

PHYSIQUE 1

I. ÉCHANGES DE CHALEUR

I.1. Variation de la température le long du tube échangeur

I.1.1. La température de l'eau dans le tube est inférieure à T donc l'échange d'énergie thermique se fait du fluide vaporisé vers l'eau. Comme la température ne varie pas et que le fluide reste dans un état diphasé, cette perte d'énergie par le fluide entraîne la condensation d'une partie de la vapeur.

I.1.2. Une masse $dm = D dt$ est prise comme système thermodynamique. Elle entre dans le tube à la température t_E et en sort à t_S . Son enthalpie varie donc de $dH = dm J (t_S - t_E)$.

Elle subit une transformation à pression constante donc $dH = dQ = P_C dt$ où P_C est la puissance calorifique totale reçue par la masse dm .

On en déduit

I.1.3. Dans le point de vue d'Euler, considérons une tranche d'eau comprise entre les sections d'abscisse x et $x + dx$ du tube. Sa masse est dm . La puissance calorifique qu'elle reçoit est par hypothèse $dP_C = a ds [T - q(x)] = a p dx [T - q(x)]$.

Dans le point de vue de Lagrange, la masse dm a la température $q(x)$ lorsqu'elle passe en x et $q(x + dx)$ lorsqu'elle passe en $x + dx$. D'après la question précédente, la puissance calorifique qu'elle reçoit peut s'écrire $dP_C = J D [q(x + dx) - q(x)]$.

En développant au premier ordre, $q(x + dx) = q(x) + dx + \dots$, il vient $dP_C = J D dx$.

En régime permanent, les deux expressions de dP_C sont égales, on obtient:

$$J D = a p dx [T - q(x)].$$

C'est une équation différentielle à variable séparées que l'on peut écrire:

et qui s'intègre entre 0 et x d'une part, t_E et $q(x)$ d'autre part, en d'où

I.1.4. La température de sortie correspond à $x = L$ où L est la longueur du tube telle que la surface totale du tube d'échange est $S = p d L$ soit $L = S/pd$.

Avec le résultat précédent, on obtient soit

I.1.5. L'élévation de température est donc soit

I.1.6.a. On veut donc

I.1.6.b. Si D est de l'ordre de D_C , alors t_S est de l'ordre de T à 1% près. L'allure de la courbe est donc

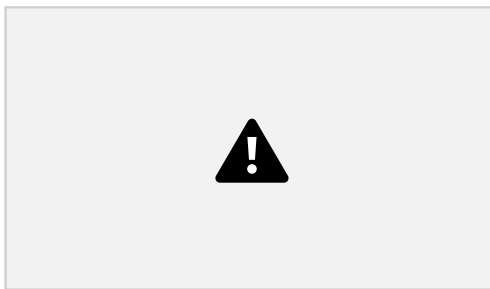
t_E
 T
 $L/5$
 x
 L
 $q(x)$



La longueur caractéristique de variation de $q(x)$ est lorsque le débit vaut D . Pour $D = D_C$, $l_C = L/5$ d'où l'allure de la courbe ci-dessus.

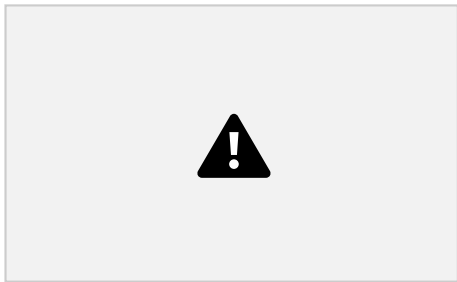
Si le débit vaut $D_f \ll D_C$, on aura $l_f \ll l_C$ ce qui entraîne que la courbe se rapproche “plus vite” de son asymptote. On en déduit que l'allure de la courbe est la suivante

t_E
 T
 $q(x)$
 L
 x



Pour $D_g \gg D_C$, on a au contraire $l_g \gg l_C$. Dans ce cas, la courbe est quasiment linéaire:

t_E
 T
 $q(x)$
 L
 x



I.1.6.c Il y a échange de chaleur entre le fluide et l'eau aux points du tube tels que $q(x) \neq T$ d'après l'expression de la puissance calorifique donnée en I.1.3. Pour que toute la surface du tube soit utilisée, il faut donc que t_s soit différent de T . C'est le cas si $D \neq D_C$.

I.1.6.d. D'après I.1.5 on a
 donc d'où .

I.1.6.e. D'après la définition de t_1 et t_2 , on a . Par ailleurs, $P_C = J D (t_s - t_E) = J D (t_s - T + T - t_E) = J D (-t_2 + t_1)$. Donc . On reconnaît donc on obtient finalement .

I.1.6.f. La valeur $t_2 = 0$ correspond à $t_s = T$ c'est-à-dire les débits tels que la température de l'eau est égale à celle du fluide avant l'extrémité du tube. D'après les courbes tracées ci-dessus, cela correspond **aux débits inférieurs à D_C** .

I.2. Transferts de chaleur - Cas de l'enceinte isolée

I.2.1. Le système thermodynamique est maintenant le fluide contenu dans l'enceinte. D'après ce qui précède, l'eau du tube reçoit la puissance P_C donc le fluide reçoit $-P_C$ de la part de l'eau. Par ailleurs, il reçoit P_r de la part de la résistance chauffante.

En régime permanent, la variation d'enthalpie dH du fluide est nulle or elle vaut $dH = P_r - P_C$. On en déduit .

Au contact avec la résistance chauffante, une masse dm de fluide liquide est vaporisée pendant dt (avec l'échange thermique $P_r dt$). Pendant la même durée, une masse identique dm est condensée au contact du tube (avec l'échange thermique $-P_c dt$).

I.2.2. On note dm_C la masse de fluide qui se vaporise pendant dt . La variation d'enthalpie correspondante pour le fluide est $dH = L(T).dm_C$. L'énergie thermique nécessaire est apportée par la résistance chauffante soit $dQ = P_r dt$. On en déduit $L(T) dm_C = P_r dt$.

La masse changeante par unité de temps est donc .

I.2.3.a. On a vu que $P_C = P_r$ or $P_C = J D (t_s - t_E) =$ donc

Les relations précédentes ne supposent *a priori* pas de restriction sur le débit.

I.2.3.b. Si l'on augmente le débit (a, S restant constant par construction du système), on a et l'on peut faire le développement limité Alors, on peut écrire soit .

I.2.3.c. On a toujours $P_r = P_C$. On déduit de la relation précédente $P_C = a S (T - t_E)$. C'est la puissance calorifique reçue par l'eau à travers la surface d'échange S dans le cas où sa température est partout égale à t_E dans le tube. C'est le cas lorsque le débit est très grand c'est-à-dire la vitesse d'écoulement très grande car dans ce cas, la température de l'eau n'a pas le temps de varier.

I.2.4. D'après 2.3.a, on a si $P_r' > P_r$.

On peut tracer les isothermes du fluide dans un diagramme de Clapeyron:

p
 A'
 A
 V
 P'
 P
 T'
 T
 V

Le fluide est dans un état d'équilibre diphasé à T ; soit par exemple A le point représentatif de cet état. Par hypothèse, le volume du récipient est constant. Le système restant diphasé à T' , il est décrit par un point tel que A' . On constate que pour ce point, et $m'_{VAP} > m_{VAP}$ (car A' est plus près de la courbe de vaporisation que A) donc . I.2.5. Le débit de l'eau D restant inchangé entre les deux expériences, on a d'après I.2.3.a. et . On en déduit

I.2.6. Les points M et M' représentatifs des états du système considérés se trouvent sur la même isochore. Comme $P' > P$, le point M' est " au-dessus " de M .

$\log p$
 $T = T_{CRITIQUE}$
 $T = Cte$
 B
 A
 x'
 x
 $V = Cte$
 M'
 M
 H_m

On vérifie que le titre en vapeur en M' est supérieur à celui en $MI.2.7$. Par définition, la chaleur latente de vaporisation est telle que $H_F - H_1 = L.m$ pour la vaporisation d'une masse m de liquide. H_F est l'enthalpie de la masse m à l'état entièrement liquide (état A par exemple) et H_1 est son enthalpie à l'état entièrement gazeux (état B). On a donc . La chaleur latente massique à T se lit donc sur le diagramme enthalpique par la longueur du palier de changement d'état correspondant à cette température.

L'isotherme critique ne présente pas de palier donc, d'après ce qui précède, la chaleur latente de vaporisation est nulle.

I.3. Transferts de chaleur - Cas de l'enceinte non isolée

I.3.1. Le système thermodynamique est toujours le fluide contenu dans l'enceinte. Pendant dt , il reçoit algébriquement l'énergie thermique $P_r dt$ de la part de la résistance chauffante, $-P_{C1} dt$ échangée avec l'eau du condenseur, $-P_{P1} dt$ échangée avec l'extérieur. La variation d'enthalpie du système est donc $dH = P_r dt - P_{C1} dt - P_{P1} dt$.

En régime permanent donc .

I.3.2. D'après le modèle indiqué pour les échanges thermiques, on peut écrire $P_{P1} = b S_e (T_1 - T_0)$ et $P_{P2} = b S_e (T_2 - T_0)$. Donc $P_{P2} - P_{P1} = b S_e [(T_2 - T_0) - (T_1 - T_0)] = b S_e (T_2 - T_1)$.

Or, d'après la question précédente, on a $P_{P1} = P_r - P_{C1}$ et $P_{P2} = P_r - P_{C2}$ donc $P_{P2} - P_{P1} = -(P_{C2} - P_{C1})$.

On en déduit donc .

I.3.3. Les considérations précédentes sont vraies quel que soit le débit D_i . On peut donc écrire $b S_e (T_i - T_0) = P_{Pi} = P_r - P_{Ci}$ soit .

La courbe $P_{Ci} = f(T_i)$ est donc une droite de pente négative.

Compte tenu de la question précédente, la pente de la droite peut s'écrire donc l'équation de la droite est où C est une constante que l'on détermine par exemple à l'aide de l'expérience (1) soit . On en déduit . On peut donc écrire

Or T_0 correspond à la valeur de T_i telle que $P_{Ci} = P_r$ car alors $P_{Pi} = 0$. On obtient donc d'où .

I.3.4. Le modèle proposé conduit à $P_r = c S_r (t_r - T)$ car on doit avoir $P_r > 0$ lorsque $t_r > T$. On en déduit .

I.4 Applications numériques

I.4.1. $P_{C1} = 4\,186.2 \cdot 10^{-3} \cdot (27.2 - 14) = \underline{110.5 \text{ W}}$

I.4.3. $= \underline{1.3 \cdot 10^3 \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-1}}$

I.4.2. $= \underline{1.95 \text{ g.s}^{-1}}$

I.4.4. $P_{C1} = 4\,186.2 \cdot 10^{-3} \cdot (24.8 - 14) = \underline{113 \text{ W}}$

I.4.5. $= \underline{5.68 \text{ W.m}^{-2} \text{ K}^{-1}}$.

I.4.6. soit $\underline{T_0 = 31.3^\circ\text{C}}$.

I.4.7. $= \underline{2.7 \cdot 10^3 \text{ W.K}^{-1} \text{ m}^{-2}}$

I.4.8 On a trouvé c (correspondant à l'échange direct métal-liquide) $> a$ (correspondant à l'échange liquide-vapeur à travers un métal) $>> b$ (correspondant à l'échange fluide-gaz extérieur à travers une paroi peu perméable).

II.ELECTROMAGNETISME

II-A.1.a Le champ magnétique crée par la bobine dépend du temps donc son flux à travers la spire aussi. Il s'ensuit l'apparition d'un phénomène d'induction dans la spire qui est fixe. Il est donc caractérisé par une f.e.m. d'après la loi de Faraday.

Le schéma électrique équivalent de la bobine est donc

L
 R
 $I_1(t)$
 $e(t)$

d'où . L'équation électrique est donc . II.A1.b. La spire étant orientée comme la bobine, le vecteur normal à sa surface S est $\vec{z}$. La définition du flux à travers la spire conduit à

On fait l'approximation que le champ magnétique est uniforme sur S et vaut B_0 . On en déduit donc $\Phi(t) = B_0(t) \cdot \pi a^2$.

$B_0(t)$ étant une fonction sinusoïdale du temps, $\Phi(t)$ l'est aussi et l'on cherche la solution $I_1(t)$ de l'équation différentielle trouvée ci-dessus sous la forme d'une fonction sinusoïdale. Pour cela, on utilise la représentation complexe avec $B_0(t) = \text{Re}(B_m e^{i\omega t})$ et $I_1(t) = \text{Re}(I_1 e^{i\omega t})$. En reportant dans l'équation différentielle, on obtient $R I_1 + i\omega L I_1 = -B_m i\omega \pi a^2$ d'où .

On reconnaît l'impédance complexe $Z = R + i\omega L$ que l'on peut écrire $|Z| e^{i\phi}$. On obtient donc soit et, en prenant la partie réelle, il vient .

II.A..c. Le moment magnétique de la spire, de vecteur normal $\vec{z}$ est $\vec{M} = I_1(t) \pi a^2 \vec{z}$.

On obtient donc .

On peut écrire $\sin(\omega t - \phi) = \cos(\omega t - \phi - \pi/2)$ donc le déphasage entre $I_1(t)$ et $B_0(t)$ est : est en retard de $\phi + \pi/2$ par rapport à B_0 .

II.A.2.a. Le théorème de Stokes appliqué à la circulation sur un contour ($\mathcal{G}$) d'un vecteur $\vec{S}$ s'écrit où S est une surface s'appuyant sur le contour.

Ici, on a $\vec{a} = \vec{e}_x = (B_x \vec{e}_x + B_y \vec{e}_y + B_z \vec{e}_z) \cdot \vec{e}_x = B_y \vec{e}_z - B_z \vec{e}_y$.

D'après l'expression du rotationnel en coordonnées cartésiennes, on obtient:

Mais on sait que donc et il vient .

En appliquant le théorème de Stokes sur le contour du circuit, on obtient donc d'où le résultat demandé .

II.A.2.b. La distribution de courant dans la bobine est invariante par antisymétrie par rapport à tout plan contenant Oz. Il en est de même de son effet qui est le champ magnétique. D'après l'effet d'une antisymétrie par rapport à un plan sur le champ magnétique, on en déduit qu'au voisinage de la spire, les lignes du champ magnétique ont l'allure suivante:

La distribution de la bobine est de plus invariante par rotation autour de Oz. Donc le champ a même module en tout point de la spire.

Considérons des éléments de courant $d\vec{l}$ de la spire orientés comme I_1 . Ils subissent une force de Laplace élémentaire . On a donc un champ de forces représenté par

La distribution de force apparaît comme invariante par symétrie par rapport à tout plan contenant Oz. Il en est de même de la résultante qui est contenu dans tous ces plans donc dans leur intersection qui est Oz.

La résultante des forces de Laplace sur la spire est portée par Oz.

Il reste donc . On reconnaît le moment magnétique donc on a bien .

II.A.3. On a posé $(0) = B_m(z) \cos \omega t$ donc . Avec l'expression de obtenue en II.A.1.c., il vient

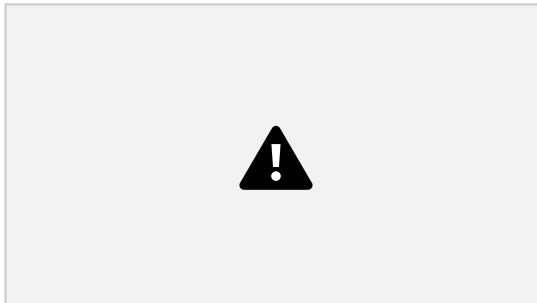
La valeur moyenne de $\sin(2\omega t - j)$ est nulle donc il reste

On sait que car le champ magnétique décroît le long de l'axe lorsque l'on s'éloigne de la bobine. Toutes les autres grandeurs étant positives, on constate que $\langle F_z(z) \rangle$ sera finalement positive. C'est une force de répulsion.

Sur le schéma précédent, qui est algébrique, les forces élémentaires sont dirigées vers le bas compte-tenu de l'orientation de I_1 . Cela montre que le courant réel I_1 est négatif ce qui est bien conforme à la loi de Lenz.

Avec $Z = R + i\omega L$, on a et donc en reportant, on obtient ce que l'on peut écrire:

Posons $X = L\omega/R$, on peut étudier la fonction . On a donc $f(X=0) = 0$ et > 0 pour tout $X > 0$. Par ailleurs, on a $f(0) = 0$ et . On a donc l'allure de la courbe suivante:



Par ailleurs, on en déduit que la limite de $\langle F_z \rangle$ aux fréquences élevées est

II.A.4.D'après ce qui précède, la question revient à chercher X tel que $f(X) = 0,99$ soit

$$X^2 = 0,99(1 + X^2)$$

$$X^2(1 - 0,99) = 0,99$$

$$X^2 = 0,99/0,01 = 99$$

d'où $X = 9,95$. On cherche donc ω tel que $L\omega/R = 9,95$.

Or et

On trouve donc ce qui correspond à la fréquence = 22,4 kHz.

II.A.5.a. D'après la relation donnée dans l'énoncé, on a

$$B_m = \frac{1}{2} \mu_0 n I_m (\cos \alpha_2 - \cos \alpha_1)$$

où et pour un point quelconque placé à la cote z donc .

On en déduit

En $z = h$ (cote de la spire), on obtient
qui est bien de la forme $m_0 k' I_m$ avec .

II.A.5.b. D'après la question précédente, on a
soit numériquement

d'où $k = 1,51 \cdot 10^3 \text{ m}^{-1}$.

De même

d'où $k' = 7,9 \cdot 10^4$.

On vérifie bien que .

II.A.5.c. Le poids de la spire est $P = mg = r (pr^2) 2p a g$. La force électromagnétique est, en moyenne et en module, $\langle F_Z \rangle = \frac{1}{2} (pa^2)^2 m_0 k I_m m_0 k' I_m / L$ car la fréquence indiquée est au-dessus de la valeur pour laquelle $\langle F_Z \rangle$ atteint sa limite.

Il y a équilibre si $P = \langle F_Z \rangle$ d'où $r 2p^2 r^2 a g = \frac{1}{2} p^2 a^4 m_0^2 k k' I_m^2 / L$.

Le courant étant sinusoïdal, on a et l'on obtient pour avoir l'équilibre

Numériquement, on trouve $= 9,5 \text{ A}$

Pour cette valeur, $B_m = 4p \cdot 10^{-7} \cdot 1,5 \cdot 10^3 \cdot 9,5 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ T}$

et $= 4p \cdot 10^{-7} \cdot 7,9 \cdot 10^4 \cdot 9,5 = 1,3 \text{ T.m}^{-1}$.

II.A.5.d. Pour augmenter le champ magnétique sans changer le nombre de spire, on peut introduire un noyau en matériau ferromagnétique dans la bobine (multiplication de B_m par m_r) ou utiliser un matériau supraconducteur pour les fils de bobinage (augmentation de I_m). Ces solutions sont utilisées industriellement par exemple dans le train à lévitation magnétique MAGLEV au Japon.

II.B.1.a. Le théorème de Green-Ostrogradski appliqué à un vecteur quelconque s'écrit

Ici . On calcule div dans la base cartésienne où les coordonnées de sont (x, y, z) et celles de ' sont (x', y', z') soit

On obtient donc où V est le volume de la sphère de rayon a .

II.B.1.b. Cherchons les propriétés du champ électrique en un point M quelconque de la sphère.

La distribution de charge est uniforme dans la sphère. Elle est donc invariante par symétrie par rapport à tout plan passant par le point M et le centre C . Il en est de même du champ qu'elle crée qui est donc dans l'intersection de tous ces plans c'est-à-dire la droite CM . Le champ en M est donc radial.

La distribution est invariante par rotation de n'importe quel angle autour d'un axe passant par O . Dans la base sphérique, le champ ne dépend pas de θ et ϕ .

On a donc finalement $E(r) = E(r) \mathbf{e}_r$.

Le flux de à travers une sphère $S(r)$ de rayon r quelconque est alors

D'après le théorème de Gauss, . Or dans le cas étudié ici, la densité volumique de charge est uniforme et numériquement égale à ρ_0 donc $Q(S) = (4/3) \pi r^3 \rho_0$. On obtient

finalement soit (**Attention!** Cette expression n'est évidemment pas homogène; cela est dû au caractère purement formel de l'égalité $\mathbf{r} = \mathbf{e}_0$.)

Vectoriellement, on peut écrire

II.B.1.c. D'après ce qui précède, on a $x_{\cdot 1} = x_{\cdot}(1/3)$. De même, on a $y_{\cdot 1} = y_{\cdot}(1/3)$ et $z_{\cdot 1} = z_{\cdot}(1/3)$. On en déduit par identification (cette relation est cette fois bien homogène car $\mathbf{r}_1$ n'est pas un champ électrique mais une grandeur homogène à l'inverse d'une longueur). Comme $\mathbf{r}_1(t) = m_0 J(t) \mathbf{z} \wedge \mathbf{r}_1$, on obtient

Dans la base cartésienne, on peut écrire

or on sait que

donc .

On remarque que ce champ est uniforme.

II.B.2. Les champs $\mathbf{E}$ et $\mathbf{B}$ vérifient les équations de Maxwell dans le conducteur. Si $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1$ et $\mathbf{r} = \mathbf{r}_2$ à l'intérieur, il reste . La seule solution est $\mathbf{E} = 0$. Le champ total est la somme du champ $\mathbf{E}_0$ créé par la bobine et $\mathbf{E}_1$ créé par les courants induits donc $\mathbf{E}_1 = -\mathbf{E}_0$. Comme $\mathbf{E}_0 = B_m \cos \omega t \mathbf{z}$, il vient, d'après l'expression de $\mathbf{E}_1$ trouvée ci-dessus,

II.B.3. Par définition, on a

Sur la sphère de rayon a , on a $\mathbf{r} = a \mathbf{r}$ et $dS = a^2 \sin \theta d\theta d\phi$.

Donc

On sait que $\mathbf{r} \wedge \mathbf{j} = -q \mathbf{r}$ d'une part, $\theta \in [0, \pi]$ et $\phi \in [0, 2\pi]$ d'autre part.

Donc .

Z

Or les lignes de courant sur la sphère forment des spires d'axes Oz dont le moment magnétique est colinéaire à Oz. Il en est forcément de même du moment magnétique résultant. On ne calcule donc que .C

q

q

on constate que $-q.Z = \cos(\pi/2 - \theta) = \sin \theta$

z

On obtient donc

Comme $\mathbf{E}_0 = B_0 \mathbf{z}$, on peut écrire

L'expression du moment magnétique d'une spire de rayon a a été trouvée en II.A.1.c. soit . A fréquence élevée, on a $|Z| \approx L\omega$ et il reste, en module

Or, pour les valeurs de a et r données en II.A.4., on a donc ce module est du même ordre que celui trouvé dans le cas de la sphère. La différence est que dans le cas de la spire, le

moment est déphasé dans le temps par rapport au champ magnétique contrairement à celui de la sphère qui est en phase.

II.B.4. La force exercée sur la sphère est

soit en moyenne sur une période

A l'équilibre, $|\langle F_z \rangle| = mg =$ donc

Application numérique: = 19,8 A