nécessairement coplanaires. Donc, si l'un des vecteurs est nul, les trois vecteurs sont nécessairement coplanaires.
- Soient  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  des vecteurs. S'il existe des réels  $x$  et  $y$  tels que

$$\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w}$$

Alors  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont des vecteurs coplanaires.

### Propriété

Trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont non coplanaires si et seulement si

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$$

### Démonstration

#### Sens direct

Supposons  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  non coplanaires. Raisonnons par l'absurde et supposons par exemple que  $a \neq 0$  et

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{u} = -\frac{b}{a}\vec{v} - \frac{c}{a}\vec{w}$$

On en déduit que  $\vec{u}$  possèdent un représentant dans le plan vectoriel  $(\vec{v}; \vec{w})$ , ce qui contredit le fait que les vecteurs soient non coplanaires. Donc l'hypothèse de départ est fausse donc  $a = 0$ . En permutant les vecteurs, on montre de même que  $b = c = 0$ .

#### Sens indirect

Supposons que

$$\forall a, b, c \in \mathbb{R}, a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Rightarrow a = b = c = 0$$

Raisonnons par l'absurde et supposons  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  coplanaires. Les vecteurs sont non nuls. En effet, si  $\vec{u} = \vec{0}$  par exemple

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

En posant  $a = 3$  et  $b = c = 0$ , l'égalité est vérifiée mais cela contredit l'hypothèse de départ.

**1<sup>er</sup> cas :** au moins deux des vecteurs sont colinéaires, par exemple  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$

Par définition, et par non nullité des vecteurs, il existe un réel  $k$  non nul tel que

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} - k\vec{v} + 0\vec{w} = \vec{0}$$

Ce qui est contradictoire avec l'hypothèse.

**2<sup>e</sup> cas :** aucun des trois vecteurs n'est colinéaire à un autre, on en déduit que  $(\vec{v}; \vec{w})$  constitue une base vectorielle de ce plan donc il existe des réels  $x$  et  $y$  uniques et non nuls en même temps ( $\vec{u} \neq \vec{0}$ ) tels que

$$\vec{u} = x\vec{v} + y\vec{w} \Leftrightarrow \vec{u} - x\vec{v} - y\vec{w} = \vec{0}$$

Ce qui contredit aussi l'hypothèse donc  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas coplanaires.

### Corollaire

Soient trois vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$ . S'il existe un triplet de réels  $(a, b, c) \neq (0, 0, 0)$  tel que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0}$$

Alors les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont **coplanaires**.

### Propriété

Soient  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs non coplanaires. Pour tout vecteur  $\vec{u}$ , il existe un unique triplet  $(x; y; z)$  tel que

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$$

### Démonstration

#### Existence

Soit  $\vec{AB}$  un représentant du vecteur  $\vec{u}$ . Soit  $P$  le plan de repère  $(A, \vec{i}, \vec{j})$ .

- Si  $B$  appartient à  $P$  alors  $\vec{AB}$  se décompose suivant les vecteurs  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ .
- Supposons que  $B$  n'appartienne pas au plan  $P$ . Soit  $d$  la droite passant par  $B$  de vecteur directeur  $\vec{k}$ . Comme  $\vec{k}$  n'est pas colinéaire avec  $\vec{i}$  et  $\vec{j}$ , la droite  $d$  coupe le plan  $P$  en un point  $C$ . On peut écrire

$$\vec{AB} = \vec{AC} + \vec{CB}$$

$\vec{AC}$  appartient au plan  $P$  donc il existe un couple  $(x; y)$  tel que  $\vec{AC} = x\vec{i} + y\vec{j}$

$\vec{BC}$  est colinéaire avec  $\vec{k}$  donc il existe un réel  $z$  tel que  $\vec{BC} = z\vec{k}$

Il existe donc un triplet  $(x; y; z)$  tel que  $\vec{AB} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$

#### Unicité

On suppose que l'on ait les deux écritures distinctes

$$\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k} = x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} \Leftrightarrow (x - x')\vec{i} + (y - y')\vec{j} + (z - z')\vec{k} = \vec{0}$$

Supposons que l'une au moins des trois différences n'est pas nulle, par exemple  $z - z' \neq 0$

$$\vec{k} = \frac{x' - x}{z - z'}\vec{i} + \frac{y' - y}{z - z'}\vec{j}$$

Dans ce cas, les vecteurs  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  sont coplanaires. Ce qui est exclu. Les trois différences  $x - x', y - y'$  et  $z - z'$  sont donc nulles. D'où l'unicité.

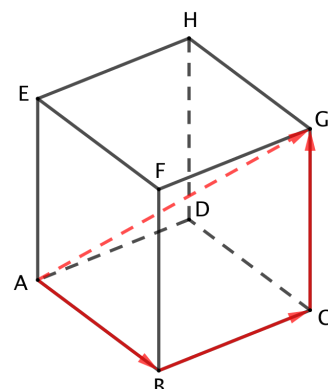
### Exemple

ABCDEFGH est un cube.

Les vecteurs  $\vec{AB}, \vec{BC}$  et  $\vec{CG}$  sont non coplanaires.

Le vecteur  $\vec{AG}$  se décompose en

$$\vec{AG} = \vec{AB} + \vec{BC} + \vec{CG}$$



## 2. Repère de l'espace

### Définition

Soit  $\vec{i}, \vec{j}$  et  $\vec{k}$  trois vecteurs non coplanaires. O est un point de l'espace.

On appelle **repère de l'espace** le quadruplet  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$

### Remarques

- O est appelé l'origine du repère.
- La décomposition  $\vec{OM} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  donne les coordonnées  $(x, y, z)$  du point M.
- $x$  est l'abscisse du point M,  $y$  est son ordonnée et  $z$  est la **cote** du point M.
- De même, la décomposition  $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  donne les coordonnées  $(x, y, z)$  du vecteur  $\vec{u}$ .

### Propriété

Deux vecteurs  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  sont colinéaires si l'une des conditions suivantes est réalisée :

- Un des vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est nul
- Si les deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls, il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$
- Il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que  $\vec{u} = k\vec{v}$  ou  $\vec{v} = k\vec{u}$
- $|x, x', y, y'| = xy' - x'y = 0$  et  $|y, y', z, z'| = yz' - y'z = 0$  et  $|x, x', z, z'| = xz' - x'z = 0$

### Preuve

Montrons que les deux dernières conditions sont équivalentes.

#### Sens direct

Supposons qu'il existe  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$\vec{u} = k\vec{v} \Leftrightarrow (x, y, z) = k(x', y', z') \Leftrightarrow \{x = kx', y = ky', z = kz'\}$$

Ainsi

$$xy' - x'y = kx'y' - kx'y = 0$$

$$yz' - y'z = ky'z' - ky'z = 0$$

$$xz' - x'z = kx'z' - kx'z = 0$$

On obtient les mêmes conclusions si  $\vec{v} = k\vec{u}$

#### Sens indirect

Supposons que

$$xy' - x'y = 0, yz' - y'z = 0, xz' - x'z = 0$$

**1<sup>er</sup> cas :**  $(x', y', z') = (0, 0, 0)$   $k = 0$  convient

**2<sup>e</sup> cas :**  $x \neq 0$  ou  $y \neq 0$  ou  $z \neq 0$

Supposons  $x \neq 0$  et posons alors

$$k = \frac{x}{x'} \Leftrightarrow x = kx'$$

Or,

$$\begin{aligned} xy' - x'y = 0 &\Leftrightarrow kx'y' - x'y = 0 \Leftrightarrow x'(ky' - y) = 0 \Leftrightarrow ky' - y = 0 \Leftrightarrow y = ky' \\ xz' - x'z = 0 &\Leftrightarrow kx'z' - x'z = 0 \Leftrightarrow x'(kz' - z) = 0 \Leftrightarrow kz' - z = 0 \Leftrightarrow z = kz' \end{aligned}$$

Donc

$$(x, y, z) = k(x', y', z')$$

Les cas  $y \neq 0$  et  $z \neq 0$  se traitent de la même manière.

### Remarque

On utilise souvent la contraposée de la propriété. Si l'un des déterminants  $|x, x', y, y'|$ ,  $|y, y', z, z'|$  ou  $|x, x', z, z'|$  n'est **pas nul**, alors les vecteurs  $\vec{u}(x, y, z)$  et  $\vec{v}(x', y', z')$  ne sont **pas colinéaires**.

### Méthode

Montrer que deux vecteurs sont colinéaires.

Les vecteurs suivants sont-ils colinéaires ?

$$1. \vec{u}(1, -2, 3) \text{ et } \vec{a}(3, -6, 9) \quad 2. \vec{v}(1, 2, 1) \text{ et } \vec{b}(1, 2, 3) \quad 3. \vec{w}(\sqrt{2}\sqrt{6} - \sqrt{10}) \text{ et } \vec{c}(2 - \sqrt{2}, 2\sqrt{3} - \sqrt{6}, \sqrt{10} - 2\sqrt{5})$$

### Solution

**1.** On remarque que  $\vec{a} = 3\vec{u}$  donc  $\vec{a}$  et  $\vec{u}$  sont colinéaires.

**2.** On remarque que

$$|2 \ 2 \ 1 \ 3| = 2 \times 3 - 1 \times 2 = 4 \neq 0$$

Donc  $\vec{v}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas colinéaires.

### Autre méthode

Soit  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$\vec{v} = k\vec{b} \Leftrightarrow (1 \ 2 \ 1) = k(1 \ 2 \ 3) \Leftrightarrow \{1 = k \ 2 = 2k \ 1 = 3k\} \Leftrightarrow \{k = 1 \ k = \frac{1}{2}\}$$

Le système n'a pas de solution donc  $\vec{v}$  et  $\vec{b}$  ne sont pas colinéaires.

3. Soit  $k \in \mathbb{R}$  tel que

$$\vec{c} = k\vec{w} \Leftrightarrow (2 - \sqrt{2} \ 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \ \sqrt{10} - 2\sqrt{5}) = k(\sqrt{2} \ \sqrt{6} - \sqrt{10}) \Leftrightarrow \{2 - \sqrt{2} = k\sqrt{2} \ 2\sqrt{3} - \sqrt{6} = k\sqrt{6} \ \sqrt{10} - 2\sqrt{5} = -k\sqrt{10}\}$$

Donc  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.

### Autre méthode

$$|2 - \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ 2\sqrt{3} - \sqrt{6} \ \sqrt{6}| = \sqrt{6}(2 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(2\sqrt{3} - \sqrt{6}) = 2\sqrt{6} - \sqrt{12} - 2\sqrt{6} + \sqrt{12} = 0$$

$$|2\sqrt{3} - \sqrt{6} \ \sqrt{6} \ \sqrt{10} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}| = -\sqrt{10}(2\sqrt{3} - \sqrt{6}) - \sqrt{6}(\sqrt{10} - 2\sqrt{5}) = -2\sqrt{30} + \sqrt{60} - \sqrt{60} + 2\sqrt{30} = 0$$

$$|2 - \sqrt{2} \ \sqrt{2} \ \sqrt{10} - 2\sqrt{5} - \sqrt{10}| = -\sqrt{10}(2 - \sqrt{2}) - \sqrt{2}(\sqrt{10} - 2\sqrt{5}) = -2\sqrt{10} + \sqrt{20} - \sqrt{20} + 2\sqrt{10} = 0$$

Donc  $\vec{c}$  et  $\vec{w}$  sont colinéaires.

### Méthode

Montrer que trois vecteurs sont non coplanaires.

Montrer que les vecteurs suivants ne sont pas coplanaires

$$\vec{u}(1 \ 2 \ 3) \ \vec{v}(1 \ 2 \ 1) \ \vec{w}(1 \ 0 \ 1)$$

### Solution

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow a(1 \ 2 \ 3) + b(1 \ 2 \ 1) + c(1 \ 0 \ 1) = (0 \ 0 \ 0) \Leftrightarrow \{a + b + c = 0 \ 2a + 2b = 0 \ 3a + b + c = 0\}$$

$$\Leftrightarrow \{a + b + c = 0 \ a + b = 0 \ 3a + b + c = 0\} \Leftrightarrow \{c = 0 \ a + b = 0 \ 2a + a + b + c = 0\} \Leftrightarrow \{c = 0 \ a + b = 0 \ 3a = 0\} \Leftrightarrow \{c = 0 \ a = 0 \ b = 0\}$$

Donc les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  ne sont pas coplanaires.

### Remarque

Soit  $A$  un point de l'espace, de coordonnées  $(2 \ 3 \ -1)$  par exemple.  $(A, \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$  est un repère de l'espace.

### Méthode

Montrer que trois vecteurs sont coplanaires.

Montrer que les vecteurs suivants sont coplanaires

$$\vec{u}(1 \ 5 \ 2) \ \vec{v}(1 \ 2 \ 3) \ \vec{w}(1 \ -4 \ 5)$$

### Solution

Soient  $a, b, c \in \mathbb{R}$  tels que

$$a\vec{u} + b\vec{v} + c\vec{w} = \vec{0} \Leftrightarrow a(1 \ 5 \ 2) + b(1 \ 2 \ 3) + c(1 \ -4 \ 5) = (0 \ 0 \ 0) \Leftrightarrow \{a + b + c = 0 \ 5a + 2b - 4c = 0 \ 2a + 3b + 5c = 0\}$$

$$\Leftrightarrow \{a + b + c = 0 \ 5a + 5b + 5c - 5b - 5c + 2b - 4c = 0 \ 2a + 2b + 2c + b + 3c = 0\} \Leftrightarrow \{a + b + c = 0 \ 5a + 5b + 5c - 5b - 5c + 2b - 4c = 0 \ 2a + 2b + 2c + b + 3c = 0\} \Leftrightarrow \{a + b + c = 0 \ 5a + 5b + 5c - 5b - 5c + 2b - 4c = 0 \ 2a + 2b + 2c + b + 3c = 0\}$$

On peut choisir  $c = 1, b = -3$  et  $a = 2$ . Ainsi

$$2\vec{u} - 3\vec{v} + \vec{w} = \vec{0}$$

Donc les vecteurs  $\vec{u}, \vec{v}$  et  $\vec{w}$  sont coplanaires.

### Méthode

Démontrer l'alignement par décomposition de vecteurs

 Vidéo <https://youtu.be/oY0BgZNDsQU>

ABCDEFGH est un cube. Soit  $I$  le milieu de  $[AH]$  et  $J$  le point de  $[FI]$  tel que

$$\vec{FJ} = \frac{2}{3}\vec{FI}$$

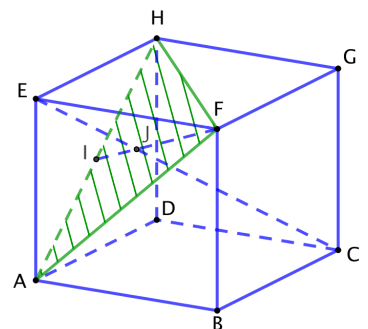
Démontrer que les points  $E, J$  et  $C$  sont alignés.

### Solution

Pour prouver cet alignement, on va démontrer que les vecteurs  $\vec{EJ}$  et  $\vec{EC}$  sont colinéaires.

$$\vec{EJ} = \vec{EF} + \vec{FJ} = \vec{EF} + \frac{2}{3}\vec{FI} = \vec{EF} + \frac{2}{3}\left(\frac{\vec{FA} + \vec{FH}}{2}\right) = \vec{EF} + \frac{\vec{FA} + \vec{FH}}{3}$$

$$\vec{EJ} = \frac{3\vec{EF} + \vec{FA} + \vec{FH}}{3} = \frac{\vec{EF} + \vec{EF} + \vec{FA} + \vec{EF} + \vec{FH}}{3} = \frac{\vec{EF} + \vec{EA} + \vec{EH}}{3} = \frac{\vec{EF} + \vec{FB} + \vec{BC}}{3} = \frac{\vec{EC}}{3} = \frac{1}{3}\vec{EC}$$



Les vecteurs  $\vec{EJ}$  et  $\vec{EC}$  sont colinéaires et donc les points E, J et C sont alignés.

### Autre méthode

On place dans le repère  $(A, \vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AE})$ . Dans ce repère,

$$E(0 \ 0 \ 1) \quad F(1 \ 0 \ 1) \quad I(0 \ 1/2 \ 1/2) \quad C(1 \ 1 \ 0)$$

$$\vec{FI}(0 - 1 \ 1/2 - 0 \ 1/2 - 1) = (-1 \ 1/2 \ -1/2) \quad \vec{FJ}(x_J - 1 \ y_J - 0 \ z_J - 1)$$

$$\frac{2}{3}\vec{FI} = \frac{2}{3}(-1 \ 1/2 \ -1/2) = (-2/3 \ 1/3 \ -1/3)$$

On en déduit que

$$\{x_J - 1 = -2/3 \ y_J - 0 = 1/3 \ z_J - 1 = -1/3\} \Leftrightarrow \{x_J = 1/3 \ y_J = 1/3 \ z_J = 2/3\} \Leftrightarrow J(1/3 \ 1/3 \ 2/3)$$

$$\vec{EJ}(1/3 \ 1/3 \ -1/3) = \frac{1}{3}(1 \ 1 \ -1) = \frac{1}{3}\vec{EC}$$

Les vecteurs  $\vec{EJ}$  et  $\vec{EC}$  sont colinéaires et donc les points E, J et C sont alignés.

## V. Représentation paramétrique d'une droite

### Propriété

L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ .

Soit une droite  $d$  passant par un point  $A(x_A \ y_A \ z_A)$  et de vecteur directeur

$$\vec{u}(a \ b \ c)$$

$$M(x \ y \ z) \in d \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$



### Remarque

Ce système s'appelle une **représentation paramétrique** de la droite  $d$ .

### Démonstration

$$M(x \ y \ z) \in d \Leftrightarrow \vec{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ sont colinéaires} \Leftrightarrow \exists t \in \mathbb{R}, \vec{AM} = t\vec{u} \Leftrightarrow (x - x_A \ y - y_A \ z - z_A) = t(a \ b \ c) \Leftrightarrow \begin{cases} x = x_A + at \\ y = y_A + bt \\ z = z_A + ct \end{cases}$$

### Méthode

Utiliser la représentation paramétrique d'une droite

**Vidéo** <https://youtu.be/smCUBzJs9xo>

L'espace est muni d'un repère  $(O, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$ . Soit les points  $A(2 \ 3 \ -1)$  et  $B(1 \ -3 \ 2)$ . Déterminer les coordonnées du point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec le plan  $P$  de repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

### Solution

On commence par déterminer une représentation paramétrique de la droite  $(AB)$ .

$$\text{Un vecteur directeur de la droite } (AB) \text{ est } \vec{AB}(1 - 2 \ -3 - 3 \ 2 - (-1)) = (-1 \ -6 \ 3)$$

$$\text{Une représentation paramétrique de la droite } (AB) \text{ est } \begin{cases} x = 2 - t \\ y = 3 - 6t \\ z = -1 + 3t \end{cases}, t \in \mathbb{R}$$

Soit  $M(x \ y \ z)$  le point d'intersection de la droite  $(AB)$  avec le plan  $P$  de repère  $(O, \vec{i}, \vec{j})$ .

$$M \in P \Leftrightarrow z = 0 \Leftrightarrow -1 + 3t = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{3} \Leftrightarrow M(2 - 1/3 \ 3 - 6/3 \ 0) = (5/3 \ 1 \ 0)$$