

CHỦ ĐỀ 5. LŨY THỪA CỦA MỘT SỐ HỮU TỈ

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT

1. Định nghĩa: Lũy thừa bậc n của một số hữu tỉ x , kí hiệu x^n là tích của n thừa số x (n là số tự nhiên lớn hơn 1)

$$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n \quad (x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1)$$

- Quy ước: $x^1 = x$ với $\forall x \in \mathbb{Q}$; $x^0 = 1$ với $\forall x \neq 0$.

- Khi số hữu tỉ $x = \frac{a}{b}$ ($a, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0$) ta có: $\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$.

- Chú ý: $x^{2n} \geq 0$ với $\forall x \in \mathbb{Q}; \forall n \in \mathbb{N}$.

x^{2n-1} cùng dấu với dấu của x ;

$$(-x)^{2n} = x^{2n} \text{ và } (-x)^{2n-1} = -x^{2n-1}$$

2. Các phép toán về lũy thừa

- Tích hai lũy thừa cùng cơ số:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad (x \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}).$$

- Thương hai lũy thừa cùng cơ số:

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \in \mathbb{Q}^*, m, n \in \mathbb{N}, m > n).$$

- Lũy thừa của lũy thừa:

$$(x^m)^n = x^{m \cdot n} \quad (x \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N}).$$

- Lũy thừa của một tích:

$$(x \cdot y)^n = x^n \cdot y^n \quad (x, y \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}).$$

- Lũy thừa của một thương: $\left(\frac{x}{y}\right)^n = \frac{x^n}{y^n} \quad (x, y \in \mathbb{Q}, y \neq 0, n \in \mathbb{N})$

- Lũy thừa số mũ nguyên âm:

$$\text{Với } x \in \mathbb{Q}, x \neq 0; n \in \mathbb{N}^* \text{ ta có: } x^n = \frac{1}{x^{-n}}$$

- Hai lũy thừa bằng nhau:

* Nếu $x^m = x^n$ thì $m = n$ với $(x \neq 0; x \neq \pm 1)$.

* Nếu $x^n = y^n$ thì $x = y$ nếu n lẻ, $x = \pm y$ nếu n chẵn.

II. BÀI TẬP VÀ CÁC DẠNG TOÁN

Dạng 1. Sử dụng định nghĩa của lũy thừa với số mũ tự nhiên

Phương pháp giải: Sử dụng định nghĩa lũy thừa của một số hữu tỉ:

$x^n = \underbrace{x \cdot x \cdot \dots \cdot x}_n$ ($x \in \mathbb{Q}, n \in \mathbb{N}, n > 1$) và các quy ước

$x^1 = x$ với $\forall x \in \mathbb{Q}$; $x^0 = 1$ với $\forall x \neq 0$

1A. a) Tính: $\left(\frac{-2}{3}\right)^4; \left(-\frac{1}{3}\right)^3; \left(-1\frac{5}{7}\right)^2; (-0,4)^4; (-1,34)^0$.

b) Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

i) $3.27.9$.

ii) $25.5.125$;

iii) $\frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{27}$.

1B. a) Tính; $\left(\frac{-1}{3}\right)^3; \left(-\frac{2}{3}\right)^3; \left(-1\frac{3}{4}\right)^2; (-0,6)^4; (-1,56)^0$

b)Viết các tích sau dưới dạng lũy thừa

i) $2.16.8$

ii) $49.7.343$;

iii) $\frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{27}{64}$

Dạng 2. Tính tích và thương của hai lũy thừa cùng cơ số

Phương pháp giải: Ta sử dụng các công thức về tích hai lũy thừa cùng cơ số:

$$x^m \cdot x^n = x^{m+n} \quad (x \in \mathbb{Q}, m, n \in \mathbb{N})$$

$$x^m : x^n = x^{m-n} \quad (x \in \mathbb{Q}^*, m, n \in \mathbb{N}, m \geq n)$$

2A. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{1}{2}\right)^5 \cdot \left(\frac{1}{4}\right)^2$;

b) $\left(-\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{2}{5}\right)^2$;

c) $\left(\frac{5}{4}\right)^2 : \left(-\frac{35}{24}\right)^2$;

d) $25 \cdot 5^{-1} \cdot 5^0$.

2B. Thực hiện phép tính:

a) $\left(\frac{5}{2}\right)^3 \cdot \left(\frac{4}{5}\right)^3$;

b) $\left(\frac{1}{9}\right)^2 : \left(\frac{1}{3}\right)^3$;

c) $\left(\frac{9}{5}\right)^5 : \left(\frac{27}{-20}\right)^5$;

d) $3^3 \cdot 9^{-1}$.

Dạng 3. Tìm số mũ, cơ số của một lũy thừa

Phương pháp giải: Ta sử dụng các tính chất sau:

- Nếu $x^m = x^n$ thì $m = n$ với ($x \neq 0$; $x \neq \pm 1$).
- Nếu $x^n = y^n$ thì $x = y$ nếu n lẻ, $x = \pm y$ nếu n chẵn.
- Nếu $x^m < x^n$ ($x > 1$) $\Leftrightarrow m < n$.

3A. Điền số thích hợp vào ô vuông :

a) $16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\square}$; b) $-\frac{64}{125} = \square^3$; c) $0,01 = (0,1)^{\square}$.

3B. Điền số thích hợp vào ô vuông :

a) $64 = \square^3$; b) $-\frac{27}{8} = \left(-\frac{3}{2}\right)^{\square}$; c) $0,25 = \square^2$.

4A. Tìm các số nguyên x, y biết:

a) $(x - 1,2)^2 = 4$; b) $(x + 1)^3 = -125$;
c) $3^{4-x} = 27$; d) $(x + 1,5)^8 + (2,7 - y)^{10} = 0$;
e) $3^{-1} \cdot 4^x = \frac{5}{3} \cdot 2^7$; f) $9^{-x} \cdot 27^x = 243$.

4B. Tìm các số nguyên x, y biết:

a) $(x - 1,5)^2 = 9$; b) $(x - 2)^3 = 64$;
c) $2^{4-x} = 32$; d) $(x + 1,5)^2 + (y - 2,5)^{10} = 0$.
e) $2^{-2} \cdot 2^x + 2 \cdot 2^x = 9 \cdot 2^6$; f) $3^{-2} \cdot 3^4 \cdot 3^x = 3^7$.

Dạng 4. So sánh lũy thừa

Phương pháp giải: Để so sánh lũy thừa ta thực hiện như sau:

- Biến đổi các lũy thừa cần so sánh về dạng có cùng số mũ hoặc cùng cơ số.
- Có thể sử dụng lũy thừa trung gian để so sánh.

5A. So sánh:

a) 2^{24} và 3^{16} ; b) 2^{300} và 3^{200} ; c) 71^5 và 7^{20} ;

5B. So sánh:

a) -2^{30} và -3^{20} ; b) $(-5)^9$ và $(-2)^{18}$; c) 35^5 và 6^{10} .

6A. Tìm số nguyên dương n , biết:

a) $25 < 5^n < 625$; b) $3 \cdot 27 > 3^n \geq 9$; c) $16 \leq 8^n \leq 64$.

6B. Tìm $n \in \mathbb{Z}$, biết:

$$a) 49 < 7^n < 343;$$

$$b) 9 < 9^n \leq 243;$$

$$c) 121 \geq 11^n \geq 1.$$

III. BÀI TẬP VỀ NHÀ

7. Tính giá trị biểu thức:

$$a) \frac{(-3)^{10} \cdot 15^5}{25^3 \cdot (-9)^7};$$

$$b) 2^3 + 3\left(\frac{1}{9}\right)^0 - 2^{-2} \cdot 4 + \left[(-2)^2 : \frac{1}{2}\right] \cdot 8.$$

8. Tìm x, y, biết

$$a) (5x+1)^2 = \frac{36}{49};$$

$$b) \left(x - \frac{2}{9}\right)^3 = \left(\frac{2}{3}\right)^6;$$

$$c) (8x-1)^{2x+1} = 5^{2x+1};$$

$$d) (x - 3,5)^2 + \left(y - \frac{1}{10}\right)^4 \leq 0.$$

9. Viết số hữu tỉ $\frac{81}{625}$ dưới dạng một lũy thừa. Nêu tất cả các cách viết.

10. So sánh các số sau:

$$a) 3^{35} \text{ và } 5^{20};$$

$$b) 37^8 \text{ và } 2^{32}.$$

11*. a) Cho biết $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$.

$$\text{Tính } A = 3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 30^2.$$

b) Cho biết $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + 10^3 = 3025$

$$\text{Tính } B = 2^3 + 4^3 + 6^3 + \dots + 20^3.$$

12*. Chứng minh rằng với mọi số nguyên dương n thì:

$$a) A = 3^{n+3} + 3^{n+1} + 2^{n+2} + 2^{n+1} \text{ chia hết cho } 6;$$

$$b) B = 3^{n+3} - 2^{n+3} + 3^{n+2} - 2^{n+1} \text{ chia hết cho } 10;$$

HƯỚNG DẪN

$$1A. a) \left(\frac{-2}{3}\right)^4 = \frac{(-2)^4}{3^4} = \frac{16}{81}; \left(-\frac{1}{3}\right)^3 = \frac{(-1)^3}{3^3} = -\frac{1}{27};$$

$$\left(-1\frac{5}{7}\right)^2 = \left(\frac{-12}{7}\right)^2 = \frac{144}{49}; (-0,4)^4 = \left(\frac{-2}{5}\right)^4 = \frac{16}{625}; (-1,34)^0 = 1$$

$$b) i) 3.27.9 = 3^6$$

$$ii) 25. 5. 125 = 5^6$$

$$iii) \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{9} \cdot \frac{8}{27} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

1B. Tương tự 1A.

$$a) \left(\frac{-1}{3}\right)^3 = -\frac{1}{27}; \quad \left(-\frac{2}{3}\right)^3 = -\frac{8}{27}; \quad \left(-1\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{49}{16}$$

$$(-0,6)^4 = \frac{81}{625} \quad (1,56)^0 = 1$$

$$b) i) 2.16.8 = 2^8 \quad ii) 49.7.343 = 7^6 \quad iii) \frac{3}{4} \cdot \frac{9}{16} \cdot \frac{27}{64} = \left(\frac{3}{4}\right)^6$$

$$2A. \quad a) \frac{1}{512} \quad b) \frac{1}{25} \quad c) \frac{36}{49} \quad d) 5$$

2B. Tương tự 2A

$$a) 8 \quad b) \frac{1}{3} \quad c) -\frac{1024}{243} \quad d) 3$$

$$3A. \quad a) 16 = \left(\frac{1}{2}\right)^{-4} \quad b) -\frac{64}{125} = \left(\frac{-4}{5}\right)^3 \quad c) 0,01 = (0,1)^2 \quad 3B. \text{ Tương tự } 3A$$

4A. a) Từ đề bài suy ra $x - 1,2 = 2$ hoặc $x - 1,2 = -2$. Tìm được

$$x \in \{-0,8; 3,2\}$$

b) Từ đề bài ta có $x = 1 = -5$, tìm được $x = -6$

c) Từ đề bài ta có $3^{4-x} = 3^3$

d) ta chứng minh được $(x + 1,5)^8 + (2,7 - y)^{10} \geq 0 \quad \forall x, y$ vì vậy để

$(x + 1,5)^8 + (2,7 - y)^{10} = 0$ thì $x + 1,5 = 0$ và $2,7 - y = 0$. Từ đó tìm được

$$x = -1,5; y = 2,7.$$

4B. Tương tự 4A

$$a) x \in \{-1,5; 4,5\} \quad b) x = 6 \\ c) x = -1 \quad d) x = -1,5; y = 2,5$$

5A. a) Ta có $2^{24} = 2^{2 \cdot 8}$ và $3^{16} = 3^{2 \cdot 8} = 9^8$ nên $2^{24} < 3^{16}$;

b) $2^{300} = (2^3)^{100} = 8^{100}$ và $3^{200} = (3^2)^{100} = 9^{100}$ nên $2^{300} < 3^{200}$;

c) Ta có $71^5 < 81^5$ mà $81^5 = (3^4)^5 = 3^{20} < 7^{20}$ nên $71^5 < 7^{20}$;

5B. Tương tự 5A

$$a) -2^{30} > -3^{20} \quad b) (-5)^9 < 0 < (-2)^{18} \quad c) 35^5 < 6^{10}$$

6A. a) Từ đề bài suy ra $5^2 < 5^n < 5^4$, tìm được $n = 3$

b) Từ đề bài suy ra $3^4 > 3^n \geq 3^2$, tìm được $n \in \{2; 3\}$

c) Từ đề bài suy ra $2^4 \leq 2^{3n} \leq 2^6$, tìm được $n = 2$

6B. Tương tự 6A

a) $n \in \emptyset$ b) $n = 2$ c) $n \in \{0; 1; 2\}$

7. a) $-\frac{3}{5}$ b) 74

8. a) $x \in \left\{ \frac{-13}{35}; \frac{-1}{35} \right\}$ b) $x = \frac{2}{3}$

c) $x \in \left\{ -\frac{1}{2}; \frac{3}{4} \right\}$ d) $x = \frac{7}{2}; y = \frac{1}{10}$

9. $\frac{81}{625} = \left(\frac{9}{25} \right)^2 = \left(-\frac{9}{25} \right)^2 = \left(\frac{3}{5} \right)^4 = \left(-\frac{3}{5} \right)^4$

10. Tương tự 5A

11*. a) Ta có $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2 = 385$

Suy ra $(1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + 10^2) \cdot 3^2 = 385 \cdot 3^2$

Do đó ta tính được $A = 3^2 + 6^2 + 9^2 + \dots + 30^2 = 3465$.

b) Tương tự ý a) tính được $B = 24200$

12*. a) Từ đề bài ta có $A = 3^{n+1} (3^2 + 1) + 2^{n+1} (2 + 1) = 3^n \cdot 3 \cdot 2 \cdot 5 + 2^n \cdot 2 \cdot 3$

$\Rightarrow$ ĐPCM;

b) Từ đề bài ta có $B = 3^{n+1} (3^2 + 1) - 2^{n+1} (2^2 + 1) = 3^{n+1} \cdot 10 - 2^n \cdot 2 \cdot 5$

$\Rightarrow$ ĐPCM;