

Дисциплина: ОД.07 Математика

Занятие № 57

Группа БУ и ТД 1/1-9/25

Дата: 21.01.2026

Тип занятия: практическое занятие 28

Преподаватель: Бережная В.А.

Тема занятия: Периодические функции. Тригонометрические функции

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для сознательного усвоения учащимися свойств и действий с тригонометрическими функциями произвольного угла.

Содержательная:

- актуализировать знания о четной, нечетной функции, периодичной функции;
- расширить знания учеников за счет уточнения понятий четной, нечетной, периодической функции для тригонометрических функций;
- познакомиться с задачами на анализ тригонометрических функций.

План занятия:

1. Область определения и множество значений тригонометрических функций.
2. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций.

1. Область определения и множество значений тригонометрических функций.

Вспомним, что числовой функцией с областью определения D называется правило, сопоставляющее каждому числу $x \in D$ единственное число y .

Каждому углу в x радиан, где x – любое действительное число, на единичной окружности соответствует единственная точка P_x , полученная поворотом точки $P_0(1;0)$ вокруг начала координат на угол x радиан. Как известно, абсцисса точки P_x называется косинусом числа x , а ордината – синусом числа x .

Таким образом, любому действительному числу x сопоставлено единственное значение $\sin x$ и единственное значение $\cos x$. А это значит, что на множестве действительных чисел заданы числовые функции, называемые синус и косинус.

Функция вида $y=\sin x$ называется синусом. Функция вида $y=\cos x$ называется косинусом. Функция вида $y=\tan x$ называется тангенсом. Функция вида $y=\cot x$ называется котангенсом. Общее название функций синус, косинус, тангенс и котангенс – тригонометрические функции.

Согласно определению числовой функции говорить о функции без указания её области определения нельзя. Если область определения функции не указана, то имеют в виду естественную область определения – множество допустимых значений аргумента (множество допустимых значений переменной x).

Область определения функции $y=\sin x$ – множество действительных чисел.

Область определения функции $y=\cos x$ – множество действительных чисел.

Функция $y=\tan x$ определена для всех $x \neq \frac{1}{2}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, так как делить на нуль нельзя, а при $x = \frac{1}{2}\pi + \pi k, k \in \mathbb{Z}$, $\cos x = 0$.

Функция $y=\cot x$ определена для всех $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$, так как делить на нуль нельзя, а при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, $\sin x = 0$.

	Область определения	Область значений
--	---------------------	------------------

$D(\sin) = \mathbb{R}$ $D(\cos) = \mathbb{R}$ $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$ $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k; k \in \mathbb{Z} \}$	$E(\sin) = [-1; 1]$ $E(\cos) = [-1; 1]$ $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; +\infty)$ $E(\operatorname{ctg}) = (-\infty; +\infty)$
--	---

Задачи

1. Найдите область определения функции:

1) $y = \operatorname{tg} 2x$;

2) $y = \operatorname{ctg}(x/3)$;

3) $y = \cos 2x + \operatorname{ctg} 5x$.

Решение:

1) $D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z} \right\}$. Значит, $2x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k; k \in \mathbb{Z}$; $x \neq \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{2} k; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2) $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k; k \in \mathbb{Z} \}$. Значит, $\frac{x}{3} \neq \pi k; k \in \mathbb{Z}$; $x \neq 3\pi k; k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \{ 3\pi k; k \in \mathbb{Z} \}$.

3) $\cos 2x$ имеет смысл при любом x . $D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k; k \in \mathbb{Z} \}$. Значит,

$5x \neq \pi k; k \in \mathbb{Z}; x \neq \frac{\pi}{5} k; k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $D(y) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{5} k; k \in \mathbb{Z} \right\}$.

2. Найдите область значений функции:

1) $y = \sin 3x$;

2) $y = \operatorname{tg} \frac{x}{4}$;

3) $y = \cos x + \sin x$

Решение:

1) $E(\sin) = [-1; 1]$, следовательно, $E(y) = [-1; 1]$.

Ответ: $E(y) = [-1; 1]$.

2) $E(\operatorname{tg}) = (-\infty; +\infty)$, следовательно, $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

Ответ: $E(y) = (-\infty; +\infty)$.

3) Известно, что $E(\sin) = [-1; 1]$ и $E(\cos) = [-1; 1]$, поэтому представим выражение $\sin + \cos x$ с помощью формул сложения в виде синуса или косинуса некоторого угла.

$$\cos x + \sin x = \sqrt{2} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} \cos x + \frac{\sqrt{2}}{2} \sin x \right) = \sqrt{2} \left(\cos x \cos \frac{\pi}{4} + \sin x \sin \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$\text{Итак, } y = \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right).$$

$$E(\cos) = [-1; 1]. -1 \leq \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq 1.$$

Отсюда

$$-\sqrt{2} \leq \sqrt{2} \cos \left(x - \frac{\pi}{4} \right) \leq \sqrt{2}.$$

$$E(y) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}].$$

Ответ: $E(y) = [-\sqrt{2}; \sqrt{2}]$.

2. Чётность, нечётность, периодичность тригонометрических функций.

Чётность, нечётность тригонометрических функций

При изучении той или иной функции важно выяснить, обладает ли она свойством чётности (нечётности) или нет, установить, на каких промежутках функция возрастает, а на каких убывает.

Напомним, что функция $y=f(x)$ называется чётной, если её область определения $D(f)$ – симметричное относительно нуля множество, и для любого $x \in D(f)$ верно равенство: $f(-x)=f(x)$.

Функция $y=f(x)$ называется нечётной, если её область определения $D(f)$ – симметричное относительно нуля множество, и для любого $x \in D(f)$ верно равенство: $f(-x)=-f(x)$.

Известно, что

$$D(\sin) = \mathbb{R}, D(\cos) = \mathbb{R},$$

$$D(\operatorname{tg}) = \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{\pi}{2} + \pi k : k \in \mathbb{Z} \right\},$$

$$D(\operatorname{ctg}) = \mathbb{R} \setminus \{ \pi k : k \in \mathbb{Z} \}.$$

То есть область определения каждой тригонометрической функции симметрична относительно нуля.

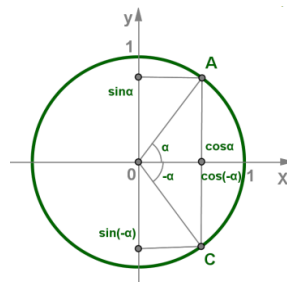
При рассмотрении свойств синуса, косинуса, тангенса и котангенса было установлено, что

$$\sin(-x) = -\sin x \text{ при любом } x \in \mathbb{R},$$

$$\cos(-x) = \cos x \text{ при любом } x \in \mathbb{R},$$

$$\operatorname{tg}(-x) = -\operatorname{tg} x \text{ для любого } x \neq \frac{\pi}{2} + \pi k, k \in \mathbb{Z},$$

$$\operatorname{ctg}(-x) = -\operatorname{ctg} x \text{ для любого } x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}.$$



Таким образом, функции $y=\sin x$, $y=\operatorname{tg} x$ и $y=\operatorname{ctg} x$ являются нечётными, а функция $y=\cos x$ – является чётной.

Периодичность тригонометрических функций

Тригонометрические функции являются периодическими. Понимание этого свойства важно для построения графиков тригонометрических функций, для преобразования выражений, содержащих тригонометрические функции, вычисления значений тригонометрических выражений, при решении тригонометрических уравнений и неравенств, отборе их решений, удовлетворяющих заданным условиям.

Рассматривая свойства синуса и косинуса, мы доказали, что

$$\sin x = \sin(x + 2\pi) = \sin(x - 2\pi) \text{ и } \cos x = \cos(x + 2\pi) = \cos(x - 2\pi)$$

при этом области определения функций синус и косинус вместе с точкой содержат и точки $x + 2\pi$ и $x - 2\pi$. По определению периодической функции число 2π является периодом функций синус и косинус.

Число 2π является наименьшим положительным периодом функций $y = \sin x$ и $y = \cos x$.

Известно, что если функция является периодической с периодом T , то она имеет бесконечно много периодов, и любое число вида kT , где k – произвольное целое число, отличное от нуля, также период этой функции. Поэтому числа вида $2\pi k$, где k – произвольное целое число, отличное от нуля, являются периодами функций синус и косинус. Таким образом, для любого числа справедливы равенства:

$$\sin(x + 2\pi k) = \sin x, k \in \mathbb{Z};$$

$$\cos(x + 2\pi k) = \cos x, k \in \mathbb{Z}.$$

Изучая свойства тангенса и котангенса, мы узнали, что для любых допустимых значений x :

$$\operatorname{tg} x = \operatorname{tg}(x + \pi) = \operatorname{tg}(x - \pi) \text{ и } \operatorname{ctg} x = \operatorname{ctg}(x + \pi) = \operatorname{ctg}(x - \pi)$$

Если области определения функций тангенс и котангенс содержат точку x , то они содержат и точки $x + \pi$ и $x - \pi$. По определению периодической функции число π является периодом функций тангенс и котангенс.

Число π является наименьшим положительным периодом функций $y = \operatorname{tg} x$ и $y = \operatorname{ctg} x$.

Известно, что если функция является периодической с периодом T , то она имеет бесконечно много периодов, и любое число вида kT , где k – произвольное целое число, отличное от нуля, также период этой функции. Поэтому числа вида πk , где k – произвольное целое число, отличное от нуля, являются периодами функций тангенс и котангенс. Таким образом, для любого допустимого значения справедливы равенства:

$$\operatorname{tg}(x + \pi k) = \operatorname{tg} x, k \in \mathbb{Z};$$

$$\operatorname{ctg}(x + \pi k) = \operatorname{ctg} x, k \in \mathbb{Z}.$$

Задачи

Пример 3. Исследовать на чётность функцию:

$$y = \sin x - \cos x.$$

Решение:

$$y(-x) = \sin(-x) - \cos(-x) = -\sin x - \cos x.$$

$$y(-x) \neq y(x),$$

$$y(-x) \neq -y(x).$$

Следовательно, функция $y = \sin x - \cos x$ не является ни чётной, ни нечётной, то есть это функция общего вида

Пример 4. Функция $f(x) = x^2 + \cos x$ является чётной, так как

$$f(-x) = (-x)^2 + \cos(-x) = x^2 + \cos x = f(x).$$

Пример 5. Доказать следующее утверждение:

$$\sin(-721^\circ) = -\sin 1^\circ.$$

Так как синус – нечётная и периодическая функция с минимальным периодом 360° , то получим

$$\sin(-721^\circ) = -\sin 721^\circ = -\sin(720^\circ + 1^\circ) = -\sin 1^\circ.$$

Пример 6. Доказать следующее утверждение:

$$\cos(-13\pi) = -1.$$

Так как косинус – чётная и периодическая функция с минимальным периодом 2π , то получим

$$\cos(-13\pi) = \cos 13\pi = \cos(\pi + 6 \cdot 2\pi) = \cos \pi = -1.$$

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

1.1. Дайте определение числовой функции. Почему нельзя говорить о функции без указания её области определения?

1.2. Что подразумевается под «естественной областью определения»?

1.3. Чему равен наименьший положительный период для функций:

А) $y = \sin x$;

В) $y = \operatorname{tg} x$;

Б) $y = \cos x$;

Г) $y = \operatorname{ctg} x$?

Запишите общие формулы для всех периодов этих функций.

2. Решите предложенные задания (письменно):

2.1. Исследовать на чётность функцию:

А) $y = \sin x - 3x$;

Б) $y = x + \cos x$.

2.2. Доказать следующие утверждения:

А) $\sin(-1103^\circ) = -\sin 23^\circ$;

Б) $\cos(-8\pi) = 1$.

ОТЧЕТНОСТЬ

Работы принимаются до 28 января 2026 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:



ОД.07 Математика 21.01.26 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 21.01.26 (Иванов Иван, ТД и БУ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+RX9Nb2N84woxOTdi>

С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ

Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.