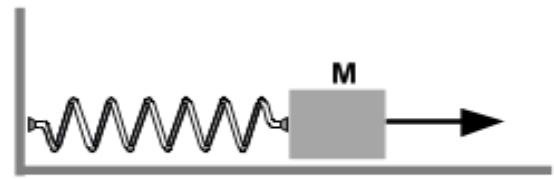


Μέγιστη και ελάχιστη απώλεια...

Το σώμα Σ_1 μάζας $M_1=1\text{kg}$ είναι δεμένο σε ελατήριο σταθεράς $k=100\text{N/m}$ και ισορροπεί στη θέση όπου το ελατήριο έχει το φυσικό του μήκος (Θ.Φ.Μ.). Τη χρονική στιγμή $t_0=0$, (σχήμα 1) ασκούμε οριζόντια δύναμη μέτρου F και στη θέση όπου το ελατήριο έχει επιμηκυνθεί κατά $\Delta\ell_1=20\text{cm}$, παύει να ασκείται η δύναμη F και το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση με σταθερά $D=k$ και ενέργεια $E_1=8\text{J}$. Το οριζόντιο επίπεδο είναι λείο. Να βρείτε:



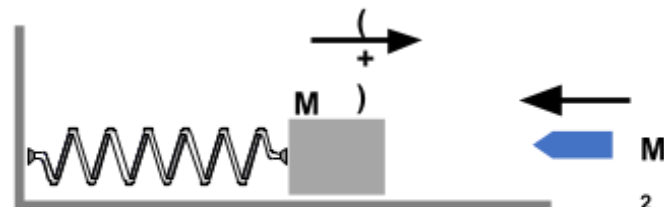
Σχήμα 1.

i) Το πλάτος ταλάντωσης A_1 , που θα εκτελέσει το σώμα Σ_1 και το μέτρο της δύναμης F .

Κάποια χρονική στιγμή το σώμα Σ_1 συγκρούεται κεντρικά και πλαστικά με βλήμα Σ_2 μάζας $M_2=3\text{kg}$ το οποίο κατευθύνεται προς τα αριστερά με ταχύτητα μέτρου $v_2=1\text{m/s}$. (σχήμα 2).

Αν κατά την κρούση η απώλεια ενέργειας του συστήματος είναι η μέγιστη δυνατή να βρείτε:

ii) τη θέση που έγινε η κρούση και την ταχύτητα του σώματος Σ_1 στη θέση αυτή, καθώς και το ποσό της απώλειας ενέργειας του συστήματος.



Σχήμα 2.

iii) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται το βλήμα από το κιβώτιο την πρώτη φορά που μηδενίζεται ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του συστήματος μετά την κρούση.

iv) Να βρείτε τη θέση κρούσης και την απώλεια ενέργειας του συστήματος εάν αμέσως μετά την κρούση το συσσωμάτωμα ακινητοποιούνταν στιγμιαία.

v) Να βρείτε που θα έπρεπε να γίνει η κρούση για να υπάρχει ελάχιστη απώλεια ενέργειας εξαιτίας της κρούσης.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας g .

Απάντηση

i)

$$E_1 = \frac{1}{2} \cdot k \cdot A_1^2 \rightarrow 16 = 100 A_1^2 \rightarrow A_1 = 0,4\text{m}$$

Η ενέργεια της ταλάντωσης προέρχεται από τη δράση της δύναμης F . Επειδή η δύναμη καταργείται το έργο της θα αποθηκευτεί στο σύστημα του ελατηρίου και του σώματος Σ_1 και θα ισούται με την ενέργεια ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα.

$$W_F = E_{\text{ταλ.}} \rightarrow F \cdot \Delta \ell_1 = E_{\text{ταλ.}} \rightarrow F = 40 \text{ N.}$$

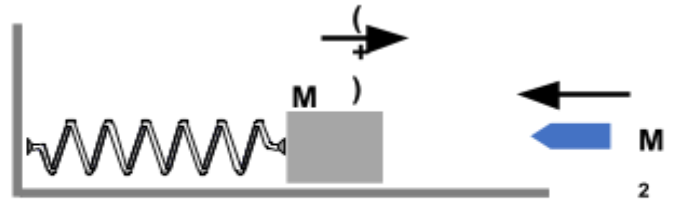
Αναλυτικά τη στιγμή που καταργείται η δύναμη F το σώμα έχει ταχύτητα v και το ελατήριο είναι επιμηκυμένο κατά $x_1 = \Delta \ell_1$.

Από ΘΜΚΕ από την στιγμή που δρα η δύναμη μέχρι την κατάργησή της έχουμε:

$$\begin{aligned} K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} &= W_{F\text{ελ.}}^{1 \rightarrow 2} + WF \rightarrow K_{\text{τελ.}} - K_{\text{αρχ.}} = U_{\text{ελ.}}^{(1)} - U_{\text{ελ.}}^{(2)} + WF \rightarrow \\ K_{\text{τελ.}} - 0 &= 0 - U_{\text{ελ.}}^{(2)} + WF \rightarrow \frac{1}{2} \cdot m \cdot v^2 + \frac{1}{2} k \cdot x_1^2 = WF \rightarrow \\ K_1 + U_{\text{ταλ.1}} &= WF \rightarrow \\ E_{\text{ταλ.}} &= WF \end{aligned}$$

ii)

Διαισθητικά θα περίμενε κανείς να βρει ότι η μέγιστη απώλεια ενέργειας λόγω της κρούσης θα συμβεί όταν το σύστημα μετά την κρούση έχει μηδενική ταχύτητα. Δηλαδή η κρούση να γίνει σε θέση όπου τα σώματα κινούνται αντίρροπα και έχουν αντίθετες ορμές. Ωστόσο δεν μπορούμε να το θεωρήσουμε δεδομένο διότι από την απώλεια ενέργειας προκύπτει:



Σχήμα 3.

$$\begin{aligned} Q_{\text{κρ.}} &= K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}} \rightarrow \\ Q_{\text{κρ.}} &= K_1 + K_2 - K_{\text{συσ}} \rightarrow \\ Q_{\text{κρ.}} &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot m_2 \cdot v_2^2 - \frac{1}{2} \cdot (m_1 + m_2) \cdot v_{\Sigma}^2 \rightarrow \\ Q_{\text{κρ.}} &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot 1^2 - \frac{1}{2} \cdot (1+3) \cdot v_{\Sigma}^2 \rightarrow \\ Q_{\text{κρ.}} &= 0,5v_1^2 + 1,5 - 2 \cdot v_{\Sigma}^2 \quad (1) \end{aligned}$$

και δεν είναι εμφανές ότι η διαφορά $K_{\text{πριν}} - K_{\text{μετά}}$ μεγιστοποιείται όταν $v_{\Sigma} = 0$, καθώς μπορεί και για άλλες τιμές της ταχύτητας v_1 η παραπάνω παράσταση να είναι μεγαλύτερη.

Από τη διατήρηση της ορμής αμέσως πριν και αμέσως μετά την κρούση προκύπτει:

$$\begin{aligned} \vec{P}^{\text{πριν}} &= \vec{P}^{\text{μετά}} \Rightarrow \vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_{\text{συσ}} \xrightarrow{(+)} m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) v_{\Sigma} \rightarrow \\ 1 \cdot v_1 - 3 \cdot 1 &= (1+3) v_{\Sigma} \rightarrow v_1 - 3 = 4 v_{\Sigma} \rightarrow \\ v_{\Sigma} &= \frac{v_1 - 3}{4} \quad (2) \end{aligned}$$

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει:

$$\begin{aligned} Q_{\text{κρ.}} &= 0,5v_1^2 + 1,5 - 2v_{\Sigma}^2 \rightarrow Q_{\text{κρ.}} = 0,5v_1^2 + 1,5 - 2 \left(\frac{v_1 - 3}{4} \right)^2 \rightarrow \\ Q_{\text{κρ.}} &= 0,5v_1^2 + 1,5 - 2 \frac{(v_1^2 - 6v_1 + 9)}{16} \rightarrow Q_{\text{κρ.}} = 0,5v_1^2 + 1,5 - \frac{v_1^2}{8} + \frac{6v_1}{8} - \frac{9}{8} \rightarrow \end{aligned}$$

$$Q_{\kappa\rho.} = \frac{3v_1^2}{8} + \frac{6v_1}{8} + \frac{3}{8} \quad (3)$$

Θα παραγοντοποιήσουμε το τριώνυμο $Q_{\kappa\rho.} = \frac{3v_1^2}{8} + \frac{6v_1}{8} + \frac{3}{8}$. Έχει διακρίνουσα $\Delta=0$ και διπλή ρίζα το $v_1 = -1 \text{ m/s}$. Συνεπώς:

$$Q_{\kappa\rho.} = \frac{3}{8}(v_1 + 1)^2 \quad (4)$$

Από την παραπάνω σχέση φαίνεται ότι όταν η ταχύτητα είναι μέγιστη θετική, δηλαδή όταν το σώμα βρίσκεται στη Θ.Ι. και κατευθύνεται προς τα δεξιά η παραπάνω παράσταση μεγιστοποιείται και έχουμε τη μέγιστη απώλεια ενέργειας.

Για $v_1 = +v_{1\max} = \omega_1 A_1 = 4 \text{ m/s}$ από την (4) προκύπτει:
Σε αντίθεση με αυτό που περιμέναμε.

$$Q_{\kappa\rho.,\max} = \frac{75}{8} \text{ J} = 9,375 \text{ J}$$

iii)

Από τη σχέση (2) προκύπτει

$$v_\Sigma = \frac{4-3}{4} \text{ m/s} = 0,25 \text{ m/s} \quad \text{και το σύστημα}$$

κινείται προς τα δεξιά. Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα της νέας ταλάντωσης του συσσωματώματος.

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{k}{m_1+m_2}} = \sqrt{\frac{100}{4}} = 5 \text{ r/s}$$

$$\text{Και } v_\Sigma = \omega_2 A_2 \rightarrow \frac{1}{4} = 5A_2 \rightarrow A_2 = \frac{1}{20} \text{ m}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται στην ακραία θέση της ταλάντωσης για πρώτη φορά όπου $v=0$.

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v$$

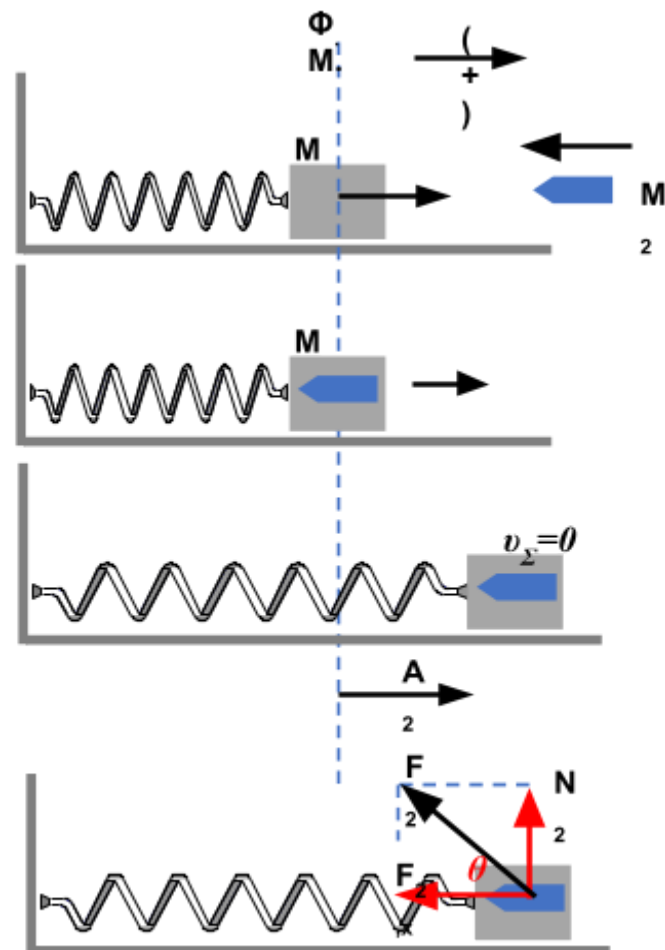
Από την επιτάχυνση της ταλάντωσης στην

ακραία θέση $x = A_2 = \frac{1}{20} \text{ m}$ προκύπτει :

$$a_2 = -\omega_2^2 \cdot x \rightarrow$$

$$\alpha_2 = -(5)^2 \frac{1}{20} \rightarrow \alpha_2 = -\frac{25}{20} \text{ m/s}^2$$

$$\rightarrow \alpha_2 = -1,25 \text{ m/s}^2$$



Σχήμα
4.

Η επιτάχυνση κατευθύνεται προς τα αριστερά.

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα στον οριζόντιο άξονα για το Σ_2 προκύπτει:

$$\Sigma F_x = m_2 a \rightarrow F_{2,x} = -m_2 a \rightarrow F_{2,x} = -3,75 \text{ N}$$

Και από την ισορροπία στον κατακόρυφο άξονα $\Sigma F_y = 0 \rightarrow N_2 = m_2 g = 30 \text{ N}$

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} = \sqrt{3,75^2 + 30^2} \rightarrow F \approx 30,233 \text{ N} \quad \text{και} \quad \varepsilon\varphi\theta = \frac{N_2}{F_x} = \frac{30}{3,75} = 8$$

iv)

Από τη σχέση (2) για $v_\Sigma = 0$ προκύπτει:

$$v_1 = 3 \text{ m/s}$$

Από τη σχέση (4) για $v_1 = +3 \text{ m/s}$ προκύπτει:

$$Q_{\text{κρ.}} = 6 \text{ J}$$

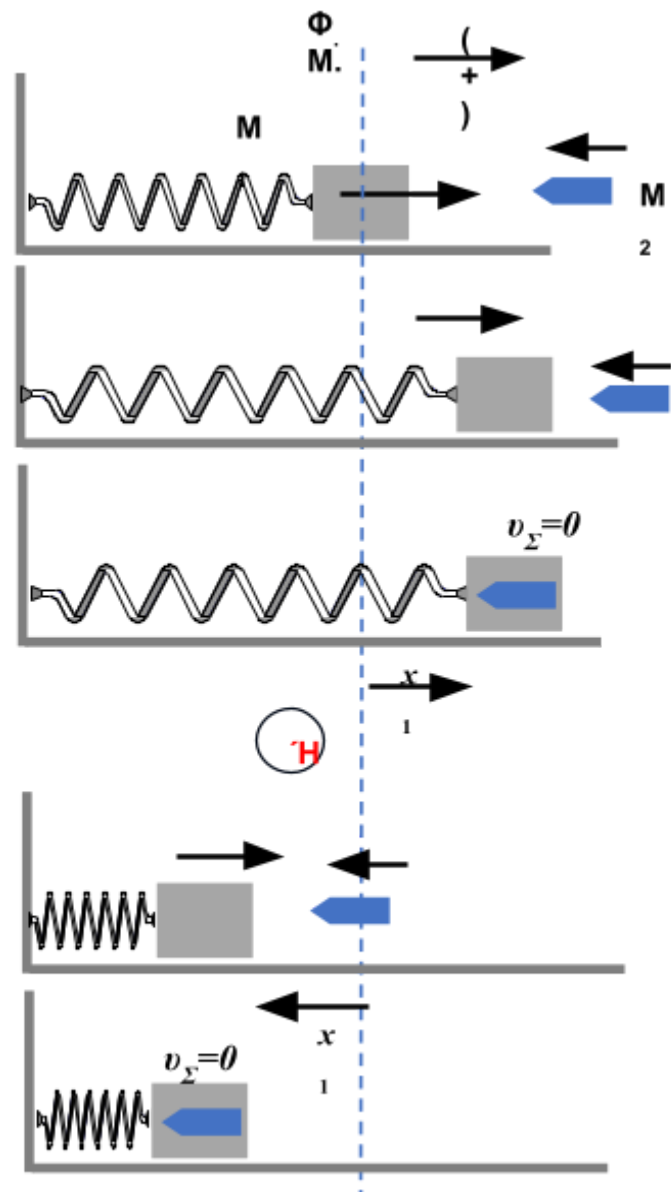
Από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 πριν την κρούση προκύπτει:

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x^2 \rightarrow \\ 8 &= \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 3^2 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot x^2 \rightarrow \\ 8 &= 4,5 + 50x^2 \rightarrow \\ 3,5 &= 50x^2 \rightarrow x^2 = 0,07 \rightarrow x = \pm 0,1\sqrt{7} \text{ m} \end{aligned}$$

Η κρούση μπορεί να γίνει και στη θέση $x = -0,1\sqrt{7} \text{ m}$ έχοντας αλγεβρική τιμή ταχύτητας $v_1 = 3 \text{ m/s}$.

v)

Η ταχύτητα v_1 παίρνει τιμές από $-4 \text{ m/s} \leq v_1 \leq 4 \text{ m/s}$ και συνεπώς στην τιμή $v_1 = -1 \text{ m/s}$ προκύπτει ότι $Q_{\text{κρ.}} = 0$!!! Αυτό βέβαια σημαίνει ότι τα σώματα έχουν ίσες ταχύτητες και ως προς το μέτρο και ως προς τη φορά και στην ουσία δεν μπορεί να συμβεί η εισχώρηση του βλήματος μέσα στο σώμα. Αποτελεί θα λέγαμε μία οριακή θεωρητική περίπτωση όπου τα σώματα κολούν και κινούνται σαν ένα. Με βάση αυτό θα λέγαμε ότι η κρούση συμβαίνει όταν η ταχύτητα του σώματος Σ_1 κυμαίνεται από $-1 \leq v_1 \leq 4 \text{ m/s}$.



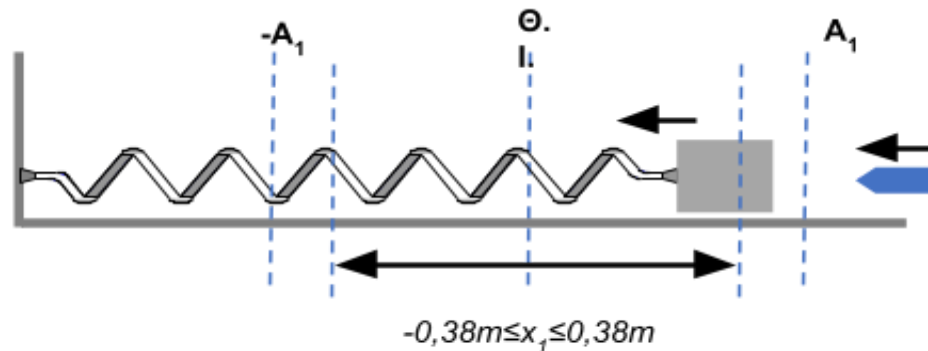
Σχήμα 5.

Η θέση κρούσης x_1 στην οποία $v_1 = -1 \text{ m/s}$, από τη διατήρηση της ενέργειας της ταλάντωσης του σώματος Σ_1 πριν την κρούση προκύπτει:

$$E = \frac{1}{2} \cdot m_1 \cdot v_1^2 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot x_1^2 \rightarrow 8 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (-1)^2 + \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot x_1^2 \rightarrow$$

$$8 = 0,5 + 50 \cdot x_1^2 \rightarrow 7,5 = 50 \cdot x_1^2 \rightarrow x_1^2 = 0,15 \rightarrow x_1 = \pm 0,1\sqrt{15} \approx \pm 0,387 \text{ m}$$

Με βάση τα παραπάνω η κρούση δεν μπορεί να συμβεί σε θέση όπου το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_1 είναι μεγαλύτερο από του Σ_2 και το σώμα Σ_1 κατευθύνεται ομόρροπα με το Σ_2 δηλαδή προς τα αριστερά. Έτσι η κρούση δεν μπορεί να συμβεί όταν $-0,38 \text{ m} \leq x_1 \leq 0,38 \text{ m}$ και $-4 \text{ m/s} \leq v_1 \leq -1 \text{ m/s}$



Σχήμα
6.

Σχόλιο

Όλα αυτά που βρήκαμε είναι απολύτως συμβατά με τη θεωρία του τριωνύμου. Το τριώνυμο που προκύπτει από τη σχέση (3) έχει $a > 0$ που σημαίνει ότι εμφανίζει

ελάχιστο με συντεταγμένες $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, \frac{-\Delta}{4\alpha} \right) = (-1, 0)$.

Στο διάστημα από $\left(-\infty, \frac{-\beta}{2\alpha} \right)$ δηλαδή στο $(-\infty, -1)$ η συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και στο διάστημα $\left(\frac{-\beta}{2\alpha}, +\infty \right)$ δηλαδή στο $(-1, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα.

Η ταχύτητα του σώματος Σ_1 παίρνει τιμές από $-4 \text{ m/s} \leq v_1 \leq 4 \text{ m/s}$. Από το διάγραμμα της απώλειας ενέργειας σε συνάρτηση με την ταχύτητα του σώματος Σ_1 φαίνονται ξεκάθαρα τα αποτελέσματα που εξάγαμε.

