

## Systèmes mécaniques oscillants

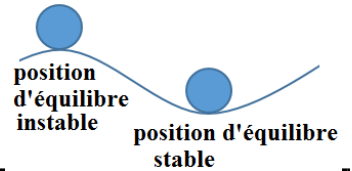
### I- Présentation de systèmes mécaniques oscillants :

#### 1- Position d'équilibre stable :

C'est la position à laquelle le système tend à y revenir lorsque l'on en éloigne légèrement.

#### 2- Système mécanique oscillant :

##### a- Expériences :



On fait déplacer les corps suivants de leurs positions d'équilibre stables puis on les libère.

|                                                                                                 |                                                                                                     |                                                                                 |                                                                                                                |
|-------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| Un solide ponctuel suspendu à l'extrémité d'un fil inextensible ou un tige de masse négligeable | Un solide pouvant tourner autour d'un axe fixe horizontale ne passant pas par son centre de gravité | Un solide fixé à un ressort dont l'autre extrémité est attachée à un point fixe | Une tige homogène suspendue en son centre par un fil de torsion dont l'autre extrémité est fixe en un support. |
|                                                                                                 |                                                                                                     |                                                                                 |                                                                                                                |
| Pendule simple                                                                                  | Pendule pesant                                                                                      | Pendule élastique                                                               | Pendule de torsion                                                                                             |

b- **Remarques :** Après leur libération, ces corps effectuent un mouvement de va et vient autour de cette position avant de s'y stabiliser après un certain temps.

c- **Conclusion :** On appelle un système mécanique oscillant (oscillateur mécanique) tout système mécanique qui a un mouvement de va et vient autour de sa position d'équilibre stable.

#### 3- Caractéristiques du mouvement oscillatoire :

Un mouvement oscillatoire est caractérisé par :

- Une période propre  $T_0$  : C'est la durée nécessaire à l'oscillateur pour effectuer une oscillation,
- Une amplitude  $X_m$  ou  $\theta_m$  : C'est la valeur maximale positive que prend la grandeur qui exprime le décalage ou l'inclinaison de l'oscillateur de sa position d'équilibre stable.

#### 4- Amortissement des oscillations mécaniques :

##### a- Types de frottement :

On remarque que l'amplitude des oscillations diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule, on dit que le mouvement est amorti. Le phénomène d'amortissement est provoqué par les forces des frottements. On distingue deux types deux frottements :

|                                                                                                                                         |                                                                                                                                                         |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Frottement solide</b><br>se fait entre l'oscillateur et un corps solide dont l'amplitude décroît d'une manière linéaire<br><br>Fig.1 | <b>Frottement fluide</b><br>se fait entre l'oscillateur et un fluide (liquide ou gaz) dont l'amplitude décroît d'une manière exponentielle<br><br>Fig.2 |
|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

##### b- Régimes des oscillations :

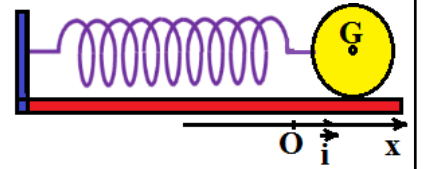
On distingue trois régimes :

|                                                                                                                                                                                            |                                                                                                                                                                                                        |                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <b>Régime périodique :</b><br>Les frottements sont négligeables, l'amplitude est constante, L'oscillateur est non amorti. Ce régime est caractérisé par une période propre $T_0$<br><br>C1 | <b>Régime pseudo-périodique :</b><br>Les frottements sont faibles, l'amplitude diminue jusqu'à ce qu'elle s'annule. Ce régime est caractérisé par la pseudo-période $T$ avec $T \approx T_0$<br><br>C2 | <b>Régime apériodique :</b><br>les frottements sont forts, l'oscillateur revient à sa position d'équilibre sans d'osciller.<br><br>C3 |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

### II- Étude dynamique de pendule élastique (solide-ressort) :

#### 1- Équation différentielle :

a- **Activité** : On considère le pendule élastique horizontal suivant : il est constitué d'un ressort, de constante de raideur  $K$  et de masse négligeable, dont l'un de ses extrémités est fixé à un support et l'autre lié à un solide de masse  $m$  peut se déplacer sans frottement sur un plan horizontal, comme indique la figure suivante :



On écarte le solide horizontalement d'une distance  $X_m$  puis on le lâche, il se met à osciller autour de  $G_0$  :

b- **Remarques** : Le système étudié est :  $\{le\ solide\ (S)\}$ . Le solide (S) est soumis à trois forces :

$\vec{P}$  : son poids et  $\vec{R}$  : la réaction du plan,

$\vec{F} = -kx\vec{i}$  : la tension de ressort, elle appelée la force de rappel et s'oppose à l'allongement du ressort.

Application de la deuxième loi de Newton :  $\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$ , c'est l'équation différentielle du mouvement.

## 2- Solution de l'équation différentielle :

La solution de cette équation différentielle vérifiée par l'abscisse  $x$  est :  $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$ . Tel que :

$X_m$  : Amplitude ou élongation maximale, et  $T_0$  : la période propre du mouvement en (s),

$x(t)$  : l'abscisse (élongation) du point G et varie entre  $X_m$  et  $-X_m$ ,

$f_0 = \frac{1}{T_0}$  : la fréquence propre du mouvement en (Hz), et  $\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi$  : Phase à l'instant  $t$ , et  $\varphi$  : Phase à

$t = 0s$ .

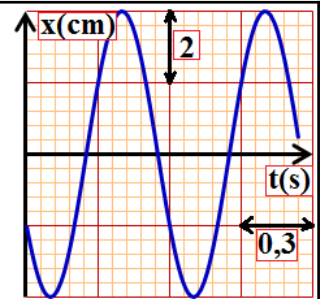
### Application 1 :

a- En utilisant l'équation différentielle ci-dessus et sa solution : Etablir l'expression de  $T_0$  et celle de  $f_0$ ,

b- A partir de la courbe de  $x(t)$  ci-contre, trouver la valeur de la période  $T_0$ , l'amplitude  $X_m$ , la valeur de  $\varphi$ ,

c- Etablir l'expression de  $v_x(t)$  et celle de  $a_x(t)$ , puis déduire la nature du mouvement du solide,

d- Sachant que  $m = 182g$ , déduire la valeur de  $K$ .



## III- Phénomène de résonance mécanique :

### 1- Oscillations forcées :

Les oscillations mécaniques sont amorties à cause des frottements. Pour entretenir les oscillations, c'est à dire compenser l'énergie perdue par frottement, on place un appareil qui délivre l'énergie nécessaire pour que les oscillations soient non amorties. Cet appareil est un système de mouvement oscillatoire, appelé Excitateur, qui impose sa période  $T_e$  au système oscillant appelé résonateur dont les oscillations deviennent forcées.

### 2- Résonance mécanique :

Le montage ci-contre représente un pendule élastique (résonateur) de fréquence  $f_0$  et un moteur (excitateur) de fréquence  $f_e$  :

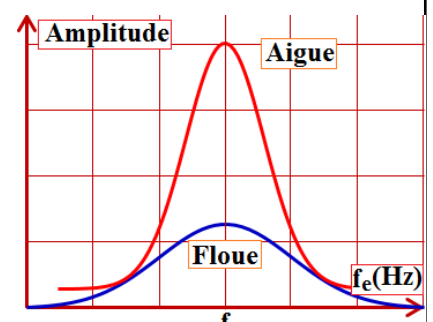
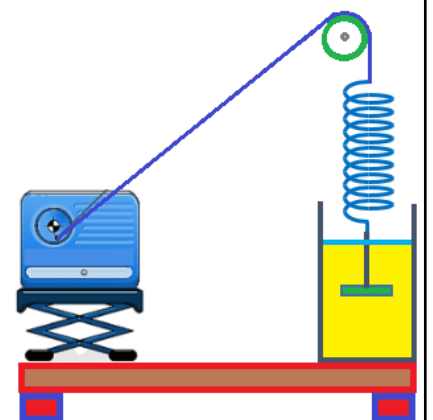
On relie l'oscillateur mécanique au moteur qui lui délivre l'énergie nécessaire pour l'entretien d'oscillations. L'oscillateur est forcé d'osciller à la fréquence imposée par le moteur. On fait varier la fréquence du moteur, et on constate que l'amplitude des oscillations devient maximale lorsque la fréquence du moteur coïncide (égale) avec la fréquence de l'excitateur  $f_e = f_0$ . On dit que le système est en résonance.

La période propre du résonateur est  $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$  et la fréquence propre

$$f_0 = \frac{1}{T_0}$$

### Remarques :

- Plus l'amortissement est faible, plus le phénomène de résonance est important, l'amplitude des oscillations est maximale (résonance aigüe).



• Plus l'amortissement est important, plus le phénomène de résonance est faible, l'amplitude des oscillations à la résonance est faible (résonance floue).

**fin du cours**

**Correction d'application 1 :**

a- La solution de l'équation différentielle est de la forme  $x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right)$

$$\text{Alors } \ddot{x}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 X_m \cos\left(\frac{2\pi}{T_0}t + \varphi\right) = -\left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x(t) \Rightarrow \ddot{x}(t) + \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 x(t) = 0$$

$$\text{Avec } \ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0, \text{ donc, par analogue, } \left(\frac{2\pi}{T_0}\right)^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \text{ et } f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

b- Graphiquement,  $T_0 = 0,6s$  et  $X_m = 0,04m$  et  $x(0) = X_m \cos(\varphi) = \frac{-X_m}{2} \Rightarrow \cos(\varphi) = -\frac{1}{2}$

Donc  $\varphi = \frac{2\pi}{3}$  ou  $\varphi = -\frac{2\pi}{3}$ , au voisinage de 0,  $x(t)$  est une fonction de temps décroissante, alors

$$\dot{x}(t=0) < 0, \text{ Alors } -\frac{2\pi}{T_0} X_m \sin(\varphi) < 0 \Rightarrow \sin(\varphi) > 0 \Rightarrow \varphi = \frac{2\pi}{3}$$

$$\text{c- } x(t) = X_m \cos\left(\frac{2\pi}{0,6}t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0,03 \cos\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) = 0,03 \cos\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right),$$

$$\text{Alors } v_x(t) = \dot{x}(t) = -0,03 \frac{10\pi}{3} \sin\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) = -0,1\pi \sin\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\text{et } a_x(t) = \dot{v}_x(t) = \ddot{x}(t) = -0,1\pi \frac{10\pi}{3} \cos\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{\pi^2}{3} \cos\left(\frac{10\pi}{3}t + \frac{2\pi}{3}\right).$$

$$\text{d- } T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow k = \frac{4\pi^2 m}{T_0^2} = \frac{4 \times 10 \times 0,182}{0,6^2} = 20,22 N.m^{-1}.$$

Le mouvement du solide est rectiligne sinusoïdal.