

Exercice 1 :

Soit la variable $Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$ Avec $\text{Var}(X) = \sigma^2$ et $E(X) = \mu$

a/

Rappel : Si $Y = aX + b$ donc $E(Y) = aE(X) + b$

$$Y = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{1}{\sigma}\right) X + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{Donc } E(Y) = E\left(\left(\frac{1}{\sigma}\right) X + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)\right)$$

$$\text{Alors } E(Y) = \left(\frac{1}{\sigma}\right) E(X) + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$E(Y) = \frac{\mu}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma}$$

Donc $E(Y) = 0$

b/

Rappel : Si $Y = aX + b$ donc $\text{Var}(Y) = a^2 \text{Var}(X)$

$$Y = \frac{X}{\sigma} - \frac{\mu}{\sigma} = \left(\frac{1}{\sigma}\right) X + \left(-\frac{\mu}{\sigma}\right)$$

$$\text{Donc } \text{Var}(Y) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 \text{Var}(X)$$

$$\text{Var}(Y) = \left(\frac{1}{\sigma}\right)^2 * \sigma^2$$

Donc $\text{Var}(Y) = 1$

Exercice 2 :

$X = x_i$	$x_1 = 0$	$x_2 = 1$	$x_3 = 2$
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3

a/

$$E(X) = \sum_{i=1}^3 p_i x_i$$

$$E(X) = p_1 x_1 + p_2 x_2 + p_3 x_3$$

$$E(X) = 0 + p_2 + 2p_3 = 1$$

$$\text{Rappel : } \text{Var}(X) = \sum_{i=1}^n p_i (x_i - E(X))^2 = E(x^2) - (E(x))^2$$

$$\text{Var}(X) = p_1 (0 - 1)^2 + p_2 (1 - 1)^2 + p_3 (2 - 1)^2$$

$$\text{Var}(X) = p_1 + p_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{On sait que } \sum_{i=1}^3 p_i = 1$$

$$\text{Donc } p_1 + p_2 + p_3 = 1$$

$$\text{Donc } p_2 = p_1 + p_3 = \frac{1}{2}$$

$$\text{Puisque } p_2 + 2p_3 = 1$$

$$\text{Donc } 2p_3 = \frac{1}{2}$$

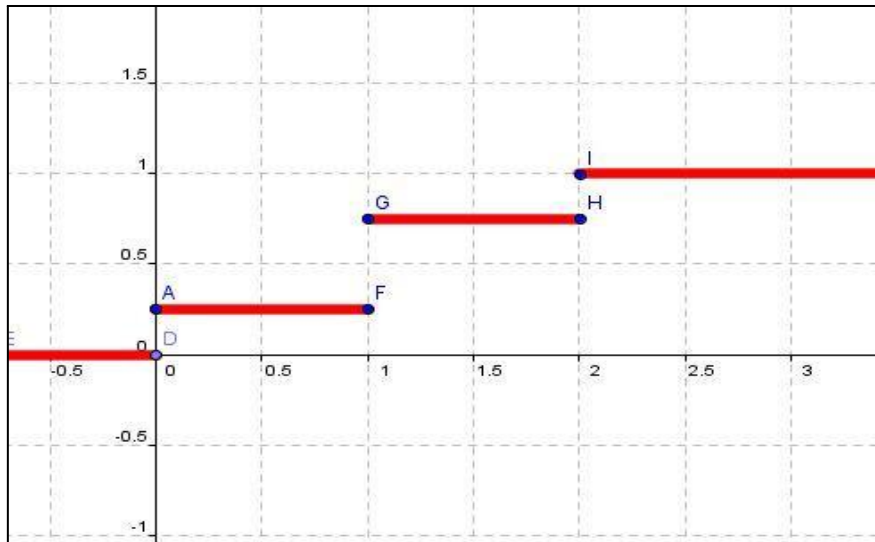
$$\text{Résultat : } p_1 = \frac{1}{4} \text{ et } p_2 = \frac{1}{2} \text{ et } p_3 = \frac{1}{4}$$

b/

Rappel : La fonction de répartition est la fonction F de $\mathbb{R}$ dans $[0,1]$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R} \quad F(x_i) = P(X \leq x_i)$

Donc $F(x) =$

$\{0 \text{ pour } x < 0 \quad 0.25 \text{ pour } 0 \leq x < 1 \quad 0.75 \text{ pour } 1 \leq x < 2 \quad 1 \text{ pour } 2 \leq x$



Exercise 4:

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6

Rappel : $\sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}$ $\sum_{k=1}^n k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ $\sum_{k=1}^n k^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$

$$\sum_{k=1}^n k = \frac{6 \cdot 7}{2} = 21$$

a/

$$P_1 + P_2 + P_3 + P_4 + P_5 + P_6 = 1$$

$$P_1 + 2P_1 + 3P_1 + 4P_1 + 5P_1 + 6P_1 = 21P_1$$

$$21P_1 = 1$$

$X=x_i$	1	2	3	4	5	6
$P(X = x_i)$	1/21	2/21	3/21	4/21	5/21	6/21

