

Программа экзамена по курсу Алгебра 1 осенний семестр 2021

1. Целые и натуральные числа, операции сложения и умножения. Деление с остатком, наибольший общий делитель. Линейное представление наибольшего общего делителя. Алгоритм Евклида.
2. Алгоритм Евклида. Разложение натурального числа в произведение простых, основная теорема арифметики.
3. Определение кольца. Делители нуля, обратимые элементы. Целостные кольца. Норма и евклидовы кольца. Кольца вычетов. Кольца многочленов. Норма на кольце многочленов.
4. Определение поля. Поле комплексных чисел. Умножение и деление комплексных чисел в тригонометрической записи. Формула Муавра. Группа корней из единицы. Первообразные корни.
5. Отношение эквивалентности, согласованные операции. Множество классов эквивалентности, индуцированные операции. Кольца вычетов по целому модулю, условие существования обратного элемента. Характеристика поля, её простота.
6. Факториальные кольца, факториальность евклидовых колец, приложение к кольцам многочленов.
7. Неприводимые многочлены. Кольцо вычетов по модулю многочлена. Определение изоморфизма полей, реализация комплексных чисел. Фактор по неприводимому многочлену и обратимость в кольце вычетов.
8. Китайская теорема об остатках для чисел: классическая формулировка и в терминах изоморфизмов колец.
9. Китайская теорема об остатках для многочленов и для произвольных евклидовых колец.
10. Группы: определения и примеры. Коммутативные и некоммутирующие группы. Циклические группы, гомоморфизмы групп, ядра и образы. Теорема о циклическости подгрупп мультипликативной группы поля.
11. Идеалы в коммутативных кольцах, определение, примеры. Фактор кольца и классы эквивалентности. Идеалы в целых числах, идеалы в полях.
12. Кольца главных идеалов, евклидовы кольца являются КГИ. Пример идеала, не являющегося главным.
13. Симметрическая группа. Циклы и транспозиции. Разложение перестановки в произведение непересекающихся циклов. Системы порождающих элементов в симметрической группе.
14. Разложение на непересекающиеся циклы и порядок перестановки. Беспорядки и чётность перестановок. Знакопеременная подгруппа.
15. Левые и правые смежные классы группы по подгруппе. Отношение эквивалентности, разбиение элементов группы на смежные классы. Теорема Лагранжа, следствие для возможных порядков элементов.

16. Смежные классы, нормальные подгруппы, фактор группы. Примеры нормальных и ненормальных подгрупп. Центр группы, центр группы перестановок.
17. Ядро и образ гомоморфизма, нормальность ядра, изоморфизм между фактором по ядру и образом. Группа автоморфизмов $\text{Aut}(G)$, внутренние автоморфизмы. Отображение проекции из группы на факторгруппу.
18. Коммутаторы элементов группы, коммутант. Нормальность коммутанта, свойства фактор группы. Основные свойства коммутанта.
19. Группы преобразований, примеры. Орбиты действия группы преобразований на множестве, Стабилизатор точки при действии группой преобразований. Количество элементов в группе через длину орбиты и стабилизатор.
20. Действия группы на самой себе сопряжением и умножением, общие свойства. Сопряжение как гомоморфизм из группы G в группу $\text{Aut}(G)$. Орбиты при действии группы перестановок на себе сопряжением.
21. Группы диэдра: определение и примеры. Количество элементов и порядки элементов в группе диэдра. Центр группы диэдра.
22. Свободные группы с конечным числом образующих, универсальное свойство.
23. Представление групп диэдра в терминах образующих и соотношений.
24. Ортогональные группы в трёхмерном пространстве, собственные и несобственные преобразования. Группы движений правильного тетраэдра и куба.
25. Действия групп на множествах. Точные, свободные и транзитивные действия. Орбиты и стабилизаторы при действии групп на множествах. Теорема о произведении порядка орбиты на порядок стабилизатора.
26. Неподвижные точки и формула для количества орбит - теорема Поля-Бернсайда. Количество различных ожерелий и группа диэдра.