

Ortogonalní matice

- a) je vždy ortogonálně diagonalizovatelná.
- b) nemusí být diagonalizovatelná nad $\mathbb{R}$ ani nad $\mathbb{C}$.
- c) je vždy unitárně diagonalizovatelná, ale nemusí být ortogonálně diagonalizovatelná.

Správně je c). Unitárně diagonalizovatelná je vždy, protože ortogonalní matice je normální. Tím spíše je diagonalizovatelná nad $\mathbb{C}$ (tedy b) není správně). Ortogonálně diagonalizovatelná být nemusí, např. rotace o 48 stupňů není nad $\mathbb{R}$ ani diagonalizovatelná..

Nechť A je matice nějakého ortogonálního operátoru na $\mathbb{R}^n$. Potom komplexní vlastní čísla matice A

- a) jsou z množiny $\{1, -1\}$.
- b) mohou být libovolná komplexní čísla s normou 1.
- c) jsou z množiny $\{1, -1, i, -i\}$

Správně je b). Vlastní čísla rotace o X v $\mathbb{R}^2$ jsou $\cos X \pm i \sin X$, což pokrývá právě všechna komplexní čísla s normou 1. (Pro větší n lze třeba vzít matice rotace a doplnit je bloky řádu 1 obsahující 1.)

Komplexní vlastní čísla každé reflexe v $\mathbb{R}^3$

- a) jsou z množiny $\{1, -1\}$.
- b) mohou být libovolná komplexní čísla s normou 1.
- c) jsou z množiny $\{1, -1, i, -i\}$

Správně je a). Je vidět z geometrického náhledu. Vlastní vektory příslušné 1 tvoří rovinu, podle které reflektujeme, vlastní vektory příslušné -1 tvoří ortogonální doplněk této roviny.

Uzavřením množiny všech reflexí v $\mathbb{R}^3$ na skládání dostaneme (uzavřeností na skládání myslíme vlastnost, že pro každé dva operátory z množiny je jejich složení opět v této množině)

- a) množinu všech ortogonálních operátorů na $\mathbb{R}^3$.
- b) množinu všech reflexí v $\mathbb{R}^3$.
- c) množinu všech lineárních operátorů na $\mathbb{R}^3$.

Správně je a). Skládáním ortogonálních operátorů dostaneme pouze ortogonální operátory (takže c) je špatně). Složením dvou různých reflexí dostaneme netriviální rotaci, což není reflexe (takže b) je špatně). Takto lze dostat jakoukoliv rotaci (nahlédněte!), takže a) je správně, protože víme, že ortogonální operátory jsou právě rotace a rotace složené s reflexí.