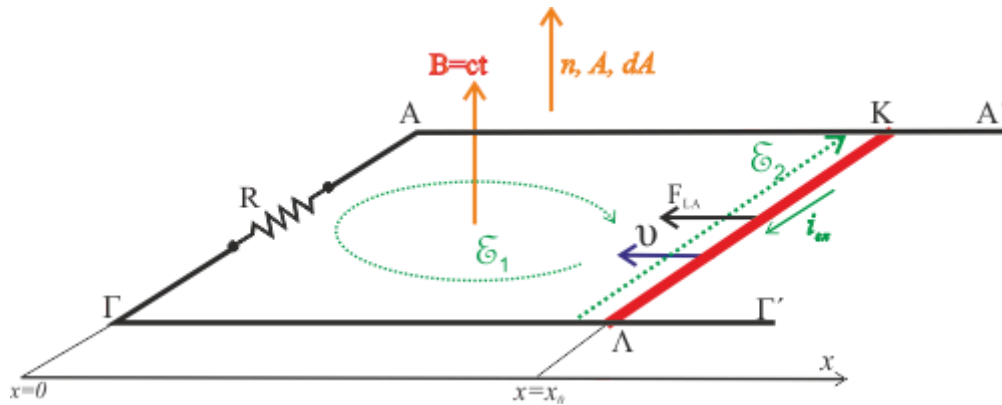


Συρμάτινο Πλαίσιο Με Κινητή Πλευρά Εντός Μεταβαλλόμενου Μαγνητικού Πεδίου



Να μελετηθεί η κίνηση της ελεύθερης πλευράς ΚΛ ορθογώνιου συρματινού πλαισίου ΑΚΛΓ που βρίσκεται εντός μεταβαλλόμενου ομογενούς μαγνητικού πεδίου με το επίπεδό του κάθετα προς τη διεύθυνσή του. Το μέτρο της έντασης του μαγνητικού πεδίου δίνεται από τη σχέση $B = ct$, $c > 0$, αντίσταση R έχει μόνο η ΑΓ, την $t = 0$ η δυνάμενη να κινηθεί ΚΛ είναι ακίνητη απέχοντας απόσταση x_0 από την ΑΓ και έστω ότι οι τριβές είναι αμελητέες (Σχήμα 1).



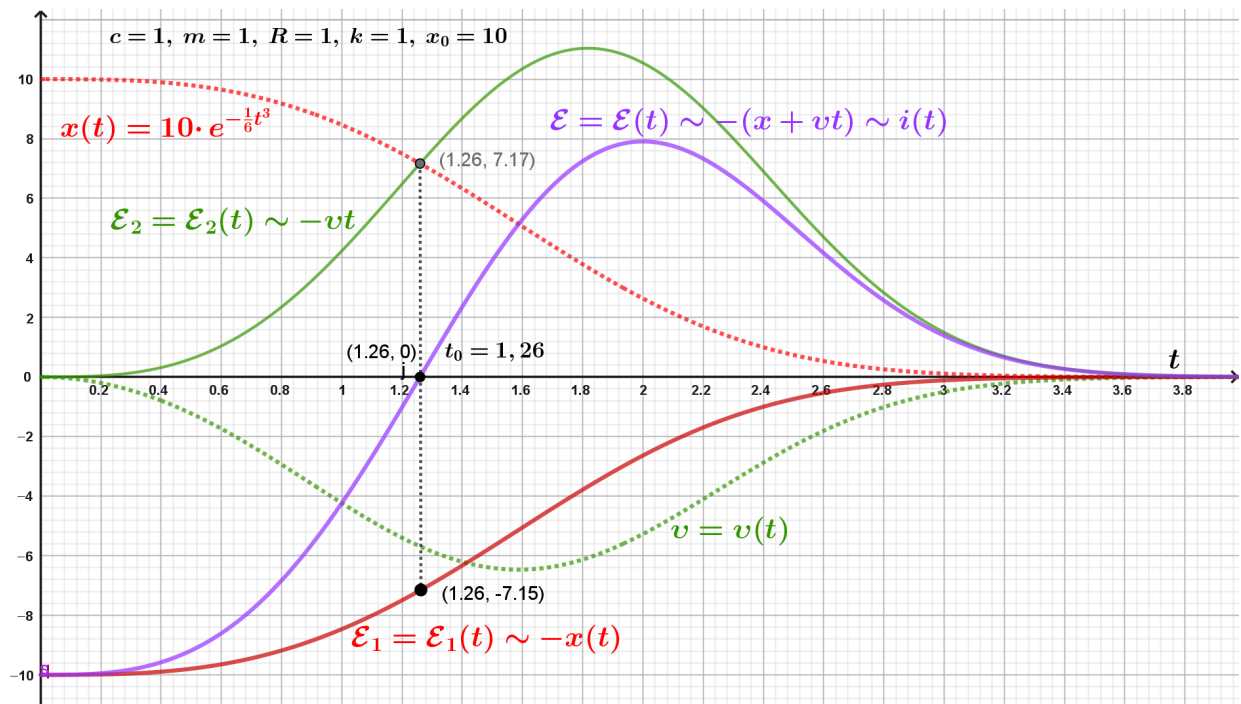
Σχήμα 1: Η δυνάμενη να κινηθεί πλευρά ΚΛ του πλαισίου σε ομογενές μεταβαλλόμενο με σταθερό ρυθμό μαγνητικό πεδίο

Κατ' αρχήν, λόγω **μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου**, αναπτύσσεται δεξιόστροφη $E_1 < 0$ ($\otimes$) (το μαγνητικό πεδίο του επαγωγικού ρεύματος αντίθετης κατεύθυνσης του προϋπάρχοντος που ενισχύεται) κατανεμημένη σε όλες τις πλευρές του πλαισίου παράγοντας δεξιόστροφο ρεύμα. Η ΚΛ διαρρεόμενη από το προηγούμενο ρεύμα και ευρισκόμενη εντός του μαγνητικού πεδίου δέχεται (σχεδόν αμέσως, μόλις $B \neq 0$) δύναμη Laplace προς το εσωτερικό του πλαισίου (κανόνας τριών δακτύλων) που τη θέτει σε κίνηση προς τα αριστερά (αρνητική κατεύθυνση). Η κίνηση όμως της ΚΛ παράγει τοπικά πάνω της δευτερογενή **κινητική** αριστερόστροφη (**αντι**) ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_2 > 0$ ($\boxtimes$) που αντιπαρατίθεται στην πρώτη. Με άλλα λόγια το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο θέτει σε κίνηση την πλευρά - η ίδια η κίνηση όμως μειώνει το ρεύμα. Το ρεύμα εν τέλει διαμορφώνεται από το άθροισμά τους (Σχήμα 2).

Η αρνητική ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_1 = -(c\ell)x < 0$ ($\otimes$) μειώνεται απολύτως διαρκώς από τη μέγιστη απολύτως τιμή της (λιγότερο αρνητική, αυξάνεται αλγεβρικά), λόγω της μείωσης της επιφάνειας του πλαισίου (του x), ενώ η θετική $E_2 = -(c\ell)vt > 0$ ($\boxtimes$) αυξάνεται (από μηδενική τιμή), αφού η ΚΛ



επιταχύνεται προς τα αριστερά, λόγω της δύναμης Laplace, με συνέπεια η προς τα αριστερά (αρνητική) ταχύτητα της να αυξάνεται απολύτως. Η συνολική $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = -c\ell(x+vt) < 0$ είναι αρνητική και μειώνεται απολύτως (αυξάνεται αλγεβρικά) τείνοντας προς το μηδέν συν τω χρόνω (όταν οι δύο ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις καταστούν ακριβώς αντίθετες), όπως και το (πάντα δεξιόστροφο αρνητικό) ρεύμα απολύτως. Μπορεί το ρεύμα να μειώνεται, χωρίς αλλαγή φοράς, αλλά η (αρνητική) ταχύτητα (απολύτως) αυξάνεται (με αυξομειούμενο ρυθμό), αφού η δύναμη Laplace και η αντίστοιχη επιτάχυνση (προς τα αριστερά, αρνητικές και οι δύο), δεν αλλάζουν κατεύθυνση (δείχνουν διαρκώς προς τα αριστερά).



Σχήμα 2: Η συνεργασία των δύο αλληλοεπηρεαζόμενων ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων στη διαμόρφωση του ρεύματος. Κατά την κίνηση της πλευράς προς τα αριστερά η ηλεκτρεγερτική δύναμη, λόγω μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου, είναι μονίμως αρνητική (δεξιόστροφη) και μειώνεται συνεχώς απολύτως (αλγεβρικά αυξάνεται), αφού μειώνεται η επιφάνεια του πλαισίου, ενώ η ηλεκτρεγερτική δύναμη, λόγω κίνησης προς τα αριστερά της πλευράς, διαρκώς θετική (αριστερόστροφη) και αυξομειούμενη (ακολουθώντας περίπου τις μεταβολές της ταχύτητας)

Οι σχέσεις έχουν ως εξής:



$$B(t) = ct \rightarrow \Phi(t) = \vec{B} \cdot \vec{A} = BA = ct\ell x = c\ell(xt) \rightarrow \frac{d\Phi(t)}{dt} = c\ell(vt + x)$$

$$E(t) = -\frac{d\Phi(t)}{dt} = -\left[\frac{dB}{dt}A + B\frac{dA}{dt}\right] \rightarrow$$

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = -c\ell x(t) - c\ell v(t)t = -c\ell[x(t) + v(t)t], x(0) = x_0, v(0) = 0, v < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(t) < 0(\uparrow) \rightarrow |E_1(t)|(\downarrow) \\ E_2(t) > 0(\uparrow) \rightarrow E_2(t)(\uparrow) \end{array} \right\}, E(t) = E_1(t) + E_2(t) < 0(\uparrow), |E(t)|(\downarrow) \rightarrow 0 < [x(t) + v(t)t](\downarrow)$$

$$E_1(0) = -c\ell x_0 = \text{απολύτως}, (\otimes) \quad E_2(0) = 0 = \min$$

$$i(t) = \frac{E_1 + E_2}{R} = -\frac{c\ell}{R}(x + vt)(\otimes) \rightarrow i(0) = -\frac{c\ell}{R}x_0 = \text{απολύτως} \quad (\otimes)$$

$$F_L(t) = i\ell B = -\frac{c\ell}{R}(x + vt)\ell ct = -\frac{c^2\ell^2}{R}[x(t) + v(t)t]t < 0, F_L(0) = 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} P_{Joule}(t) = i^2 R = \frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)^2 = \frac{(E_1 + E_2)^2}{R} \\ P_{κιν.}(t) = \vec{F}_L(t) \cdot \vec{v} = -\frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)vt = -\frac{EE_2}{R} \end{array} \right\} \rightarrow P_{Joule}(t) + P_{κιν.}(t) = \frac{(E_1 + E_2)^2}{R} - \frac{EE_2}{R} = \frac{EE_1}{R} = E_{αξ}i = P$$

Όταν οι δύο ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις την $t = t_0$ γίνουν απολύτως ίσες, δηλ. μηδενιστεί η ολική ηλεκτρεγερτική δύναμη, τότε μηδενίζονται το ρεύμα, η (σταθερής φοράς προς τα αριστερά) δύναμη Laplace και η επιτάχυνση, ενώ η ταχύτητα έχει φτάσει στο μέγιστό της (απολύτως). Αυτό συμβαίνει τη χρονική στιγμή που:

$$E = E_1 + E_2 = -c\ell(x + vt) = 0 \Leftrightarrow x + vt = 0 \Leftrightarrow t_0 = -\frac{x(t_0)}{v(t_0)}, \quad x > 0 \quad v < 0 \quad |v(t_0)| =$$

$$E = E_1 + E_2 = -c\ell(x + vt) \rightarrow 0 \Leftrightarrow x + vt \rightarrow 0 \quad t \rightarrow t_0$$

$$\Delta\eta\lambda. \quad \lim_{t \rightarrow t_0} E = \lim_{t \rightarrow t_0} (E_1 + E_2) = 0 \quad \text{από αρνητικές τιμές, όπως και το ρεύμα.}$$

Η παράσταση $x + vt$ (ή η αντίστοιχη $Bx + Bv$ από την οποία παράγεται) από θετική, με αρχικές τιμές x_0 για το x $[x(0) = x_0]$ και μηδέν για την ταχύτητα $[v(0) = 0]$, μειώνεται μέχρι μηδενισμού τη

$$t = -\frac{x}{v} \quad \text{ή} \quad t_0 = \frac{x(t_0)}{|v(t_0)|_{\max}}$$

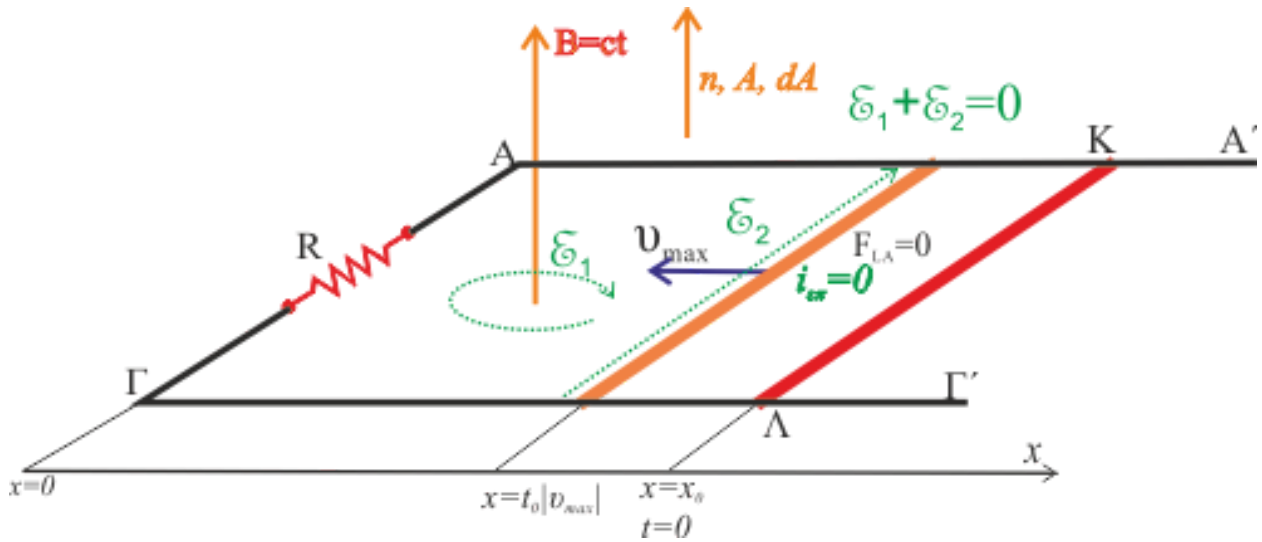
στιγμή που ισχύει η $t = -\frac{x}{v}$ ή $t_0 = \frac{x(t_0)}{|v(t_0)|_{\max}}$. Δηλ. ο χρόνος που απαιτείται (περνά) για να συμβούν τα



προηγούμενα ισούται με το χρόνο που θα έκανε η ΚΛ κινούμενη με τη μέγιστη αποκτηθείσα ταχύτητα και από τη θέση x που επιτεύχθηκε για να φτάσει στην ΑΓ (Σχήμα 3).

Μετά απ' αυτή τη χρονική στιγμή του μηδενισμού της συνολικής ηλεκτρεγερτικής δύναμης (εξίσωση απολύτως των δύο ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων), του ρεύματος, της δύναμης, της επιτάχυνσης και της μεγιστοποίησης (απολύτως) της ταχύτητας, η κίνηση της ΚΛ προς τα αριστερά συνεχίζεται, όπως και η μεταβολή (επιπλέον αύξηση) του μαγνητικού πεδίου και η μείωση της επιφάνειας του πλαισίου.

Εφόσον το x (απόσταση κινητής πλευράς από ακίνητη) μειώνεται το ίδιο θα συμβεί απολύτως και με την αρνητική δεξιόστροφη $E_1 = -(c\ell)x < 0$ ($\otimes$) (λιγότερο αρνητική, αλγεβρικά αυξάνεται), που είναι πρωτοβάθμια συνάρτηση του x (που εξαρτάται προφανώς από τη χρονική στιγμή).



Σχήμα 3: Κατάσταση κυκλώματος τη στιγμή του μηδενισμού της ολικής ηλεκτρεγερτικής δύναμης.

Εφόσον η ταχύτητα είναι μεγάλη η μετατόπιση ανά μονάδα χρόνου προ τα αριστερά με μείωση του x είναι, επίσης, μεγάλη. Μετά από χρόνο dt από τη στιγμή που $x + vt = 0$ και με δεδομένο ότι η ταχύτητα δεν θα έχει αλλάξει ουσιωδώς το μονώνυμο παίρνει την τιμή:

$$x' + vt' = x + dx + v(t + dt) = x + dx + vt + vdt = dx + vdt < 0 \quad (dx < 0, v < 0)$$

Εύλογα επομένως μπορούμε να ισχυριστούμε ότι το μονώνυμο $x + vt$ μετά το μηδενισμό του περνά σε αρνητικό έδαφος. Τότε $E_1 + E_2 > 0$, στο κύκλωμα επικρατεί η κινητική E_2 (μεγαλύτερη της $|E_1|$) και το ρεύμα αντιστρέφει φορά (από μηδέν γίνεται θετικό αριστερόστροφο), όπως και η δύναμη Laplace (κανόνας 3 δακτύλων), οπότε η ΚΛ αρχίζει να επιβραδύνεται με συνέπεια η ταχύτητα να μειώνεται



απολύτως (λιγότερο αρνητική). Ο χρόνος περνά, η ΚΛ πλησιάζει την ΑΓ όλο και περισσότερο με όλο και πιο μικρή ταχύτητα απολύτως. Αυτό συνεχίζεται συν τω χρόνω με συνέπεια να μηδενιστούν η ταχύτητα, η απόσταση x των δύο πλευρών, η παράσταση $x + vt$, οι δύο ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις, το ρεύμα και η δύναμη Laplace. Αυτό λογικά επεκτεινόμενο οδηγεί στο συμπέρασμα ότι η ΚΛ μπορεί να σταματήσει ασυμπτωτικά, όχι σε πεπερασμένο χρόνο (σε άπειρο χρόνο η ταχύτητα θα μηδενιστεί και η ΚΛ θα συμπέσει με την ΑΓ).

Συνοπτικά: Στο πρώτο χρονικό διάστημα η ΚΛ επιταχύνεται μέχρι μηδενισμού της επιτάχυνσης, αποκτώντας τη μέγιστη απολύτως ταχύτητα, όταν $x + vt = 0$. Στη συνέχεια με την προηγούμενη παράσταση να αποκτά αρνητική τιμή επιβραδύνεται μέχρι να ξαναέχουμε $x + vt = 0$ με $x = 0, v = 0$, όταν η ΚΛ θα έχει αγκαλιαστεί με την ΑΓ. Η $E = E_1 + E_2$ από πολύ αρνητική μειώνεται απολύτως μέχρι μηδενισμού και στη συνέχεια αποκτώντας θετική τιμή (αυξομειούμενη) μηδενίζεται στο τέλος της διαδρομής (μηδενισμός και των δύο ηλεκτρεγερτικών δυνάμεων). Στην 1^η φάση το «πάνω χέρι» το έχει η E_1 , ενώ στη 2^η φάση η E_2 .

Η Διαφορική Εξίσωση Της Κίνησης

$$ma = -\frac{c^2 \ell^2}{R} \left(x + \frac{dx}{dt} t \right) \rightarrow a + \frac{c^2 \ell^2}{mR} t^2 \frac{dx}{dt} + \frac{c^2 \ell^2}{mR} tx = 0 \rightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + k t^2 \frac{dx}{dt} + k tx = 0, \quad k = \frac{c^2 \ell^2}{mR}$$

$$a = -kt^2 v - ktx = -k(x + vt)t < 0 \rightarrow x'' + kt^2 x' + ktx = 0$$

Η ΔΕ που προκύπτει είναι γραμμική ομογενής δεύτερης τάξης με μεταβλητούς συντελεστές (kt^2, kt) και δεν δέχεται απλή «κλειστή» λύση, όπως οι εκθετικές, πολυωνυμικές, τριγωνομετρικές, κλπ. Αν εξέλιπε ο χρόνος από τους δύο προσθετέους αυτό που θα έμενε θα ήταν η ΔΕ ταλαντευόμενου συστήματος «ελατηρίου – μάζας» με ισχυρή απόσβεση. Διεγείρεται και επανέρχεται στη ΘΙ ασυμπτωτικά μετά από άπειρο θεωρητικά χρόνο (εδώ η απόσβεση ισχυρότατη μιας και είναι ανάλογη του τετραγώνου του χρόνου). Ας κάνουμε μια απόπειρα να προσεγγίσουμε τη λύση της.

Θέλουμε να εξαλείψουμε τον όρο πρώτης τάξης x' . Προς τούτο χρησιμοποιούμε αντικατάσταση της μορφής $x(t) = e^{\phi(t)} y(t)$. Έχουμε:

$$x(t) = e^{\phi(t)} y(t) \rightarrow x' = e^{\phi} (\phi' y + y') \rightarrow$$

$$x'' = e^{\phi} \phi' (\phi' y + y') + e^{\phi} (\phi' y + y')' = e^{\phi} (\phi'^2 y + \phi' y' + \phi'' y + \phi' y' + y'') = e^{\phi} (\phi'^2 y + 2\phi' y' + \phi'' y + y'')$$



Αντικαθιστούμε στην αρχική ΔΕ και μέσω της κατάλληλης $\phi(t)$ απαιτούμε το μηδενισμό του συντελεστή της y' .

$$e^{\phi} (\phi'^2 y + 2\phi' y' + \phi'' y + y'') + kt^2 e^{\phi} (\phi' y + y') + kt e^{\phi} y = 0$$

$$\phi'^2 y + 2\phi' y' + \phi'' y + y'' + kt^2 \phi' y + kt^2 y' + kt y = 0$$

$$y'' + (2\phi' + kt^2) y' + (\phi'' + \phi'^2 + kt^2 \phi' + kt) y = 0$$

$$2\phi\delta + kt^2 = 0 \rightarrow \phi' = -\frac{1}{2} kt^2 \rightarrow \phi(t) = -\frac{1}{6} kt^3 \rightarrow 2\phi' + kt^2 = 2\left(-\frac{1}{6} 3kt^2\right) + kt^2 = 0,$$

Η αρχική παίρνει τη μορφή

$$y'' + (\phi'' + \phi'^2 + kt^2 \phi' + kt) y = 0 \rightarrow y'' + \left[-kt + \frac{1}{4} k^2 t^4 + kt^2 \left(-\frac{1}{2} kt^2\right) + kt\right] y = 0$$

$$y'' - \frac{1}{4} k^2 t^4 y = 0$$

Η τελευταία ΔΕ, επίσης μεταβλητών συντελεστών, δεν έχει στοιχειώδη λύση. Αν η $y(t)$ την ικανοποιεί, τότε η γενική λύση της αρχικής θα είναι της μορφής:

$$\text{αν } y_1(t), y_2(t) = 2 \text{ γραμμικώς ανεξάρτητες λύσεις της } y'' - \frac{1}{4} k^2 t^4 y = 0$$

$$\text{τότε η } y(t) = c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t) \text{ θα είναι η γενική της λύση και η}$$

$$x(t) = e^{\phi(t)} y(t) \rightarrow x(t) = e^{-\frac{1}{6} kt^3} [c_1 y_1(t) + c_2 y_2(t)] \text{ η γενική της αρχικής}$$

Η φυσική ερμηνεία της λύσης (χωρίς να μπλέξουμε με τις ειδικές συναρτήσεις y_1, y_2).

Η μορφή $e^{-\frac{1}{6} kt^3}$ μας δείχνει ότι το $x(t)$ μειώνεται πολύ γρήγορα καθώς ο χρόνος αυξάνεται (λόγω του $-t^3$ στον εκθέτη) και η κίνηση της πλευράς είναι τέτοια ώστε το πλαίσιο να τείνει να εκμηδενίσει το εμβαδόν του ($x \rightarrow 0$) για να «σοροποήσει» από την πολύ μεγάλη αύξηση της μαγνητικής ροής που



επιβάλλει η $B = ct$. Στην πραγματικότητα στην οριακή κατάσταση, η πλευρά θα σταματήσει όταν «συγκρουστεί» με την ακίνητη πλευρά $x = 0$ (ή όταν οι αντιστάσεις – τριβές, εφόσον υπήρχαν, γίνουν κυρίαρχες).

Ο παράγοντας $e^{-\frac{1}{6}kt^3}$ είναι ισχυρή ηλεκτρομαγνητική απόσβεση. Άρα:

$$\left\{ \begin{array}{l} \lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} E_1(t) = 0 \\ \lim_{t \rightarrow \infty} v(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} E_2(t) = 0 \end{array} \right\} \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} [E_1(t) + E_2(t)] = \lim_{t \rightarrow \infty} E(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} i(t) = 0 \rightarrow \lim_{t \rightarrow \infty} F_L(t) = 0$$

Συνοψιση Διαπιστώσεων (Γενικό Συμπέρασμα)

1. Η ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_1 < 0$, λόγω της μεταβολής του μαγνητικού πεδίου, αναπτύσσεται σε όλο το πλαίσιο, ενώ, η λόγω κίνησης, (κινητική) ηλεκτρεγερτική δύναμη $E_2 > 0$ αναπτύσσεται μόνο στην κινητή πλευρά ΚΛ. Το ρεύμα διαμορφώνεται από το άθροισμα τους, όπως και η δύναμη Laplace που δρα με συνέπειες μόνο στην κινητή πλευρά.

2. Πριν το μηδενισμό του ρεύματος η $E_1 < 0$ είναι μεγαλύτερη απολύτως από την $E_2 > 0$ και το ρεύμα έχει τέτοια φορά που η δύναμη Laplace επιταχύνει την πλευρά ΚΛ προς το εσωτερικό του πλαισίου. Η ταχύτητα απολύτως αυξάνεται, παρουσιάζοντας απόλυτο μέγιστο (ως αρνητική φτάνει στην ελάχιστη αλγεβρική της τιμή).

Η ταχύτητα γίνεται μέγιστη, αφού (α) για $t < t_0$ (t_0 η στιγμή του μηδενισμού της $E = E_1 + E_2$) η δύναμη Laplace έχει την ίδια κατεύθυνση με την κίνηση (προς τα αριστερά) με συνέπεια η πλευρά να επιταχύνεται και το μέτρο της ταχύτητας να αυξάνεται (β) τη στιγμή $t = t_0$ η δύναμη Laplace μηδενίζεται στιγμιαία, όπως και η επιτάχυνση, οπότε η ταχύτητα σταματά να αυξάνεται και (γ) για $t > t_0$, λόγω της μεγάλης ταχύτητας, η ηλεκτρεγερτική δύναμη από κίνηση υπερνικά την ηλεκτρεγερτική δύναμη από τη μεταβολή του B με το ρεύμα να αλλάζει φορά, η δύναμη Laplace να γίνεται αντίρροπη της κίνησης (δύναμη αντίστασης) και η πλευρά ΚΛ να αρχίζει να επιβραδύνεται με συνέπεια το μέτρο της ταχύτητας να μειώνεται. Συνεπώς, η στιγμή του μηδενισμού του ρεύματος είναι όντως η στιγμή της μέγιστης ταχύτητας.

Τη στιγμή t_0 που $\mathbf{E} = \mathbf{E}_1 + \mathbf{E}_2 = 0$ η πλευρά κινείται τόσο γρήγορα, ώστε ο ρυθμός μείωσης της ροής, λόγω μείωσης του εμβαδού, αντισταθμίζει ακριβώς τον ρυθμό αύξησης της ροής λόγω αύξησης του πεδίου. Δηλ. τη χρονική στιγμή t_0 , με μηδενική ηλεκτρεγερτική δύναμη και ρεύμα, αποκαθίσταται μια

δυναμική ισορροπία για την οποία ισχύει $v_{\max} = v(t_0) = -\frac{x(t_0)}{t_0}$. Δηλ. αυτή τη χρονική στιγμή αποτελεί το χρονικό σημείο, όπου η πλευρά έχει «εξαντλήσει» την ώθηση από το μεταβαλλόμενο πεδίο και έχει τη μέγιστη ταχύτητα προς τα αριστερά.

Για $t < t_0$, όλη η ενέργεια που προσφέρθηκε από το μεταβαλλόμενο μαγνητικό πεδίο, και δεν έγινε θερμότητα Joule, έχει μετατραπεί σε κινητική ενέργεια της πλευράς. Για $t > t_0$, η πλευρά επιβραδυνόμενη αρχίζει να επιστρέφει ενέργεια στο σύστημα (λειτουργεί ως γεννήτρια) και η κινητική ενέργεια που είχε αποθηκεύσει η μάζα επιστρέφεται στο κύκλωμα και καταναλώνεται ως θερμότητα Joule στην αντίσταση ή επιστρέφει στο μαγνητικό πεδίο.

$$t < t_0 \rightarrow x + vt > 0, \mathbf{E}(t) = \mathbf{E}_1(t) + \mathbf{E}_2(t) = -c\ell(x + vt), x(0) = x_0, v(0) = 0, v < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(t) < 0(\uparrow) \rightarrow |E_1(t)|(\downarrow) \\ E_2(t) > 0(\uparrow) \rightarrow E_2(t)(\uparrow) \end{array} \right\}, E(t) = E_1(t) + E_2(t) < 0(\uparrow), |E(t)|(\downarrow) \rightarrow 0 < (x + vt)(\downarrow)$$

$$F_L(t) = i\ell B = -\frac{c\ell}{R}(x + vt)\ell ct = -\frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)t < 0, v < 0 \rightarrow |v| = -v, i < 0$$

$$P_{F_L}(t) = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = |\vec{F}_L||\vec{v}| = \left| -\frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)t \right|(-v) = -\frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)tv = -E_2 i > 0$$

$$\frac{dQ_R(t)}{dt} = i^2 R = \frac{(E_1 + E_2)^2}{R} = (E_1 + E_2)i > 0$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = \left(\sum \vec{F} \right) \cdot \vec{v} = \vec{F}_L \cdot \vec{v} = -E_2 i > 0$$

$$P(t) = E_1 i > 0 \text{ (ή στο κύκλωμα)} \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_R}{dt} = (E_1 + E_2)i > 0 \\ + \\ P_{F_L} = -E_2 i = \frac{dK}{dt} > 0 \end{array} \right\}$$

$$\text{Για } t = t_0 \rightarrow x(t_0) + v(t_0)t_0 = 0 \rightarrow E_1 + E_2 = 0 \rightarrow i = 0 \rightarrow F_L = 0 \rightarrow P_{F_L} = 0, \frac{dQ_R}{dt} = 0$$

$$t > t_0 \rightarrow x + vt < 0$$

$$E(t) = E_1(t) + E_2(t) = -c\ell(x + vt), \quad v < 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} E_1(t) < 0 (\uparrow) \rightarrow |E_1(t)| (\downarrow) \\ E_2(t) > 0 (\cap) \rightarrow E_2(t) (\cap) \end{array} \right\}, \quad E(t) = E_1(t) + E_2(t) > 0 (\cap), \quad |E(t)| (\downarrow) \rightarrow 0 > (x + vt) (\cup)$$

$$F_L(t) = i\ell B = -\frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)t > 0, \quad v < 0 \rightarrow |v| = -v, \quad i > 0$$

$$P_{F_L}(t) = F_L \cdot v = -|F_L||v| = -\frac{c^2\ell^2}{R}(x + vt)tv = -E_2i < 0$$

$$\frac{dQ_R(t)}{dt} = i^2R = \frac{(E_1 + E_2)^2}{R} = (E_1 + E_2)i > 0$$

$$\frac{dK(t)}{dt} = \left(\sum F\right) \cdot v = F_L \cdot v = -E_2i < 0$$

$$P_{F_L} = -E_2i = \frac{dK}{dt} < 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{απορρόφηση ενέργειας} \\ \text{από το κύκλωμα} \end{array} \right) \rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{dQ_R}{dt} = (E_1 + E_2)i > 0 \\ + \\ P(t) = -E_1i > 0 \end{array} \right\}$$

3. Μετά το μηδενισμό η πλευρά συνεχίζει να κινείται, λόγω αδράνειας, και η θετική, λόγω κίνησης προς τα αριστερά, ηλεκτρεγερτική δύναμη θα γίνει μεγαλύτερη απολύτως από την αρνητική, λόγω μεταβολής (ενίσχυσης) του πεδίου. Έτσι η συνολική ηλεκτρεγερτική δύναμη αλλάζει πρόσημο (θετική από αρνητική), το ρεύμα αντιστρέφεται, η δύναμη Laplace γίνεται δύναμη «φρεναρίσματος» και η ταχύτητα θα αρχίσει να μειώνεται απολύτως.

4. Η εξάρτηση της t_0 από τις παραμέτρους μάζα και αντίσταση.

Η μάζα της πλευράς, όπως και η αντίσταση του κυκλώματος, παίζει καθοριστικό ρόλο στην τιμή της χρονικής στιγμής t_0 . Για παράδειγμα αν η πλευρά είχε αμελητέα μάζα, θα μπορούσε να αντιδράσει ακαριαία στη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου. Σε αυτή την υποθετική περίπτωση, η συνολική ηλεκτρεγερτική δύναμη θα ήταν μηδέν από την πρώτη στιγμή, αφού η πλευρά θα «προσαρμοζόταν»

(σχεδόν) αμέσως στην ταχύτητα $v = -\frac{x}{t}$. Επειδή όμως η πλευρά έχει μη αμελητέα μάζα, παρουσιάζει αδράνεια. Το μαγνητικό πεδίο αρχίζει να αυξάνεται, δημιουργεί ρεύμα και δύναμη Laplace. Η μάζα «αντιστέκεται» στην επιτάχυνση. Χρειάζεται χρόνος για να αναπτύξει η πλευρά την απαραίτητη ταχύτητα ώστε να εξισορροπήσει την επαγωγή από τη μεταβολή του μαγνητικού πεδίου. Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα τόσο πιο λίγο επιταχύνεται η πλευρά, άρα τόσο αργότερα (σε μεγαλύτερο χρόνο) θα καταφέρει η

ταχύτητα της κίνησης να «φτάσει» την επαγωγή του πεδίου και να μηδενίσει το ρεύμα. Αν ανατρεξουμε στην πιο πάνω διαφορική εξίσωση βλέπουμε ότι η μάζα εμφανίζεται στον παρονομαστή του συντελεστή

$$k = \frac{c^2 \ell^2}{mR}$$

. Μεγάλη μάζα συνεπάγεται μικρό k , άρα πιο «τεμπέλικη» απόκριση του συστήματος. Η μέγιστη ταχύτητα για μεγαλύτερη μάζα θα επιτευχθεί αργότερα και θα είναι πιθανώς μικρότερη σε απόλυτη τιμή. Ομοίως μεγάλη αντίσταση R , επίσης, καθυστερεί το φαινόμενο, καθώς περιορίζει το ρεύμα και άρα τη δύναμη Laplace που επιταχύνει τη μάζα. Η στιγμή t_0 είναι η λύση της εξίσωσης

$$v(t) = -\frac{x(t)}{t}$$

. Στη λύση αυτή, η μάζα καθορίζει το «πόσο γρήγορα» η εκθετική μείωση της θέσης προλαβαίνει την αύξηση του πεδίου. Αν η μάζα είναι υπερβολικά μεγάλη, η πλευρά μπορεί να μην προλάβει ποτέ να μηδενίσει την ηλεκτρεγερτική δύναμη πριν το x γίνει μηδέν (δηλαδή πριν η πλευρά τερματίσει τη διαδρομή της).

Συνοψίζοντας: Η μάζα είναι καθοριστικός παράγοντας που «καθυστερεί» το μηδενισμό της ηλεκτρεγερτικής δύναμης. Χωρίς μάζα, η ταχύτητα θα ήταν μέγιστη από την $t=0$. Με μάζα, δημιουργείται μια χρονική υστέρηση μέχρι η κινητική κατάσταση της πλευράς να «σοφαρίσει» την ηλεκτρομαγνητική επιβολή του πεδίου. Ομοίως και με την αντίσταση.

5. Μπορούμε με προσεγγίσεις να δώσουμε μια τιμή για την t_0 και την αντίστοιχη μέγιστη ταχύτητα. Αν υποθέσουμε ότι για μικρούς πρώτους χρόνους της κίνησης η μεταβολή της θέσης είναι ακόμα μικρή $x(t_0) \approx x_0 = \text{αρχική θέση ΚΛ}$, τότε η ΔΕ απλοποιείται και τη λύνουμε λαμβάνοντας υπόψη τη

συνθήκη
$$v(t_0) = -\frac{x(t_0)}{t_0} \approx -\frac{x_0}{t_0}$$
 μηδενισμού του ρεύματος:

$$\begin{aligned} x'' + kt^2 x' + ktx &= 0, \quad k = \frac{c^2 \ell^2}{mR} \rightarrow x'' \approx -ktx \approx -ktx_0 \rightarrow \\ \left(\frac{dv}{dt} = -kx_0 t \rightarrow v(t) = -\frac{1}{2} kx_0 t^2 \right) &\rightarrow v(t_0) = -\frac{1}{2} kx_0 t_0^2 = -\frac{x_0}{t_0} \rightarrow t_0 \approx \sqrt{\frac{2}{k}} = \sqrt{\frac{2mR}{c^2 \ell^2}} \\ v(t_0) = -\frac{x(t_0)}{t_0} \approx -\frac{x_0}{t_0} & \\ |v(t)|_{\max} = |v(t_0)| = \left| -\frac{x_0}{t_0} \right| = x_0 \sqrt{\frac{k}{2}} = x_0 \sqrt{\frac{c^2 \ell^2}{2mR}}, & |v(t_0)|_{\max} t_0 \approx x_0 \end{aligned}$$



Από την προηγούμενη σχέση προκύπτει ότι ο t_0 είναι τόσο μεγαλύτερος (α) Όσο μεγαλύτερη είναι η μάζα (επιβεβαιώνει ότι η αδράνεια καθυστερεί τη στιγμή που η πλευρά θα πιάσει τη «μέγιστη» ταχύτητα) (β) Όσο μεγαλύτερη είναι η αντίσταση (μικρότερο ρεύμα, μικρότερη δύναμη Laplace, μικρότερη επιτάχυνση) και (γ) Όσο το μαγνητικό πεδίο μεταβάλλεται με μικρότερο ρυθμό (με μικρότερο c , η δύναμη Laplace είναι ασθενέστερη και «αναγκάζει» την πλευρά να φτάσει στη μέγιστη ταχύτητα πολύ πιο αργά). Αν το πλαίσιο είχε και αυτεπαγωγή, τότε θα καθυστερούσε ακόμα πιο πολύ η ανάπτυξη του ρεύματος.

Αντιστοίχως ανάλογα συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για την μέγιστη ταχύτητα από τη 2^η σχέση.

6. Έτσι η κίνηση γίνεται εντονότερη, μεγιστοποιείται, φθίνει και σβήνει. Δεν υπάρχουν ταλαντώσεις και το σύστημα οδηγείται σε πλήρη απόσβεση.

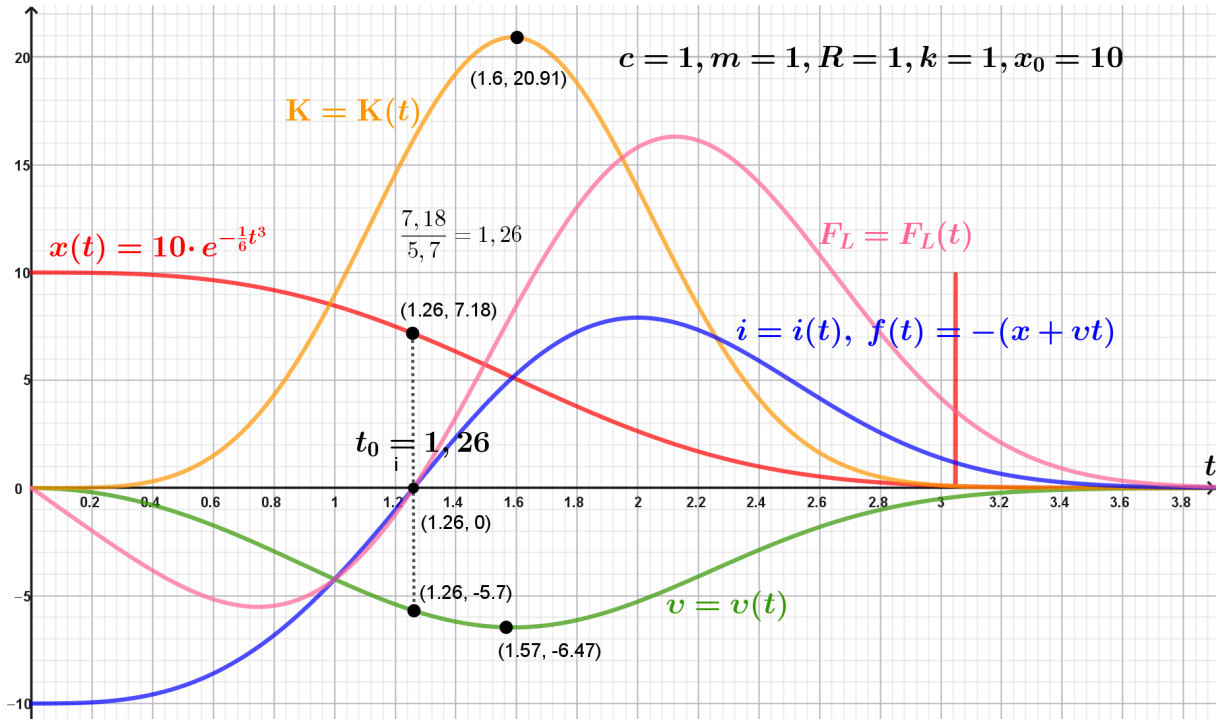
7. Ερώτημα: Είναι δυνατόν η πλευρά να σταματήσει πριν το $x=0$ και να αντιστραφεί η κίνηση και υπό ποιες προϋποθέσεις;

Από την προηγούμενη ανάλυση είδαμε ότι μετά την t_0 (κατά την οποία οι ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις, λόγω μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου και λόγω κίνησης της πλευράς προς τα αριστερά, γίνονται ακριβώς αντίθετες με συνέπεια το μηδενισμό του ρεύματος και της δύναμης και τη μεγιστοποίηση απολύτως της ταχύτητας) στον ανταγωνισμό του μεταβαλλόμενου μαγνητικού πεδίου $B = ct$ και της κίνησης της πλευράς «κερδίζει» η κίνηση με συνέπεια η ηλεκτρεγερτική δύναμη να αλλάζει πρόσημο (θετική), όπως και το ρεύμα, ενώ η δύναμη Laplace αντιστρέφεται (προς τα δεξιά) και η πλευρά αρχίζει να επιβραδύνεται.

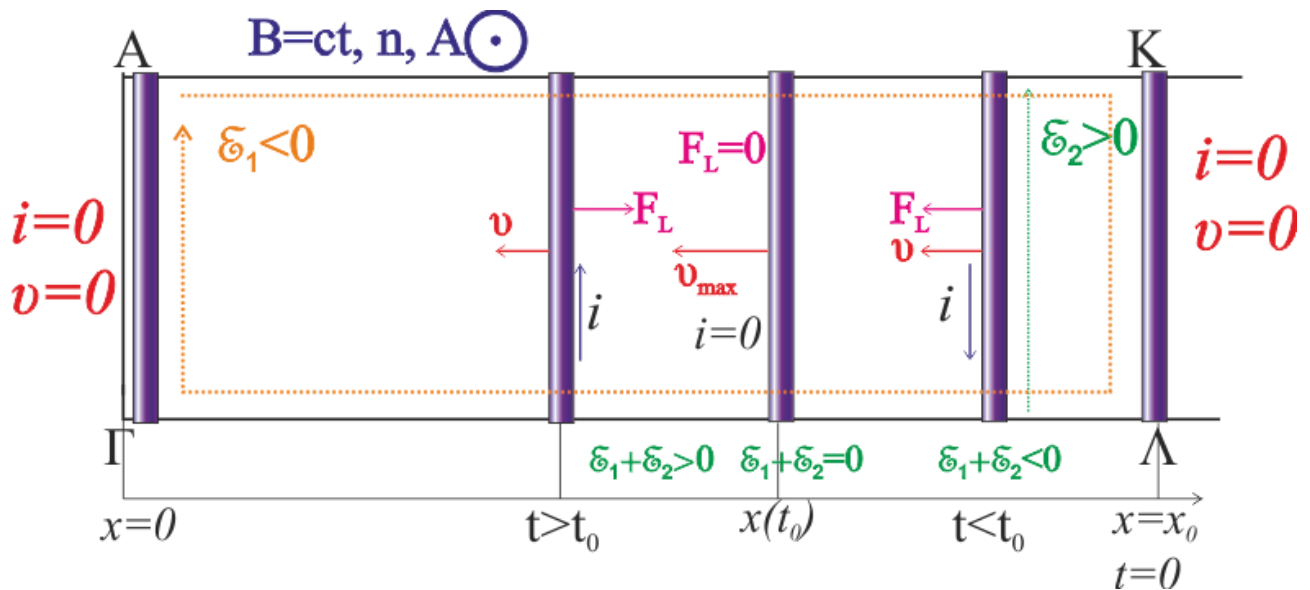
Η πλευρά θεωρητικά θα μπορούσε να σταματήσει στιγμιαία (η ταχύτητά της από αρνητική μηδενίζεται) πριν αυτή φτάσει στο $x=0$ αν η δύναμη Laplace μετά την t_0 (που είναι δύναμη επιβράδυνσης προς τα έξω) είναι τόσο ισχυρή, ώστε να μηδενίσει την ορμή της πλευράς πριν αυτή φτάσει στο τέρμα. Αυτό εξαρτάται από τον «ανταγωνισμό» ανάμεσα στην ορμή της μάζας και την ταχύτητα μεταβολής του πεδίου B . Αν η μάζα m είναι μικρή και η αντίσταση R είναι πολύ μικρή, το ρεύμα και η δύναμη Laplace γίνονται πολύ μεγάλα μόλις η ταχύτητα ξεπεράσει το όριο ισορροπίας $v(t_0)t_0 = -x(t_0)$. Σε αυτήν την

περίπτωση, με ισχυρότατη επιβράδυνση, η πλευρά θα μπορούσε να σταματήσει πριν το $x=0$ και μηδενιστεί η ταχύτητα. Στη θέση αυτή η ηλεκτρεγερτική δύναμη που προέρχεται μόνο από τη μεταβολή του πεδίου είναι αρνητική και μικρή απολύτως, αφού το εμβαδόν του πλαισίου είναι πολύ μικρό, το ρεύμα ασθενές (αρνητικό) και η δύναμη ασθενής με κατεύθυνση προς τα μέσα του πλαισίου. Αρχίζει ξανά η κίνηση προς τα μέσα όλο και πιο αδύναμα με επανάληψη όλων των προηγούμενων και η

ΚΛ με όλο και μικρότερα βήματα θα προσεγγίσει την ΑΓ χωρίς πηδώματα. Αντιστροφή της κίνησης προς τα έξω δεν είναι δυνατή. Το πιθανότερο σενάριο με ισχυρή απόσβεση είναι η ΚΛ να προσεγγίσει την ΑΓ ασυμπτωτικά και να μηδενιστεί η ταχύτητά της όταν $x = 0$.

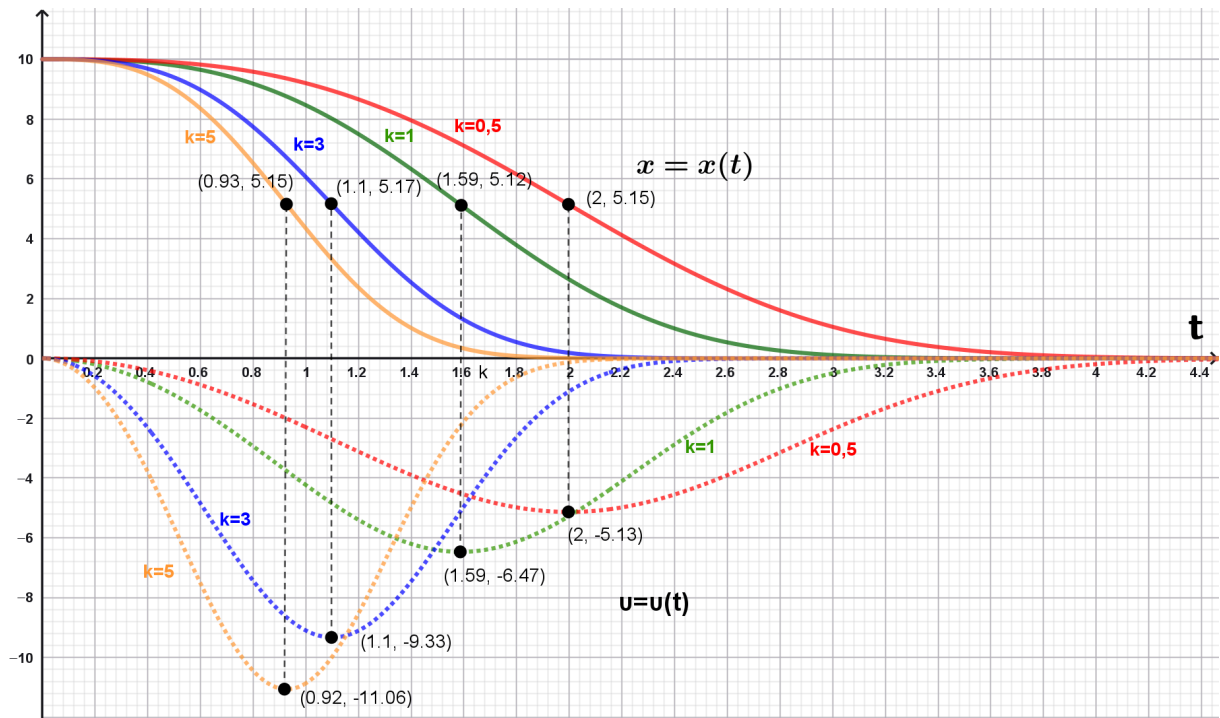


Σχήμα 4: Οι συναρτήσεις που περιγράφουν το φαινόμενο. Σε κάθε περίπτωση κατά τη χρονική στιγμή μηδενισμού του ρεύματος πρέπει να ισχύει η $x(t_0) = -v(t_0) \cdot t_0$. Εδώ $t_0 = 1,26$ τιμή που δε συμπίπτει με τη στιγμή μεγιστοποίησης (απολύτως) της ταχύτητας μιας και η λύση που δόθηκε είναι προσεγγιστική



Σχήμα 5: Εφόσον η επιφάνεια του πλαισίου διαρκώς μικραίνει το ίδιο συμβαίνει απολύτως και με την αναπτυσσόμενη σε όλο το κύκλωμα δεξιόστροφη αρνητική E_1 (αλγεβρικά μεγαλώνει), ενώ η E_2 αναπτυσσόμενη μόνο στην κινούμενη πλευρά είναι

διαρκώς θετική (αριστερόστροφη), εφόσον η ταχύτητα δεν αλλάζει κατεύθυνση και αυξομειώνεται. Το άθροισμά τους δίνει τη φορά του ρεύματος. Και οι δύο ηλεκτρεγερτικές δυνάμεις οδηγούνται σε μηδενισμό στο τέλος της διαδρομής



Σχήμα 6: Η θέση και η ταχύτητα της κινητής πλευράς σε συνάρτηση του χρόνου για διάφορες τιμές της παραμέτρου k ξεκινώντας σε όλες τις περιπτώσεις από την ίδια αρχική θέση $x_0 = 10 \text{ m}$. Αυξανόμενου του $k = c^2 \ell^2 / mR$ η μέγιστη ταχύτητα απολύτως γίνεται μεγαλύτερη και επιτυγχάνεται γρηγορότερα (μικρότερο χρόνο t_0 ($|v(t_0)|_{\max} t_0 \approx x_0$) και σχεδόν στο μέσο περίπου της διαδρομής (σχεδόν ανεξάρτητη του k)