

Bài I (2,0 điểm)

Cho hai biểu thức: $A = \frac{x-7}{\sqrt{x}}$ và $B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}$ với $x > 0, x \neq 4$.

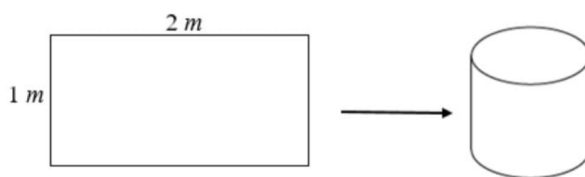
- 1) Tính giá trị của A khi $x = 9$.
- 2) Rút gọn biểu thức B .
- 3) Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.

Bài II (2,5 điểm)

1) Giải bài toán sau bằng cách lập phương trình hoặc hệ phương trình:

Một ca nô đi xuôi dòng 54 km rồi ngược dòng 46 km và tổng thời gian cả đi lẫn về là 4 giờ. Nếu ca nô đi xuôi dòng 81 km và ngược dòng 23 km thì tổng thời gian đi cũng hết 4 giờ. Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước, biết các vận tốc đó không đổi.

2) Mặt xung quanh của một thùng chứa nước hình trụ có chiều cao $1m$ được gò từ một tấm tôn hình chữ nhật có kích thước $1m \times 2m$ (như hình vẽ). Hỏi thùng nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước? (Bỏ qua bề dày của thùng nước và lấy $\pi = 3,14$ làm tròn đến chữ số thập phân thứ hai).



Bài III (2,0 điểm)

1) Giải phương trình $x + 7\sqrt{x} - 8 = 0$.

2) Trong mặt phẳng tọa độ Oxy , cho parabol $(P): y = x^2$ và đường thẳng $(d): y = mx + 4$ (m là tham số).

a) Chứng minh rằng đường thẳng (d) cắt đồ thị (P) tại hai điểm phân biệt.

b) Gọi x_1, x_2 là hoành độ giao điểm của (d) và (P) . Tìm tất cả các giá trị của m để $\sqrt{-x_1} = \sqrt{4x_2}$.

Bài IV (3,0 điểm)

Cho nửa đường tròn (O) có đường kính BC và dây cung EF sao cho các điểm F, C nằm khác phía so với BE . Hai dây cung BE, CF cắt nhau tại H ; tia BF và tia CE cắt nhau tại điểm A . Đường thẳng AH cắt BC tại điểm D . Giả sử $AB < AC$.

1) Chứng minh tứ giác $AEDB$ là tứ giác nội tiếp.

2) Gọi S là giao điểm của EF và CB . Chứng minh FB là phân giác của góc SFD .

3) Chứng minh $\frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$.

4) Tiếp tuyến tại B của nửa đường tròn (O) cắt CF tại điểm P , tiếp tuyến tại C của nửa đường tròn (O) cắt BE tại điểm Q . Chứng minh ba điểm S, P, Q thẳng hàng.

Bài V (0,5 điểm)

Với các số thực không âm a, b, c thỏa mãn $a + b + c = 3$. Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của

biểu thức
$$P = ab + bc + ca - \frac{1}{2}abc.$$

-----**Hết**-----

Chú ý: - Cán bộ coi thi không giải thích gì thêm.
- Học sinh được sử dụng máy tính cầm tay.

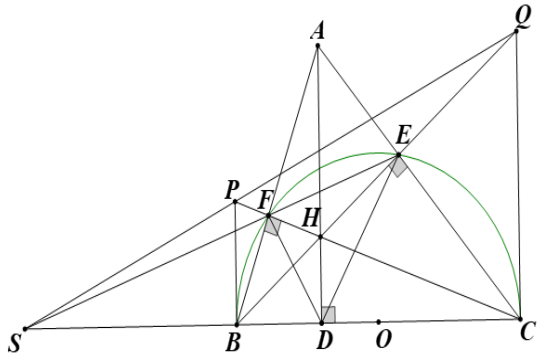
HƯỚNG DẪN CHUNG

- +) Điểm toàn bài để lẻ đến 0,25.
- +) Các cách làm khác nếu đúng vẫn cho điểm tương ứng với biểu điểm của hướng dẫn chấm.
- +) Hướng dẫn chấm gồm 04 trang.

HƯỚNG DẪN CHẤM (ĐỀ CHÍNH THỨC)

Bài	Ý	Đáp án	Điểm
Bài I 2,0 điểm	1)	Tính giá trị của biểu thức A khi $x = 9$.	0,5
		Với $x = 9$ (TMĐK) $\Rightarrow \sqrt{x} = 3$.	0,25
		$A = \frac{2}{3}$. Tính được	0,25
	2)	Rút gọn biểu thức B.	1,0
		$B = \frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{\sqrt{x}}{2-\sqrt{x}} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{x-4}$	0,25
		$B = \frac{\sqrt{x}-2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} - \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+2)}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} + \frac{2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$B = \frac{\sqrt{x}-2-(x+2\sqrt{x})+2x-\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)} = \frac{x-2\sqrt{x}}{(\sqrt{x}+2)(\sqrt{x}-2)}$	0,25
		$B = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2}.$	0,25
	3)	Tìm tất cả các giá trị nguyên của x để biểu thức $P = A.B$ có giá trị nguyên.	0,5
		$P = A.B = \frac{x-7}{\sqrt{x}+2}.$	0,25
		Xét $P = 0 \Leftrightarrow x = 7$ (TM ĐKXD).	

		Xét $P \neq 0$: Ta có hai trường hợp: <i>Trường hợp 1:</i> $x \in \mathbb{Z}, x \neq 7, \sqrt{x}$ là số vô tỉ, suy ra $P \notin \mathbb{Z}$ (loại). <i>Trường hợp 2:</i> $x \in \mathbb{Z}, \sqrt{x} \in \mathbb{Z}$. $\Rightarrow P = \sqrt{x} - 2 - \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \frac{3}{\sqrt{x} + 2} \in \mathbb{Z} \Leftrightarrow \sqrt{x} + 2 \in U(3)$ Giải ra được $x = 1$ (TMĐK). Kết luận: $x \in \{1; 7\}$.	0,25
Bài II 2,5 điểm	1)	<i>Tính vận tốc riêng của ca nô và vận tốc của dòng nước.</i> Gọi vận tốc riêng của ca nô là x (km/h) Vận tốc của dòng nước là y (km/h) với $x > y > 0$ Thời gian ca nô đi xuôi dòng 54 km là: $\frac{54}{x+y}$ giờ Thời gian ca nô ngược dòng 46 km là $\frac{46}{x-y}$ giờ Theo giả thiết ta có: $\frac{54}{x+y} + \frac{46}{x-y} = 4$ (1) Thời gian ca nô đi xuôi dòng 81 km là: $\frac{81}{x+y}$ giờ thời gian ca nô ngược dòng 23 km là $\frac{23}{x-y}$ giờ. Theo giả thiết ta có: $\frac{81}{x+y} + \frac{23}{x-y} = 4$ (2). Từ (1) và (2) ta có hệ phương trình $\begin{cases} \frac{54}{x+y} + \frac{46}{x-y} = 4 & (1) \\ \frac{81}{x+y} + \frac{23}{x-y} = 4 & (2) \end{cases}$ Lấy (2) trừ đi (1) về theo về ta được: $\frac{27}{x+y} - \frac{23}{x-y} = 0 \Leftrightarrow 4x - 50y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{50y}{4}$ thay $x = \frac{50y}{4}$ vào phương trình (1) ta $\frac{4}{y} + \frac{4}{y} = 4 \Rightarrow y = 2 \Rightarrow x = 25$ có: $y = 2$ Kết hợp điều kiện và kết luận vận tốc riêng của ca nô là 25 km/h, vận tốc dòng nước là 2 km/h.	2,0 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25 0,25
	2)	<i>Bồn nước này đựng đầy được bao nhiêu mét khối nước ?</i> $2\pi r = 2 \Leftrightarrow r = \frac{1}{\pi}$ (m). Gọi bán kính đáy của thùng nước hình trụ là r ta có: $V = \pi r^2 h = \pi \left(\frac{1}{\pi}\right)^2 \cdot 1 = \frac{1}{\pi} = 0,32(m^3)$ Thùng nước đựng được số mét khối nước là	0,5 0,25 0,25

Bài III 2,0 điểm	1)	Giải phương trình $x + 7\sqrt{x} - 8 = 0$. Điều kiện: $x \geq 0$. $(\sqrt{x} - 1)(\sqrt{x} + 8) = 0$ Phương trình tương đương $\Leftrightarrow \sqrt{x} = -8 \text{ (vô nghiệm) hoặc } \sqrt{x} = 1$ $\Leftrightarrow x = 1$ Vậy nghiệm của phương trình là $x = 1$.	1,0 0,25 0,25 0,25 0,25
	2a)	Chứng minh (d) luôn cắt (P) tại hai điểm phân biệt ... Xét phương trình hoành độ giao điểm của (P) và (d) $x^2 = mx + 4 \Leftrightarrow x^2 - mx - 4 = 0$ Vì $\Delta C = -4 < 0$ nên phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt với mọi m. Vậy (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt.	0,5 0,25 0,25
	2b)	Tìm tất cả giá trị của m để (d) cắt (P) tại hai điểm phân biệt... $\begin{cases} x_1 + x_2 = m \\ x_1 x_2 = -4 \end{cases} \quad (*)$ Theo định lý Vi-et ta có: Vì x_1, x_2 thỏa mãn $\sqrt{-x_1} = \sqrt{4x_2} \Rightarrow x_1 \leq 0 \leq x_2$ Suy ra $-x_1 = 4x_2 \Leftrightarrow x_1 = -4x_2$ thay vào (*) suy ra $x_2^2 = 1 \Rightarrow x_2 = 1 \text{ (} x_2 \geq 0 \text{)} \Rightarrow x_1 = -4$ Do đó $m = -3$. Thử lại, $m = -3$ thỏa mãn. Vậy $m = -3$.	0,5 0,25 0,25
Bài IV 3,0 điểm	1)	Chứng minh bốn điểm B, C, E, F cùng thuộc một đường tròn.  Vẽ đúng hình đến ý 1) Ta có $\angle BEC = \angle BFC = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn) suy ra BE, CF là các đường cao của tam giác ABC mà BE, CF cắt nhau tại H nên H là trực tâm tam giác ABC Do đó $AH \perp BC$ suy ra $\angle ADB = 90^\circ$ Xét tứ giác $AEDB$ có $\angle AEB = \angle ADB = 90^\circ$ suy ra tứ giác $AEDB$ là tứ giác nội tiếp đường tròn đường kính AB.	1,0 0,25 0,25 0,25
	2)	Chứng minh FB là phân giác của $\angle SFD$.	1,0

	Chứng minh tương tự 1) ta cũng có: $AFDC$ nội tiếp nên $\angle BFD = \angle ACB$,	0,25
	do $BCEF$ nội tiếp (O) nên $\angle AFE = \angle ACB$	0,25
	mà $\angle AFE = \angle SFB$ (2 góc đối đỉnh) suy ra $\angle BFD = \angle SFB$	0,25
	hay FB là phân giác của $\angle SFD$.	0,25
3)	$\frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$ Chứng minh $\frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$.	0,5
	Từ chứng minh ở câu 2) chú ý rằng: $CF \perp FB$ nên CF là phân giác ngoài tại đỉnh F của tam giác SFD .	0,25
	Áp dụng tính chất phân giác ta có: $\frac{CS}{CD} = \frac{BS}{BD} = \frac{FS}{FD} \Leftrightarrow \frac{SB}{SC} = \frac{DB}{DC}$ (1).	0,25
4)	Chứng minh ba điểm S, P, Q thẳng hàng.	0,5
	Ta giả sử $AB < AC \Rightarrow \angle DAC > \angle DAB \Rightarrow \angle DAB > \angle BCF$ hạ $EX, FY \perp BC$ thì $EX > FY$ (góc lớn căng dây lớn hơn) nên S nằm trên tia đối của tia BC . Gọi S' là giao điểm của PQ với BC lập luận tương tự ta cũng có S' nằm trên tia đối của tia BC .	0,25
	Chú ý $BP \parallel CQ$ và BP, QC cắt nhau tại H . Áp dụng định lý Thales ta có: $\frac{S'B}{S'C} = \frac{PB}{QC} = \frac{BH}{HQ} = \frac{DB}{DC}$ (2).	
	Từ (1),(2) suy ra $\frac{SB}{SC} = \frac{S'B}{S'C}$ mà S, S' đều nằm trên tia đối của tia BC suy ra $S' \equiv S$ hay S, P, Q thẳng hàng.	0,25
	Tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = ab + bc + ca - \frac{1}{2}abc.$	0,5

Bài V
0,5
điểm

	Ta có $P = ab + bc + ca - \frac{1}{2}abc = \frac{9 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2} - \frac{1}{2}abc = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}Q$ Với $Q = a^2 + b^2 + c^2 + abc$. Ta tìm giá trị lớn nhất và giá trị nhỏ nhất của biểu thức Q Giả sử $c = \min\{a, b, c\} \Rightarrow 3 = a + b + c \geq 3c \Rightarrow 0 \leq c \leq 1$. Ta có : $Q = (a^2 + 2ab + b^2) + c^2 - 2ab + abc = (3 - c)^2 + c^2 - ab(2 - c)$ Từ giả thiết ta có: $ab(2 - c) \geq 0$ và $0 \leq ab \leq \frac{(a+b)^2}{4} = \frac{(3-c)^2}{4}$ $\Rightarrow \frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) \leq Q \leq (3 - c)^2 + c^2$ Ta có $\frac{1}{4}(c^3 - 3c + 18) = \frac{1}{4}[(c - 1)^2(c + 2) + 16] \geq \frac{16}{4} = 4$, dấu đẳng thức xảy ra tại $a = b = c = 1$. Do $0 \leq c \leq 1 \Rightarrow c(c - 1) \leq 0$ dẫn tới $2c^2 - 6c + 9 = 2c(c - 1) - 4c + 9 \leq 9$. Dấu đẳng thức xảy ra tại $c = 0$, $ab = 0, a + b + c + abc = 3$ hay $c = 0, a = 3, b = 0$ hoặc $c = 0, a = 0, b = 3$. Do đó giá trị nhỏ nhất của Q là 4 khi $a = b = c = 1$. Giá trị lớn nhất của Q là 9 khi $c = 0, a = 3, b = 0$ và các hoán vị của nó.	0,25
	Vậy giá trị lớn nhất của P là $\frac{5}{2}$ khi $a = b = c = 1$. Giá trị nhỏ nhất của Q của P là 0 khi $c = 0, a = 3, b = 0$ và các hoán vị của nó.	0,25