

Лекція 11

Паралельні змішані ланцюги змінного струму

Роздивимось паралельно увімкнені опір та реактивний елемент (індуктивність чи ємність, рис. 1).

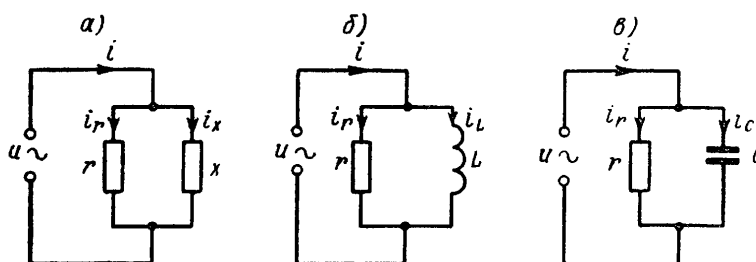


Рисунок 1

Згадаємо 1 закон Кірхгофа, застосований до одного з вузлів схеми та зробимо розрахунки паралельно для двох схем.

Коло r,L	Коло r,C
$i = i_r + i_L$ $i = \frac{u}{r} + \frac{1}{L} \int u dt.$	$i = i_r + i_C$ $i = \frac{u}{r} + C \frac{du}{dt}.$
$u_k = Ue^{j\omega t}, \quad i_k = Ie^{j\omega t}$	
$I = \frac{U}{r} + \frac{U}{j\omega L}.$	$I = \frac{U}{r} + Uj\omega C.$
<p>Загальний вираз для паралельного кола</p> $I = U \left(\frac{1}{r} + \frac{1}{jx} \right) = U(g - jb),$ <p>де $g = \frac{1}{r}$ - провідність активної гілки; $b = \frac{1}{x}$ - провідність реактивної гілки. Комплексна вхідна провідність кола</p> $Y_{\text{вх}} = \frac{I}{U} = g - jb = y_{\text{вх}} e^{-j\varphi}$	
<p>Векторна діаграма</p> <p style="text-align: center;">Рисунок 2а</p>	<p>Векторна діаграма</p> <p style="text-align: center;">Рисунок 2б</p>

Модуль вхідної провідності

$$y_{ex} = \sqrt{g^2 + b^2}$$

Комплексний вхідний опір

$$Z_{ex} = \frac{1}{\frac{1}{r} + \frac{1}{jx}} = \frac{r \cdot jx}{r + jx}$$

тобто для розрахунку вхідного опору розгалуженого кола необхідно аналогічно до кіл постійного струму поділити добуток опорів r та x на їх суму.

Як видно з діаграм (рис. 2) кут зсуву між прикладеною напругою та струмом нерозгалуженої частини визначається співвідношенням

$$tg\varphi = \frac{b}{g}$$

Добротність кола з паралельного з'єднання активного та реактивного опорів

$$Q_x = |\varphi| = \frac{|b|}{g} = \frac{r}{|x|}$$

В загальному випадку паралельне змішане коло може бути складене з n -елементів з комплексними вхідними провідностями (рисунок 3)

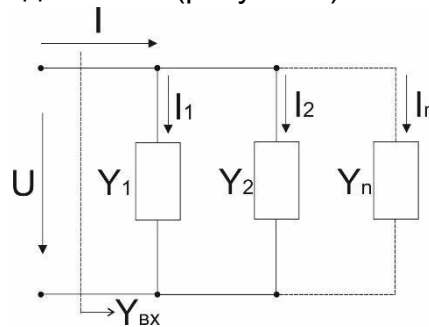


Рисунок 3

$$Y_1 = g_1 + jb_1, \dots Y_n = g_n + jb_n$$

Використаємо 2-й закон Кірхгофа

$$\begin{aligned} \dot{I} &= \dot{U}Y_1 + \dot{U}Y_2 + \dots + \dot{U}Y_n = \dot{U}(Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n) = \dot{U}Y_{BX} \\ \Rightarrow Y_{BX} &= \frac{\dot{I}}{\dot{U}} \end{aligned}$$

Таким чином комплексна вхідна провідність

$$Y_{BX} = \sum_{i=1}^n Y_i = \sum_{i=1}^n (g_i + jb_i) = g_{BX} + jb_{BX}$$

Необхідно пам'ятати, що реактивна провідність підсумовується алгебраїчно, тобто при різних знаках, може статися так, що $b_{BX} = \sum b_i = 0$.

Кут зсуву фаз між U та вхідним струмом $\varphi = \arctg\left(-\frac{b_{BX}}{g_{BX}}\right)$.

Еквівалентні схеми пасивного двополюсника

Будь-яке електричне коло (навіть дуже складне) для живильного джерела є двополюсником з деяким вхідним опором (рис. 4)

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}}{I} = r_{\text{вх}} + jx_{\text{вх}}$$

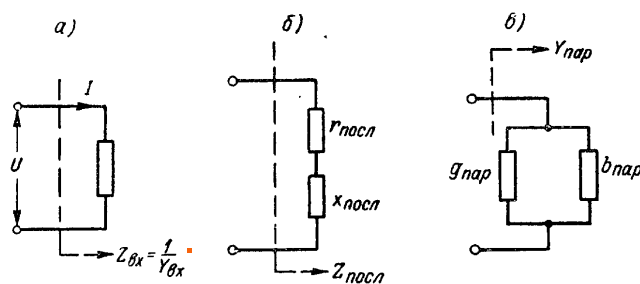


Рисунок 4

Цьому виразу відповідає схема, складена з послідовно ввімкнених активного опору $r_{\text{посл}} = r_{\text{вх}}$ та реактивного опору $x_{\text{посл}} = x_{\text{вх}}$ (рис. б), тобто вхідний опір можна записати

$$Z_{\text{посл}} = Z_{\text{вх}} = r_{\text{посл}} + jx_{\text{посл}}$$

Вхідна провідність може бути записана так

$$Y_{\text{вх}} = g_{\text{вх}} - jb_{\text{вх}}$$

Цей вираз відповідає схемі, складеній з паралельно ввімкнутих активної $g_{\text{пар}} = g_{\text{вх}}$ та реактивної провідності $b_{\text{пар}} = b_{\text{вх}}$ (рис. в). Вхідна провідність для такого кола

$$Y_{\text{пар}} = Y_{\text{вх}} = g_{\text{пар}} - jb_{\text{пар}} \quad (3)$$

Еквівалентні схеми б) і в) будуть рівноцінними, якщо їх вхідні опори (провідності) рівні між собою та дорівнюють вхідному опору (провідності) початкового двополюсника, тобто

$$Z_{\text{посл}} = Z_{\text{пар}} = Z_{\text{вх}}$$

або

$$Y_{\text{пар}} = Y_{\text{посл}} = Y_{\text{вх}} = \frac{1}{Z_{\text{вх}}} \quad (4)$$

Знайдемо співвідношення між параметрами елементів, які входять в склад кожної з еквівалентних схем. З (4) з урахуванням (2) і (3) випливає, що для перетворення паралельної схеми на послідовну повинна виконуватися умова

$$r_{\text{посл}} + jx_{\text{посл}} = \frac{1}{g_{\text{пар}} - jb_{\text{пар}}} = \frac{1}{g_{\text{пар}} - jb_{\text{пар}}} \cdot \frac{(g_{\text{пар}} + jb_{\text{пар}})}{(g_{\text{пар}} + jb_{\text{пар}})} = \frac{g_{\text{пар}} + jb_{\text{пар}}}{g_{\text{пар}}^2 + b_{\text{пар}}^2} = \frac{g_{\text{пар}}}{g_{\text{пар}}^2 + b_{\text{пар}}^2} + \frac{jb_{\text{пар}}}{g_{\text{пар}}^2 + b_{\text{пар}}^2}$$

$$r_{\text{посл}} + jx_{\text{посл}} = \frac{g_{\text{пар}}}{g_{\text{пар}}^2 + b_{\text{пар}}^2} + j \frac{b_{\text{пар}}}{g_{\text{пар}}^2 + b_{\text{пар}}^2} \quad (5)$$

де $g_{\text{пар}}^2 + b_{\text{пар}}^2 = |y_{\text{пар}}|^2$.

Вираз (5) дозволяє переходити від паралельної еквівалентної схеми до послідовної схеми.

Аналогічно знайдемо зворотний зв'язок, тобто визначимо як від послідовної схеми перейти до паралельної. Для цього запишемо

$$g_{\text{пар}} - jb_{\text{пар}} = \frac{1}{r_{\text{посл}} + jx_{\text{посл}}}$$

отримаємо

$$g_{\text{пар}} - jb_{\text{пар}} = \frac{r_{\text{посл}}}{r_{\text{посл}}^2 + x_{\text{посл}}^2} - j \frac{x_{\text{посл}}}{r_{\text{посл}}^2 + x_{\text{посл}}^2} \quad (6)$$

Знайдемо з (6) опори паралельної схеми

$$r_{\text{пар}} = \frac{1}{g_{\text{пар}}} = \frac{r_{\text{посл}}^2 + x_{\text{посл}}^2}{r_{\text{посл}}} \quad (7.1)$$

$$x_{\text{пар}} = \frac{1}{b_{\text{пар}}} = \frac{r_{\text{посл}}^2 + x_{\text{посл}}^2}{x_{\text{посл}}} \quad (7.2)$$

Формули (5),(6),(7) дуже полегшують розрахунки.

Важливо відмітити, що хоча $Z_{\text{посл}} = \frac{1}{Y_{\text{пар}}}$ та $z_{\text{посл}} = \frac{1}{y_{\text{пар}}}$, але

$$r_{\text{посл}} \neq \frac{1}{g_{\text{пар}}} \quad \text{та} \quad x_{\text{посл}} \neq \frac{1}{b_{\text{пар}}}.$$

Наприклад, розглянемо **схему з малими активними втратами** ($r_{\text{посл}} \ll |x_{\text{посл}}|$) при послідовному включенні, тобто $Z_{\text{посл}} \cong |X_{\text{посл}}|$ і згідно з (7) маємо

$$r_{\text{пар}} = \frac{r_{\text{посл}}^2 + x_{\text{посл}}^2}{r_{\text{посл}}} \approx \frac{x_{\text{посл}}^2}{r_{\text{посл}}},$$

$$x_{\text{пар}} = \frac{r_{\text{посл}}^2 + x_{\text{посл}}^2}{x_{\text{посл}}} \approx \frac{x_{\text{посл}}^2}{x_{\text{посл}}} \cong x_{\text{посл}}.$$

Таким чином, в даному випадку при переході від послідовної до паралельної схеми реактивний опір залишається незмінним, а активний - зростає у

$$\frac{r_{\text{пар}}}{r_{\text{посл}}} = \frac{x_{\text{посл}}^2}{r_{\text{посл}}} \frac{1}{r_{\text{посл}}} = \frac{x_{\text{посл}}^2}{r_{\text{посл}}^2} = Q_{\text{посл}}^2 \text{ разів.}$$

Якщо виконаємо зворотний перерахунок паралельної схеми до послідовної, тоді

$$r_{\text{пар}} \cong |x_{\text{пар}}|, \text{ тобто } g_{\text{пар}} \cong |b_{\text{пар}}|,$$

отримаємо

$$y_{\text{пар}} \approx |b_{\text{пар}}| \text{ та}$$

$$r_{\text{посл}} \approx \frac{g_{\text{пар}}}{b_{\text{пар}}^2} = \frac{x_{\text{пар}}^2}{r_{\text{пар}}},$$

$$x_{\text{посл}} \approx \frac{1}{b_{\text{пар}}} = x_{\text{пар}}.$$

Реактивний опір знову залишається незмінним, а активний опір зменшується в

$$\frac{r_{\text{посл}}}{r_{\text{пар}}} = \frac{x_{\text{пар}}^2}{r_{\text{пар}}} \frac{1}{r_{\text{пар}}} = \frac{r_{\text{пар}}^2}{x_{\text{пар}}^2} = Q_{\text{пар}}^2 \text{ разів.}$$

Наприклад, як еквівалентна схема **котушки індуктивності** може бути прийнята схема з послідовного включення активного і реактивного елементів (рис. 5а):

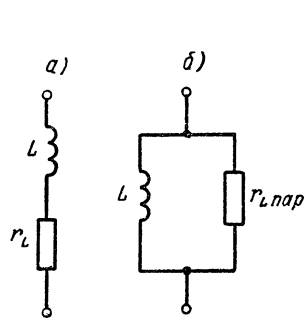


Рисунок 5

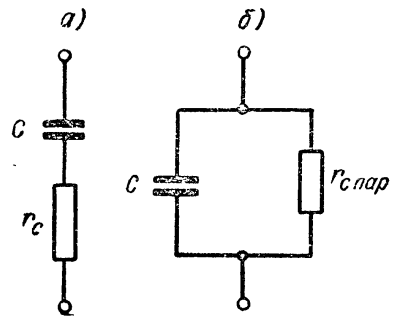


Рисунок 6

Але! Зазвичай $R_L \ll \omega L$, тому можна представити схему у вигляді (рис. 5б), де

$$r_{нар} = \frac{\omega^2 L^2}{r_L} = R_L$$

індуктивність залишається такою ж, а активний опір

Аналогічно для заміни **конденсатора** використовують рис. 6. Або, враховуючи, що $R_C \ll \frac{1}{\omega C}$

$$r_{Cнар} \approx \frac{1}{\omega^2 C^2 r_C} = R_C$$