

Μεταβλητή δύναμη συναρτήσει του χρόνου

Ο κύλινδρος του διπλανού σχήματος έχει μάζα $m=8\text{kg}$, ακτίνα $R=1/8\text{m}$ και στην περιφέρειά του είναι τυλιγμένο αβαρές μη εκτατό νήμα.

Στο ελεύθερο άκρο του σχοινιού ασκείται μεταβλητή δύναμη το μέτρο της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο t σύμφωνα με τη σχέση $F=3+0,6t$, $t \rightarrow s$. Ο κύλινδρος τη χρονική στιγμή $t=0$ είναι ακίνητος.

Ο συντελεστής τριβής ολίσθησης μεταξύ του δαπέδου και του κυλίνδρου είναι $\mu=0,1$.

A.

i. Να βρεθεί πότε ο κύλινδρος θα ολισθήσει.

ii. Να βρεθεί ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας του κυλίνδρου την $t=10\text{s}$.

B. Αν το όριο θραύσης του νήματος είναι $T_{\theta\rho}=33\text{N}$

iii. Να βρεθεί η ισχύς της τριβής την $t=40\text{s}$.

iv. Να βρεθεί η τελική ταχύτητα του κυλίνδρου

v. Να γίνει το διάγραμμα της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου συναρτήσει του χρόνου.

Δίνεται το μέτρο της επιτάχυνσης της βαρύτητας $|g|=10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2} m \cdot R^2$.

Θεωρείστε τον οριακό συντελεστή στατικής τριβής ίδιο με τον συντελεστή τριβής ολίσθησης.

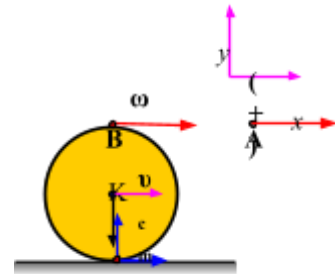
Επιπλέον για τις πράξεις χρησιμοποιείτε κομπιουτεράκι.

Απάντηση

i.

Οι δυνάμεις που δέχεται ο κύλινδρος φαίνονται στο διπλανό σχήμα. Η τάση του νήματος T είναι ίση με την δύναμη F καθώς το σχοινί είναι αβαρές.

Η κίνηση του κυλίνδρου είναι σύνθετη. Μελετάμε την κίνηση του κυλίνδρου ως μία μεταφορική με την ταχύτητα του κέντρου μάζας και μία περιστροφική περί άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.



Μεταφορικά

$$\vec{\Sigma F}_x = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow F + T_{\sigma\tau} = m\alpha_{cm} \quad (1)$$

Στροφικά

$$\vec{\Sigma \tau}_{(cm)} = I_{cm} \vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow FR - T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma} \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}m\alpha_{cm} \quad (2)$$

$$(1) + (2) \Rightarrow 2F = \frac{3}{2}m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{4F}{3m} \quad (3)$$

$$\text{Επιπλέον από την (1) και τη (2) προκύπτει } F = 3T_{\sigma\tau} \quad (4)$$

Από την σχέση (4) προκύπτει $T_{στ}=1+0,2 \cdot t$, $t \rightarrow s$

Για να μην ολισθήσει ο κύλινδρος θα πρέπει:

$$T_{στ} \leq T_{op} \rightarrow 1+0,2 \cdot t \leq \mu mg \rightarrow 1+0,2t \leq 8 \rightarrow t \leq 35s$$

Επομένως ο κύλινδρος θα ολισθήσει τη χρονική στιγμή $t=35s$.

ii.

Από τη σχέση (3) προκύπτει:

$$a_{cm}=0,5+0,1 \cdot t$$

Από τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου θα υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας Δv .

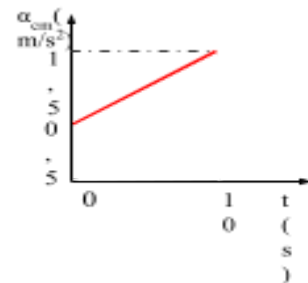
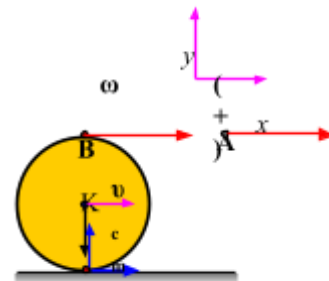
$$\Delta v = 10m/s$$

$$\Delta v = 10m/s \Rightarrow v_{10s} - v_0 = 10m/s \Rightarrow v_{10s} = 10m/s$$

$$\frac{dK}{dt} = \frac{dK}{dt} \Big|_{Met} + \frac{dK}{dt} \Big|_{Στρ} = \vec{F} \cdot \vec{v}_{cm} + \Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = F v_{cm} + T_{στ} v_{cm} + F \cdot R \omega - T_{στ} \cdot R \omega \Rightarrow$$

$$\frac{dK}{dt} = 2F v_{cm}$$



Για $t=10s$ η δύναμη έχει μέτρο $F=9N$ και έτσι προκύπτει:

$$\frac{dK}{dt} = 2 \cdot 9 \cdot 10 \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 180 J/s$$

iii.

Εξετάζουμε αν την χρονική στιγμή που ζητείται η ισχύς της τριβής, έχει κοπεί το σχοινί.

Για να μην κοπεί το σχοινί θα πρέπει:

$$T \leq T_{op} \rightarrow 3+0,6 \cdot t \leq 33 \rightarrow 0,6t \leq 30 \rightarrow t \leq 50s$$

Επομένως το σχοινί θα κοπεί τη χρονική στιγμή $t=50s$ και τη χρονική στιγμή $t=40s$ ο κύλινδρος ολισθαίνει με την άσκηση της δύναμης F .

Ο κύλινδρος μέχρι τη χρονική στιγμή $t=35s$ κυλίεται. Ενώ από τη χρονική στιγμή $t=35s$ έως και τη στιγμή $t=50s$ ο κύλινδρος ολισθαίνει με την άσκηση της δύναμης F .

Από $t: [35s-50s]$

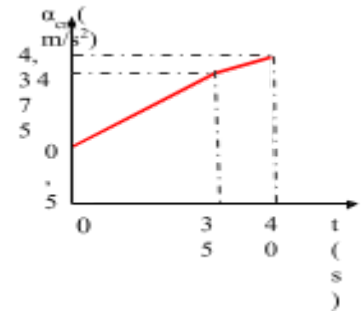
Μεταφορικά

$$\vec{\Sigma F} = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow F + T_{ολ} = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow 3 + 0,6t + 8 = 8\alpha_{cm,2} \Rightarrow \alpha_{cm,2} = \frac{11}{8} + \frac{0,6}{8}t \quad (5)$$

Από τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου θα υπολογιστεί η μεταβολή της ταχύτητας Δv .

Από όπου προκύπτει:

$$\Delta v = 199,375/2 \text{ m/s} \rightarrow v_{40s} = 99,6875 \text{ m/s}$$



Στροφικά

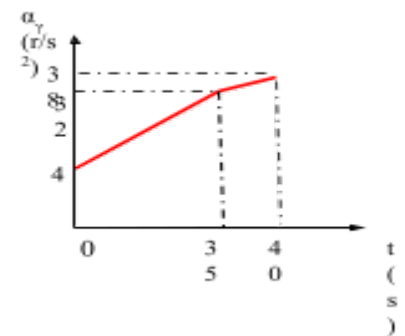
$$\vec{\Sigma \tau}_{(cm)} = I_{cm} \vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow FR - T_{ολ}R = \frac{1}{2}mR^2\alpha_{\gamma} \Rightarrow F - T_{ολ} = \frac{1}{2}mR\alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = 1,2t - 10 \quad (6)$$

Από τη γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου θα υπολογιστεί η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας $\Delta \omega$.

Από όπου προκύπτει:

$$\Delta \omega = 805 \text{ r/s} \rightarrow \omega_{40s} = 805 \text{ r/s}$$

Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του κυλίνδρου είναι $v_{\gamma,40s} = 100,625 \text{ m/s}$

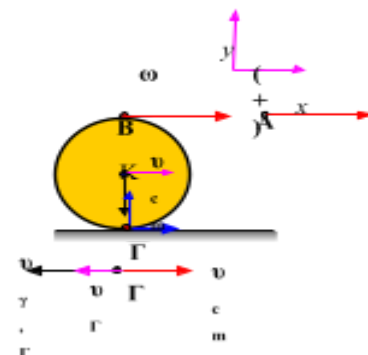


Η ταχύτητα του σημείου επαφής Γ τη χρονική στιγμή $t=40s$ είναι:

$$v_{\gamma,40s} = v_{\gamma,40s} - v_{cm} = 0,9375 \text{ m/s}$$

και η ισχύς της τριβής

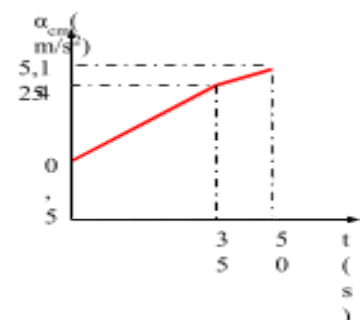
$$P_{Tp} = -T_p \cdot v_{\Gamma} = -8 \cdot 0,9375 \rightarrow P_{Tp} = -7,5 \text{ W}$$

**iv.**

Τη χρονική στιγμή $t=50s$ που κόβεται το νήμα η ταχύτητα του κέντρου μάζας θα υπολογιστεί από τη γραφική παράσταση της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου.

Προκύπτει:

$$\Delta v = 147,1875 \text{ m/s} \rightarrow v_{50s} = 147,1875 \text{ m/s}$$



Από τη γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου θα υπολογιστεί η μεταβολή της γωνιακής ταχύτητας $\Delta\omega$ από όπου προκύπτει:

$$\Delta\omega = 1245 \text{ r/s} \rightarrow \omega_{50s} = 1245 \text{ r/s}$$

Η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του κυλίνδρου είναι $v_{\Gamma,50s} = 155,625 \text{ m/s}$

Από $t = 50\text{s}$ έως ότου επιτευχθεί κύλιση.

Τη στιγμή που κόβεται το νήμα ο τροχός ολισθαίνει με την ταχύτητα του σημείου επαφής να είναι προς τα αριστερά.

$$v_{\Gamma,50s} = v_{\Gamma} - v_{cm} = 8,4375 \text{ m/s}$$

Μεταφορικά

$$\vec{\Sigma F} = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow T_{ολ} = m\alpha_{cm,2} \Rightarrow 8 = 8\alpha_{cm,3} \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm,3} = 1 \text{ m/s}^2 \quad (7)$$

Στροφικά

$$\vec{\Sigma \tau}_{(cm)} = I_{cm} \vec{\alpha}_{\gamma} \Rightarrow -T_{ολ} R = \frac{1}{2} m R^2 \alpha_{\gamma} \Rightarrow -T_{ολ} = \frac{1}{2} m R \alpha_{\gamma} \Rightarrow \alpha_{\gamma} = -16 \text{ r/s}^2 \quad (8)$$

Το μέτρο της επιτρόχιας επιτάχυνσης των σημείων της περιφέρειας είναι $a_{e,\Gamma} = 2 \text{ m/s}^2$ με φορά προς τα δεξιά.

$$v_{cm} = v_{αρχ} + \alpha_{cm} \Delta t \Rightarrow v_{cm} = 147,1875 + 1 \cdot \Delta t, \text{ (μέτρο)} \quad \text{και}$$

$$v_{\Gamma,\Gamma} = v_{\gamma,αρχ} - \alpha_{e,\Gamma} \Delta t \Rightarrow v_{\Gamma,\Gamma} = 155,625 - 2 \cdot \Delta t, \text{ (μέτρο)}$$

$$\text{Όταν } v_{cm} = v_{\Gamma,\Gamma} \rightarrow 147,1875 + 1 \cdot \Delta t = 155,625 - 2 \cdot \Delta t \Rightarrow 3 \Delta t = 8,4375 \Rightarrow \Delta t = 2,8125 \text{ s}$$

Η ολίσθηση θα σταματήσει την χρονική στιγμή $t_3 = 52,8125 \text{ s}$

$$\text{Η ταχύτητα του τροχού θα είναι } v_{cm} = 147,1875 + 2,8125 \Rightarrow v_{cm} = 150 \text{ m/s}$$

ν.

$$t: [0-35] \text{ s} \rightarrow \alpha_{cm,1} = 0,5 + 0,1 \cdot t$$

$$t: [35-50] \text{ s} \rightarrow \alpha_{cm,2} = \frac{11}{8} + \frac{0,6}{8} t$$

$$t: (50-52,8125) \text{ s} \rightarrow \alpha_{cm,3} = 1 \text{ m/s}^2$$

$$t > 52,8125 \text{ s} \rightarrow \alpha_{cm,4} = 0$$

