تمرين 01

(c) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- عين على الدائرة (c) النقط :F,E,C,B,A المعلمة بالاعداد : $\frac{13\pi}{4},\frac{-2\pi}{3},\frac{5\pi}{6},-\frac{5\pi}{4},\frac{\pi}{3}$ على الترتيب

2- تحقق في كل حالة من الحالات التالية إن كان العددين الحقيقيين α و β قيسان لنفس القوس :

$\alpha=\frac{\pi}{3}$ و $\beta=\frac{13\pi}{3}$ ، $\alpha=\frac{-5\pi}{4}$ و $\beta=\frac{17\pi}{4}$ ، $\alpha=\frac{14\pi}{3}$ و $\beta=\frac{-35\pi}{2}$ ، $\alpha=\frac{-\pi}{4}$ ،

$\beta=\frac{69\pi}{12}$

تمرين 02

(c) الدائرة المثلثية المرفقة بالمعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

1- إذا علمت أن قيس الزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ هو $\frac{\pi}{6}$ عين قيس كل من الزوايا الموجهة التالية :

$\left(2\vec{u},3\vec{v}\right)$ ، $\left(\vec{u},-3\vec{v}\right)$ ، $\left(\vec{v},\vec{u}\right)$ ، $\left(-\vec{u},-\vec{v}\right)$

2- في كل حالة من الحالات التالية أوجد القيس الرئيسى للزاوية الموجهة $\left(\vec{u},\vec{v}\right)$ التي قيسها $\alpha\ rad$

$\alpha=\frac{9\pi}{2}$ ، $\alpha=\frac{-5\pi}{3}$ ، $\alpha=\frac{20\pi}{3}$ ، $\alpha=47\pi$ ، $\alpha=\frac{2019\pi}{4}$ ، $\alpha=-\frac{160\pi}{6}$ ،

$\alpha=\frac{1469\pi}{6}$

تمرين 03

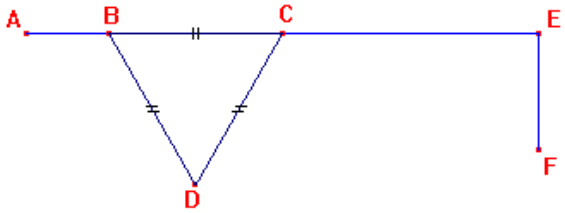
$ABCD$ مربع مركزه O حيث : $\left(\vec{AB};\vec{AD}\right)=\frac{\pi}{2}\ [2\pi]$

حدد أقياس الزوايا التالية :

$\left(\vec{AB};\vec{AC}\right)$ ، $\left(\vec{BO};\vec{BC}\right)$ ، $\left(\vec{CO};\vec{DA}\right)$ ، $\left(\vec{DB};\vec{AB}\right)$ و $\left(\vec{AO};\vec{CB}\right)$.

تمرين 04

نعتبر النقاط A,B,C,E في استقامية



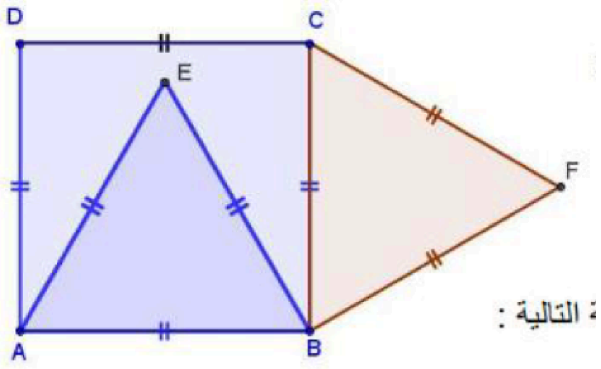
BCD مثلث متقايس الأضلاع .المستقيم (EF) يعامد (AE) .

عين قيسا للزوايا الموجهة التالية

(1 $\left(\vec{CE},\vec{CD}\right)$ (2 $\left(\vec{AB},\vec{BD}\right)$

(3 $\left(\vec{BD},\vec{EF}\right)$ (4 $\left(\vec{CE},\vec{EF}\right)$

تمرين 05



$ABCD$ شبه منحرف قائم في A و D قاعدته $[AB]$ و $[CD]$ حيث $AD = DC$ و $AB = AC$

عين القيس الرئيسي لكل من الزوايا الموجهة التالية :

$\left(\vec{DC},\vec{BA}\right)$ ، $\left(\vec{AD},\vec{AC}\right)$ ، $\left(\vec{BC},\vec{BA}\right)$ ، $\left(\vec{BA},\vec{AD}\right)$ ، $\left(\vec{BC},\vec{AD}\right)$

تمرين 06

المستوي موجه . في الشكل المقابل لدينا :

- ABCD مربع
- ABE مثلث متقايس الأضلاع
- BCF مثلث متقايس الأضلاع

☺ عين القيس الرئيسي لكل من الزوايا الموجهة التالية :

$\left(\vec{AB},\vec{AD}\right)$; $\left(\vec{BF},\vec{FC}\right)$; $\left(\vec{AD},\vec{CB}\right)$

$\left(\vec{EB},\vec{CB}\right)$ $\left(\vec{DC},\vec{CF}\right)$; $\left(\vec{ED},\vec{EA}\right)$

تمرين 07

ABC مثلث كيفي . نضع D نظيرة B بالنسبة لمنتصف [AC] و E نظيرة B بالنسبة إلى A

1- أثبت أن $\left(\vec{CA},\vec{CB}\right) = \left(\vec{AC},\vec{AD}\right)$ ثم $\left(\vec{BC},\vec{BA}\right) = \left(\vec{AD},\vec{AE}\right)$

2- استنتج أن : $\left(\vec{AB},\vec{AC}\right)+\left(\vec{BC},\vec{BA}\right)+\left(\vec{CA},\vec{CB}\right)=\pi+2k\pi$

تمرين 08

1- عين قيمة $\cos x$ و $\sin x$ من أجل : $x=-\frac{\pi}{4}$ ، $x=\frac{2\pi}{3}$ ، $x=-\frac{5\pi}{3}$ ، $x=\frac{29\pi}{6}$

2- اثبت أنه من أجل كل عدد حقيقي x يكون :

$$\sin\left(\frac{5\pi}{2}+x\right)-2\cos\left(\frac{21\pi}{2}-x\right)-3\sin(x-3\pi)+\sin\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)=\sin x$$

تمرين 09

1- أنشر $\cos cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$ ثم حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلة :

$\sqrt{3}\cos cos(x)-sinx=1$ ،

2- أحسب : $\cos cos\left(\frac{\pi}{12}\right)$ و $\sin sin\left(\frac{\pi}{12}\right)$

3- أنشر $\cos\left(x-\frac{\pi}{4}\right)$ ثم حل في المجال $[0,\pi]$ المعادلة : $\cos cos(x)+sinx=\sqrt{2}$ ،

4- أحسب : $\cos cos\left(\frac{\pi}{8}\right)$ و $\sin sin\left(\frac{\pi}{8}\right)$

تمرين 10

1- أحسب $\cos\frac{\pi}{12}$ و $\sin\frac{5\pi}{12}$ لاحظ أن : $\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}$ و $\frac{5\pi}{12}=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{6}$

2- علما ان : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$ ، أحسب $\sin\frac{7\pi}{12}$ ،ثم إستنتج $\sin\frac{13\pi}{12}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$

لاحظ أن : $\frac{13\pi}{12}=\frac{\pi}{2}+\frac{7\pi}{12}$ ، $-\frac{\pi}{12}=\frac{\pi}{2}-\frac{7\pi}{12}$

تمرين 11

1- x عنصر من $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \pi\right]$ حيث : $\sin sin\ x = \frac{2}{3}$ احسب $\cos cos\ x$

2- x عنصر من $\left[0\ ;\ \frac{\pi}{2}\right]$ حيث : $\cos cos\ x = \frac{3}{4}$ احسب $\sin sin\ x$

3- x عنصر من $\left[\frac{\pi}{2}\ ;\ \frac{3\pi}{2}\right]$ حيث: $\cos cos\ x = \frac{-4}{5}$ احسب $\sin sin\ x$

4- x عنصر من $[-\ \pi\ ;\ 0]$ حيث : $x = \frac{-5}{7}$, احسب $\cos cos\ x$

تمرين 12

ليكن العددان A و B حيث :

$$A = cos\frac{2\pi}{18} + cos\frac{7\pi}{18} + cos\frac{11\pi}{18} + cos\frac{16\pi}{18}$$

$$B = sin\frac{2\pi}{18} + sin\frac{7\pi}{18} + sin\frac{11\pi}{18} + sin\frac{16\pi}{18}$$

- بسط A و B

تمرين 13

بسط العبارات التالية :

1- $A(x) = \cos cos\ (\pi - x) + \cos cos\ (x + 12\pi)$

2- $B(x) = \sin sin\ (\pi + x) \times \sin sin\ (x + 13\pi)$

3- $C(x) = \cos cos\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \cos cos\ (3\pi + x) + sin\left(x - \frac{3\pi}{2}\right)$

4- $D(x) = (\sin sin\ (-x) + cos(-x))^2 + (cos\ x + \sin sin\ x)^2$

5- $\cos cos\ (x + \pi) + \sin sin\ (-x + 3\pi)\ ]^2 + sin^2(x + \pi) + cos^2(-x + 3\pi)$

6- $F(x) = \sin sin\ (12\pi - x) - \sin sin\ (15\pi + x)$

7- $\left(\frac{19\pi}{2} - x\right) - 3\cos cos\ (3\pi + x) + \sin sin\left(\frac{47\pi}{2} - x\right) - 3sin(x - 15\pi)$

تمرين 14

- حل المعادلة : $\cos cos\left(x - \frac{\pi}{3}\right) = cos\left(2x + \frac{\pi}{6}\right)$ على المجال $[0, 2\pi]$
- مثل صور الحلول على الدائرة المثلثية .

تمرين 15

1- عين في كل حالة من الحالات التالية العدد x من المجا ل $[0.\ 2\pi]$ (دون استعمال الحاسبة)

$$\cos cos\ x = 0;\ \ \sin sin\ x = \frac{-\sqrt{3}}{2}\ ;\ \sin sin\ x = \frac{-\sqrt{3}}{2}$$

$$\sin sin\ x = \frac{3}{2}\ ;\ \cos cos\ x = \frac{-1}{\sqrt{2}}\ ;\ 2\sin sin\ x - 1 = 0$$

2- حل في المجال $[-\ \pi;\ \pi]$ المعادلات التالية:

$$\cos cos\ x = \frac{\sqrt{2}}{2}\ \ ;\ \cos cos\ x = \frac{1}{2}\ ;\ 2\sin sin\ x + \sqrt{3} = 0$$

$$\sin sin\ x = 1\ ;\ \sin sin\ x = \frac{\sqrt{3}}{2}\ ;\ 2\cos cos\ x + \sqrt{2} = 0$$

تمرين16

علما أن $\frac{\pi}{5} = \frac{\sqrt{5}+1}{4}$ احسب : $\sin sin\ \frac{\pi}{5}$, $\cos cos\ \frac{4\pi}{5}$, $\sin sin\ \frac{4\pi}{5}$, $\cos cos\ \frac{6\pi}{5}$

$\sin sin\ \frac{6\pi}{5}$, $\cos cos\ \frac{\pi}{10}$, $\sin sin\ \frac{\pi}{10}$

تمرين17

1- حل في $\Re$ مايلي

$\cos\left(2x-\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}$	$\sin\left(2x+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cos x+\sin x=0$
$\sin 2x=\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$	$2\cos^2 x-3\cos x-2=0$	$4\cos^2 x+2\left(1-\sqrt{3}\right)\cos x-\sqrt{3}=0$

2- حل في المجال $[-\pi\ ,\pi]$ مايلي :

$2\sin x+\sqrt{2}=0$	$2\sin x+\sqrt{2}\le 0$	$1-\sqrt{2}\cos\left(x-\frac{\pi}{3}\right)\le 0$

تمرين 18

x و y عددان حقيقيان ، إذا علمت أن : $\cos(x+y)=\cos x\cos y-\sin x\sin y$

1/ إستنتج $\cos 2x$ ثم حل في المجال $[-\pi\,,\pi]$ المعادلة : $\sin 2x-\cos^2 x+\sin^2 x=0$

2/مثل صور هذه الحلول على الدائرة المثلثية

تمرين 19

1- حل في المجال $[-\pi;+\pi]$ المعادلة : $\sqrt{2}sin(x)+1=0$

ثم استنتج الحلول على المجال : $[0;2\pi]$.

2- حل في R المعادلة $2y^2+7y+3=0$ ثم إستنتج حلول المعادلة

$$2cos^2(x)+7cos(x)+3=0$$

3- بين أن :

$$sin\left(\frac{95\pi}{100}\right)+sin\left(\frac{97\pi}{100}\right)+sin\left(\frac{103\pi}{100}\right)+sin\left(\frac{105\pi}{100}\right)=0$$

تمرين 01

المستوي منسوب إلى المعلم $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$ المتعامد والمتجانس

1 / أحسب ألإحداثيات القطبية للنقطتين A و B المعرفتين بالإحداثيتين الديكارتيتين كمايلي : $A(-1,1)$ ، $B\left(-\frac{3}{2},\frac{3\sqrt{3}}{2}\right)$

2/ أحسب ألإحداثيات الديكارتية للنقطتين C و D المعرفتين بالإحداثيتين القطبيتين كمايلي : $C\left(3,\frac{\pi}{6}\right)$ ، $D\left(4,\frac{-7\pi}{6}\right)$

المتعامد والمتجانس $\left(O,\vec{i},\vec{j}\right)$

تمرين 02

لتكن النقطة A إحداثياتها الديكارتية $\left(\sqrt{6},\sqrt{2}\right)$ و M نقطة حيث $AM=2$ و $\left(\overrightarrow{AO},\overrightarrow{AM}\right)=\frac{7\pi}{12}$

1/ عين الإحداثيات القطبية للنقطة A

2/ تحقق أن : $\left(\vec{i},\overrightarrow{AM}\right)=-\frac{\pi}{4}$

3 / أحسب الإحداثيات القطبية للنقطة B المعرفة ب $\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{AM}$ ثم إستنتج إحداثيات النقطة M

تمرين 03

تمرين 04

$(O,\vec{i},\vec{j})$ معلم للمستوي و لتكن النقاط D,C,B,A المعرفة بـ

$\overrightarrow{OA}=-2\vec{i}-\vec{j}$ و $\overrightarrow{OB}=\sqrt{3}\vec{i}+\vec{j}$ و $OC=4$,

$(\vec{i},\overrightarrow{OC})=-\frac{\pi}{6}$ و $OD=2$ $(\vec{i},\overrightarrow{OD})=\frac{\pi}{3}$

1ـماهي الإحداثيات القطبية للنقطتين C و D ثم عين الإحداثيات الديكارتية لـ C و D

2ـعين الإحداثيات القطبية للنقطة B ثم إستنتج أن النقط C,B,O تقع على إستقامة واحدة

3ـباستعمال الإحداثيات الديكارتية لـ A و D بين أن النقاط D,A,O ليست على إستقامة واحدة

المستوي منسوب إلى معلم متعامد و متجانس $(O,\vec{i},\vec{j})$

A نقطة إحداثياتها الديكارتية $(\sqrt{6},\sqrt{2})$ و M نقطة أخرى حيث $AM=\sqrt{3}$ و $(\vec{AO},\vec{AM})=\frac{7\pi}{12}+2k\pi$

1ـعين الإحداثيات القطبية للنقطة A

2ـتحقق أن $(\vec{i},\vec{AM})=-\frac{\pi}{4}+2k\pi$

3ـأحسب الإحداثيات اقطبية للنقطة B المعرفة بـ $\vec{OB}=\vec{AM}$ ثم إستنتج إحداثيات النقطة M

-أثبت أن : $\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2=\frac{\sqrt{3}+2}{4}$

2-عين دون استعمال الآلة الحاسبة القيمة المضبوطة لـــ : $\sin\frac{7\pi}{12}$ علما أن : $\cos\frac{7\pi}{12}=\frac{\sqrt{2}-\sqrt{6}}{4}$.

3-استنتج قيمتي : $\sin\frac{13\pi}{12}$ و $\cos\left(-\frac{\pi}{12}\right)$.

عين في المستوي المنسوب إلى المعلم $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$ النقط التالية المعرفة

1- باحداثياتها القطبية: $A\left(1;\frac{\pi}{6}\right)$. اوجد الاحداثيات الديكارتية

2- باحداثياتها الديكارتية $C\left(\frac{1}{2};-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ اوجد الاحداثيات القطبية.