

Plan de cours

1. Introduction à la mécanique des fluides 2. Statique des fluides 3. Cinématique des fluides 4. Dynamique 5. Fluides parfaits 6. Fluides réels 7. Les machines hydrauliques 8. Analyse dimensionnelle et similitude

Introduction

→ tenir compte des différentes forces agissant sur les particules fluides en mouvement

Une description quantitative de l'écoulement pourra être déduite d'équations fondamentales locales

1. Forces de surface – tenseur des contraintes Pour un fluide réel (visqueux) en mouvement, les forces de surface ne sont plus seulement normales à la surface : il existe des contraintes tangentielles dues à la viscosité (**frottements**) En un point M d'une surface dS , la force de surface s'exprime comme: $d\mathbf{F} = \mathbf{T} \cdot d\mathbf{S}$

1. Forces de surface – tenseur des contraintes En mécanique des milieux continus, la contrainte peut s'écrire :

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{n}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{bmatrix}$$

Où $\mathbf{T}$ est la contrainte qui s'exerce sur la surface de normale $\mathbf{n}$.

Ce tenseur des contraintes peut se décomposer en une somme d'un tenseur sphérique et d'un tenseur **déviateur de trace nulle**

$$\mathbf{T} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \mathbf{I} + \mathbf{T}'$$

$$\mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_{yy} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_{zz} - \frac{1}{3}(\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) \end{bmatrix}$$

1. Forces de surface - tenseur des contraintes

Ainsi :

$$\sigma_{zz} = \frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz}) + \sigma'_{zz}$$

Donc $p = -\frac{1}{3} (\sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz})$

$$\{Ow = a + \text{orien} \text{ et } \text{ont} + \text{arsy} + \text{osz} = 0 \text{ Donc } *xx + T_{yy} + 132 - 3a = 0$$

$$a = \text{tr}$$

$$T_a = 1.n = a1.n + T_{an} \quad T_o = a n + T_{an} \quad dF = 7 ds = a.n.ds + T_{an}ds$$

1. Forces de surface – tenseur des contraintes $dF = 7, ds$
 $= -p.\tilde{n}.ds + T_y.n.ds$

$$\text{Tr}(T)$$

$$E_t \quad \text{Tr}(T_a) = 0$$

$$\begin{bmatrix} -p & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_{xx} + p & T_{xy} & T_{xz} \end{bmatrix} T = 0 \quad -p \cdot 0 + T_{yx} \cdot 0 + p \cdot T_{yz} \\ \begin{bmatrix} 0 & 0 & -p \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{zx} & T_{zy} & \sigma_{zz} + p \end{bmatrix}$$

Force normale à la surface $ds \rightarrow$ Force de pression hydrostatique

Contraintes

dues à la

viscosité

Contraintes dues à la viscosité du fluide

$x \rightarrow dx$

$y \rightarrow dy$

Où:

2. Application du Principe fondamental de la

dynamique Objectif : établir l'équation fondamentale de la dynamique $\rightarrow$ bilan des forces s'exerçant en surface et en volume sur cet élément fluide : $df = df_v + df_s = \rho dv$ La force de volume est le poids :

$$\rho dv \quad g \quad \text{Forces de surface : } dF_s = 7.\tilde{n} \cdot ds$$

$$T_{ux} \quad T_{yx} \quad T_{zx}$$

$$T_{ya} \quad \sigma_{yy} \quad T_{yz}$$

$$T_{zx} \quad T_{zy} \quad \sigma_{zz} \quad dF_s = dF_x + dF_y + dF_z$$

2. Application du Principe fondamental de la dyn

Composante suivant y des forces de surface : $df_y =$

$$[(T_{yw})_{stex} - (T_{yw})_{sint}] dy dz + [(T_{yx})_{stex} - (T_{yx})_{sint}] dx dz + [(T_{yz})_{stex} - (T_{yz})_{sint}] dx dy$$

(condster = (se), te

Cosulysay = (sy), to any ((rosa) yes = (typ), ter na

x+dx

2. Application du Principe fondamental de la dynamique

2. Application du Principe fondamental de la dyn

Par analogie sur les autres axes :

deg vet as dy da to open any des de tot el dia dx dy

Ce qui peut s'écrire comme :

$$[0 \quad T_{xy} \quad T_{xz}] dF = dT_{yx} \quad 0 \quad T_{zy} \quad T_{zz} dv = \text{div } i \, dy$$

$$[T_{zx} \quad T_{zy} \quad 0 \quad z]$$

Par conséquent : $df = dFs + dp_x = p \, dv \, dv$

$$\text{div } \bar{a} \, dv + p \, dv = p \, dv \, dv$$

$$\frac{d}{dt} \text{div } \bar{a} + p \, q = p \, \text{It}$$

3. Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes

2. Application du Principe fondamental de la dyn On peut alors

faire apparaître les deux parties du tenseur des contraintes : $\tau = -p\bar{I} + Ta$

Pour connaître la loi de comportement du fluide → il faut préciser la relation entre tenseur des contraintes et tenseur des taux de déformation

Fluides de Stokes → le tenseur des contraintes est une fonction continue des taux de déformation et de l'état thermodynamique local. Il est indépendant de la rotation et de la translation de l'élément de fluide. Fluides « newtoniens » = fluides de Stokes linéaires

[

$$p \, 0 \, 0] \quad \text{div } \tau = - \text{div } 0 \, p \, 0 + \text{div } Ta = -\text{grad } p + \text{div } Ta$$

$L \, 0 \, 0 \, p]$ Soit finalement :

$-\text{grad } p + \text{div } Ta + p \, q = p \, \text{it}$ **Equation fondamentale de la dynamique (équation locale)**

composante du tenseur des contraintes de viscosités μ dépendent linéairement des composantes du tenseur des taux de déformation pure G_s

3. Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes Cons.

les éléments tensoriels de G_s

NIH

3. Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes Donc, si le fluide est incompressible, on a $\text{div}(\mathbf{V}) = 0$ Dans ce cas $\tau = 2\mu$

Reprenons l'équation fondamentale de la dynamique :

$$-\text{grad } p + \text{div } \tau + \rho \mathbf{g} = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

Ce tenseur est symétrique Pour fluide isotrope, éléments tensoriels sont liés par

$$\tau = 2\mu \nabla \mathbf{V} + \lambda \text{div}(\mathbf{V}) \mathbf{I}$$

μ : viscosité dynamique en N.s/m² ou en Poiseuille (Pl) λ : viscosité de dilatation

Pour un fluide incompressible newtonien, cette équation devient donc :

$$-\text{grad } p + 2\mu \text{div } \nabla \mathbf{V} + \rho \mathbf{g} = \rho \frac{D\mathbf{V}}{Dt}$$

do

3. Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes On

admettra que dans le cas d'un fluide incompressible, on

$$\text{div } \mathbf{V} = 0$$

3. Fluide newtonien et équation de Navier-Stokes

On utilise la dérivée particulaire : $\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} = \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V}$$

a :

En posant $\mathbf{g} = -g \mathbf{e}_y$ → projection de l'équation de Navier Stokes sur les 3 axes du repère cartésien :

$\frac{D\mathbf{V}}{Dt}$

.

→ expression de l'équation fondamentale de la dynamique

.

$$= -\text{grad } p + \mu \nabla^2 \mathbf{V} + \rho \mathbf{g}$$

$\frac{D}{Dt}$

Dérivée

particulair

Forces de

pression

Forces liées

à la
viscosité
Forces de
volume