

1. La somme des forces extérieures est nulle (pas de frottements) donc RG est galiléen.

2. a) G est sur la bissectrice de CAB, et $AG = l \sin(\theta/2)$.

2. b) $AG = l \cos(\theta/2)$ donc $IG/RG = -\sin(\theta/2) + -l \cos(\theta/2)$.

3. a) Soit I' le milieu de CA. $IG = AC(I') + \wedge m I'/RG + AB(I) + \wedge m I/RG$
 $= ml/3 (AB + AC) + 2 l^2 \cos^2(\theta/2)$.

L'angle entre AB et GX est $\alpha + \theta/2$; l'angle entre AC et GX est $\alpha - \theta/2$.

D'où $D_o = 2ml^2$.

3. b) D'après le théorème de Koenig, $E_c = E_{c/RG} + 1/2 m V_G^2$.

$E_{c/RG} = +2m V$

$E_{c/RG} =$

$E_c = +1/2 m V_G^2$.

4. Le système est conservatif donc son énergie mécanique est constante. L'énergie potentielle du ressort est $1/2 C \theta^2$.

Donc $E_c + 1/2 C \theta^2 = \text{constante} = E_0$, énergie mécanique initiale, équation [1].

Il n'y a aucun moment extérieur en G. Donc le moment cinétique est constant :

$2ml^2 \dot{\theta} = \sigma_0$, équation [2].

5. On tire de [2] et on remplace dans [1] :

$E_0 = + 2(1/3 + \sin^2(\theta/2)) + 1/2 m V_G^2 + 1/2 C \theta^2$ [3]

6. a) On dérive l'équation [3] par rapport à t :

$0 = + [+ 3\sin(\theta/2)\cos(\theta/2)] + C\theta$

Pour θ voisin de 0, on obtient :

$+(C + \sigma_0) \theta = 0$. On obtient une solution sinusoidale autour de la position d'équilibre $\theta = 0$, de fréquence

6. b) D'après [2], garde un signe constant. Si on veut que le système reste autour d'une valeur α donnée, il faut que $\sigma_0 = 0$ donc que $\sigma_0 = 0$. La fréquence des oscillations autour de la seule position d'équilibre $\theta = 0$ devient

7. $E_c()$ correspond au mouvement d'ouverture entre les deux tiges. $E_c()$ correspond au mouvement de rotation de l'ensemble dans le plan (rotation des axes G_u et G_v).

8. $JA =$ et $JB =$. G est toujours sur la bissectrice de CAB avec $GJ = AJ \sin(\theta/2)$

9. Le théorème de Koenig donne $E_c = E_{c/RG} + 1/2 m V_G^2 = E_c() + E_c() + 1/2 (M + 2\mu) (2 + 2)$

10. Pour calculer $E_c()$, on considère α constant, c'est à dire les vecteurs et constants.

On a alors $E_c() = 1/2 M V^2 + 1/2 \mu (V + V)$, avec $V = -JA \sin(\theta/2)$, $V = a \cos(\theta/2) - JB \sin(\theta/2)$ et $V = -a \cos(\theta/2) - JB \sin(\theta/2)$

En dérivant et en remplaçant on obtient

$E_c() = 1/4 \mu a^2 (\cos^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2)) = 1/4 \mu a^2 (1 - \cos^2(\theta/2))$ [4]

Equation du mouvement : $+(C + \sigma_0) \theta = 0$.

Pour une position d'équilibre, il faut toujours α constant donc $E_c() = 0$.

On obtient alors pour seule position d'équilibre $\theta=0$ et au voisinage de $\theta=0$, [4] devient
 $+ C\theta=0$ donc une fréquence de vibration $\omega = \sqrt{\frac{C}{m}}$, expression analogue à celle obtenue en 6.b).

Thermodynamique.

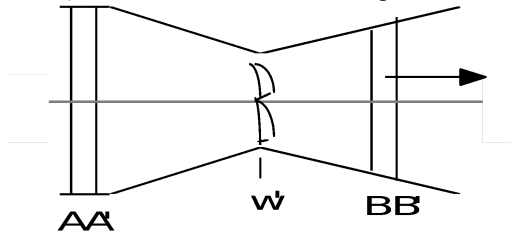
1. a) Pour la transformation isotherme de la masse m de gaz parfait, $\Delta U = 0 = W + Q$. Pendant dt , pour le système de masse constante $m(t)$, $\delta W = -P dV$ est négatif car le volume augmente. Donc $W > 0$ et $Q < 0$.

1.b) $dU = 0 = \delta W + \delta Q$.

1.c) $dV = dn RT/P = rT/P dm$, avec dn nombre de moles qui sortent pendant dt .

$\delta Q = rT dm$ donc $Q = rT (m_i - m_f) = V_0(P_i - P_f) A.N.$ $Q = 5.107J$

2.a) On considère la masse m de gaz contenue entre les plans A et B à t et entre A' et B' à $t+dt$.



On note P_1 la pression en A et P_2 celle en B, et on néglige les variations d'énergie cinétique du fluide.

Le premier principe donne $dU = \delta W + \delta Q = \delta W(\text{pression}) + \delta W'(\text{rotor}) + 0$.

Le travail des forces de pression est $P_1 V_{AA'} - P_2 V_{BB'}$

Or $dU = U_{A'B'} - U_{AB} = U_{BB'} - U_{AA'}$ en régime permanent.

Donc $dU = U_{BB'} - U_{AA'} = P_1 V_{AA'} - P_2 V_{BB'} + \delta W'$ soit $U_{BB'} - U_{AA'} = \delta W'$ pour la masse dm de fluide contenue entre A et A'.

D'où pour la masse unitaire, $h_{BB'} - h_{AA'} = w'$, où h est l'enthalpie massique.

2.b) $dH = |dm| c_p dT$ donc $h_{BB'} - h_{AA'} = r(T - T_0) |dm| = \delta W'$. Or $|dm| r T_0 = -V_0 dP$.

D'où $\delta W' = -V_0 (-1) dP$

2.c) Pour l'adiabatique réversible, la loi de Laplace donne $T = T_0 (\dots)$

$\delta W' = -V_0 (\dots) dP$

On intègre entre la pression initiale P_0 et la pression finale $P' = P_0/1000$.

$W' = -P_0 V_0 [\gamma(\dots) - \gamma + 1] = 6,9.107J$.

3.a) Le même raisonnement qu'en 2.a) donne $dh = \delta Q$.

3.b) On aura donc ici $\delta Q = r(T_0 - T) |dm| = -\delta W' = -6,9.107J$.

4.a) Lorsque la masse dm d'air entre, le volume passe de $V_0 + V(dm) \rightarrow V_0$, la pression extérieure étant P_0 . Le travail élémentaire reçu par l'air est $\delta W = -P_0 dV = r T_0 dm$, donc pour faire entrer la totalité le travail des forces de pression est $W = m r T_0$.

4.b) Le premier principe donne $\Delta U = W + Q = W$, soit $= m r T_0$. D'où γ .

4.c) $T_f = 403,2K$

Mécanique des fluides compressibles.

1. On reprend le calcul de la question 2a) précédente. Le premier principe donne $\Delta U + \Delta E_c = W + Q$. l'écoulement est adiabatique ($Q=0$) et le travail des forces de pression inchangé.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} dm(c_2^2 - c_1^2)$$

$$D'où h_2 - h_1 + \Delta E_c = \Delta h + \Delta E_c = 0.$$

2. La vitesse c de l'air dans l'atmosphère est nulle donc $\Delta h + \Delta E_c = 0 = C_p(T_1 - T_a) + \frac{1}{2}c^2$.

3. La même relation donne $T_1 = T_a$ au niveau du thermomètre.

4. Cette relation donne $T = T_a$ dans toute la tuyère.

5. La transformation étant adiabatique et réversible la loi de Laplace donne $P_1 = P_2 \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

6. Débit massique $m = \rho S c$.

7. L'isentrope a pour équation $0 = C_p - V$. Pour la masse unitaire $PV = RT$ donc $0 = C_p - R \ln T$ donc $\ln T = \frac{C_p}{R}$.
Le débit massique est constant donc $m = \rho S c = \text{const}$.

Pour le gaz parfait $\rho = P/RT$ donc $m = \frac{P}{RT} S c = \text{const}$ et $c = \sqrt{\gamma RT} \left(1 - \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{-1/2}$

$$\Delta h + \Delta E_c = 0 \text{ donne } C_p dT + c dc = 0$$

$$\frac{dT}{T} + \frac{c}{T} \frac{dc}{c} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} + \frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2} = 0 \Rightarrow \frac{dT}{T} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$$

soit $\frac{dT}{T} = -\frac{1}{2} \frac{dM^2}{M^2}$

8. Dans la partie convergente $M < 1$ donc comme M^2 croît, c décroît. Au minimum de section $dS=0$. Si M n'est pas égal à 1 en ce point, on atteint le maximum de c et ensuite $dS > 0$ et $dc < 0$, c décroît. Si M est égal à 1 au coude, c n'y est pas maximal et peut continuer à croître ce qui donnera $M > 1$.

9. $C_p = R$ donc $\sqrt{\gamma RT} = \sqrt{\gamma} \sqrt{RT}$ et $M = \frac{c}{\sqrt{\gamma RT}}$.

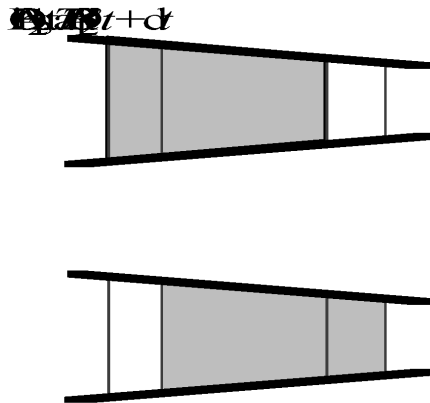
10. De 2. on tire $T_1 = T_a + \frac{c^2}{2} = T_a \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)$ et $P_1 = P_a \left(1 + \frac{\gamma-1}{2} M^2\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}$

11. A.N. Pour concorde $T_1 = 426K = 153^\circ C$. Il faut donc refroidir la cabine.
Pour la navette spatiale $T_1 = 1299K = 1026^\circ C$.

Troisième problème : Mécanique des fluides compressibles

III.1) On reprend la démarche de la question II.1). En régime permanent le transfert du fluide contenu dans le volume ABCD dans le volume A'B'C'D' est équivalent au transfert de la masse de fluide dm contenue dans le volume initial ABA'B' dans le volume final CDC'D' car la masse de fluide, l'énergie interne et l'énergie cinétique contenues dans le volume A'B'C'D' sont constantes.

Si on tient compte de l'énergie cinétique, le premier principe prend la forme :



$$dU + dEc = U(t+dt) - U(t) + Ec(t+dt) - Ec(t) = \delta W + \delta Q.$$

Le calcul de dU a été effectué et donne $dm \cdot \Delta u$ où Δu est la variation d'énergie interne massique entre l'état initial (volume ABA'B' dans l'état T_1, P_1) et l'état final (volume CDC'D' dans l'état T_2, P_2)

De manière analogue on peut écrire :

$dEc = Ec_{CDC'D'} - Ec_{ABA'B'} = dm \cdot \Delta ec$, où Δec est la variation d'énergie cinétique massique.

Ce terme doit être rajouté à l'expression du premier principe obtenue dans le problème 2 :

l'enthalpie $w_0 + q = \Delta h$ devient

$$w_0 + q = \Delta h + \Delta ec$$

Pour une transformation adiabatique ($q = 0$) telle que $w_0 = 0$ (hypothèse de l'écoulement non visqueux) on obtient finalement :

$$\Delta h + \Delta ec = 0$$

Les variations d'énergie cinétique et d'enthalpie massiques sont opposées.

III.2) On exprime Δh et Δec pour une particule de fluide passant de l'état 1 (T_1, P_1, c_1) à l'état 2 (T_2, P_2, c_2).

Le gaz est supposé parfait et vérifie la seconde loi de Joule :

$\Delta h = c_P (T_2 - T_1)$ où $c_P = \gamma R / (\gamma - 1)$ (question II.2)

L'énergie cinétique d'une particule de fluide de masse m et de vitesse c est $mc^2/2$ donc l'énergie cinétique massique associée est $ec = c^2/2$:

$\Delta ec = c_2^2/2 - c_1^2/2$.

On en déduit la relation générale :

$$c_1^2/2 + c_P T_1 = c_2^2/2 + c_P T_2 = \text{cste.}$$

(Cette relation est vérifiée pour toute transformation adiabatique, réversible ou non, sans travail autre que celui des forces de pression ; cf. question III.11)

Le fluide qui pénètre dans le réservoir provient de l'atmosphère à la température T_a où la vitesse est nulle. On peut donc écrire en notant T_1 et c_1 la température et la vitesse dans la section d'entrée :

$$c_1^2/2 + c_P T_1 = c_P T_a$$

III.3) L'arrêt des particules de gaz au niveau du thermomètre correspond au passage isentropique de l'état (T_1, c_1) à l'état ($T_{i1}, c=0$). Si on suppose cette transformation réversible elle est également adiabatique et les résultats précédents s'appliquent. Par conséquent :

$c_P T_{i1} = c_1^2/2 + c_P T_1$ et

$$T_{i1} = T_1 + c_1^2/(2c_P)$$

Par comparaison avec la question précédente on a également :

$$T_{i1} = T_a$$

III.4) Quelle que soit la section de la tuyère le passage d'une particule de gaz de l'atmosphère ($T_a, c = 0$) à la surface du thermomètre ($T_i, c = 0$) est une transformation adiabatique réversible puisque l'arrêt des particules par le thermomètre est isentropique et réversible. En appliquant l'égalité de la question 2, on obtient indépendamment de la section considérée de la tuyère :

$$T_i = T_a$$

La température T_i est donc une caractéristique de l'écoulement qui ne dépend que des conditions initiales de l'écoulement (conditions géométriques). Elle est appelée *température d'arrêt isentropique de l'écoulement*.

III.5) L'arrêt des particules par le capteur de pression est isentropique. La température à la surface du capteur est donc T_{i1} d'après le résultat précédent, et les états (P_1, T_1) et (P_{i1}, T_{i1}) sont reliés par une transformation isentropique.

En utilisant la relation de Laplace sous la forme vue à la question II.2.c) :

$$T/P(\gamma-1)/\gamma = \text{cste}$$

on obtient la relation :

$$(P_{i1}/P_1)(\gamma-1)/\gamma = T_{i1}/T_1$$

Remarque : la pression d'arrêt isentropique P_{i1} est ici égale à la pression atmosphérique P_a puisque le passage d'une particule de gaz de l'atmosphère (T_a, P_a) à la surface du capteur (T_a, P_i) est isentropique et réversible.

III.6) On suppose l'écoulement unidimensionnel et les variations de la section de la tuyère suffisamment faibles pour que la vitesse des particules soit pratiquement alignée avec l'axe de la tuyère en tout point. Si Ox désigne l'axe de la tuyère, et r son rayon en un point donné ($S = \pi r^2$), cette condition signifie $dr/dx \ll 1$.

Le volume traversant la section σ de surface S durant le temps dt vaut :

$$dV = S c dt \text{ (volume du cylindre s'appuyant sur la section } \sigma \text{, de génératrice de longueur } c dt \text{, normale à } \sigma \text{)}$$

La masse volumique est uniforme sur toute section d'un écoulement unidimensionnel. La masse de fluide dM traversant σ pendant le temps dt vaut

$$dM = \rho S c dt$$

On en déduit le débit massique m ($m = dM/dt$) :

$$m = \rho S c$$

III.7) En régime permanent l'écoulement adiabatique et réversible du gaz dans la tuyère est caractérisé par les invariants suivants :

conservation du débit massique en régime permanent :

$$\rho S c = \text{cste}$$

expression du premier principe (question III.1) :

$$h + ec = \text{cste}$$

Ces invariants s'écrivent sous forme différentielle :

$$\begin{aligned} d\rho/\rho + dS/S + dc/c &= 0 \\ dh + dec &= 0 \end{aligned}$$

Pour obtenir l'équation demandée, il suffit d'exprimer le rapport $d\rho/\rho$ dans la première équation. On commence par transformer l'équation $dh + dec = 0$ pour faire apparaître les variables ρ et c .

L'expression classique de la différentielle de l'enthalpie dH en fonction des variables S (entropie, à ne pas confondre avec la section de la tuyère), P :

$dH = TdS + VdP$ prend pour l'enthalpie massique la forme :

$$dh = Tds + VmdP = Tds + (dP)/\rho,$$

où s est l'entropie massique et Vm le volume massique.

Les transformations du gaz sont isentropiques, donc ds est nul et dh est égal à :

$$dh = (dP)/\rho.$$

Comme $ec = c^2/2$, $dec = cdc$; l'équation $dh + dec = 0$ s'écrit :

$$(dP)/\rho + cdc = 0$$

Toutes les variables d'état du gaz s'expriment à partir d'un couple de deux variables d'état indépendantes, on peut écrire $P = f(\rho, s)$ et sous forme différentielle :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s d\rho + \left(\frac{\partial P}{\partial s}\right)_\rho ds$$

puisque les transformations sont isentropiques ($ds = 0$), on a simplement :

$$dP = \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)_s d\rho$$

L'équation $(dP)/\rho + cdc = 0$ s'écrit donc :

$(\rho P / \rho) s \, d\rho/\rho + c \, dc = 0$, soit
 $d\rho/\rho = \frac{c}{2} \frac{(\rho P / \rho) s}{dc} \, dc/c = \frac{1}{M^2} \frac{dc}{c}$, en introduisant le nombre de Mach.

En reportant l'expression précédente de $d\rho/\rho$ dans l'équation $d\rho/\rho + dS/S + dc/c = 0$, on aboutit à l'équation demandée :
 $dS/S + (1 - M^2)dc/c = 0$

Remarque : la valeur de $\tilde{A}(\rho P / \rho) s$ calculée en un point quelconque du fluide représente la vitesse locale du son en ce point. Le nombre de Mach est donc le rapport de la vitesse locale du fluide par la vitesse locale du son. En un point de l'écoulement, si $M < 1$, la vitesse du fluide est inférieure à celle du son, l'écoulement est subsonique, si $M > 1$ la vitesse du fluide est supérieure à celle du son, l'écoulement est supersonique.

III.8) D'après l'équation précédente, l'égalité $M = 1$ entraîne l'égalité $dS/S = 0$: le nombre de Mach ne peut être égal à 1 qu'au niveau de la section minimale de la tuyère en l'absence de discontinuité de la vitesse. Le signe de dc/c dépend de celui de dS/S mais également de celui de $1 - M^2$: l'évolution de la vitesse de l'écoulement le long de la tuyère diffère selon la nature subsonique ou supersonique de celui-ci.

Si M reste inférieur ou égal à 1 dans toute la tuyère, $1 - M^2$ reste positif ou nul en tout point de la tuyère. Par conséquent les rapports dc/c et dS/S sont nécessairement de signes opposés, de même que dc et dS puisque c et S sont positifs.

Lorsque le gaz se déplace dans le convergent, $dS < 0$, donc $dc > 0$: la vitesse du gaz croît dans le convergent

Lorsque le gaz se déplace dans le divergent $dS > 0$ donc $dc < 0$: la vitesse du gaz décroît dans le divergent.

On en déduit que la vitesse est maximale au col de la tuyère (passage du convergent au divergent). De manière plus générale, d'après l'égalité $dS/S + (1 - M^2)dc/c = 0$, la vitesse est extrême dans le col (maximale pour un écoulement subsonique, minimale pour un écoulement supersonique) et l'écoulement est de même nature de part et d'autre du col si M est différent de 1 dans le col ($dS = 0$ au col).

Remarque : si $M = 1$ au niveau du col, dc n'est pas nécessairement nul. Dans ce cas, en supposant $M < 1$ à l'entrée de la tuyère (les résultats sont analogues si $M > 1$) :

- * c croît dans le convergent ($dc > 0$), M restant inférieur à 1 (régime subsonique),
- * $M = 1$ au niveau du col avec $dc > 0$ (si $dc = 0$ l'écoulement aval est instable).
- * c continue à croître dans le divergent, M étant alors supérieur à 1 (régime supersonique).

La nature de l'écoulement change au passage d'un col si le nombre de Mach vaut 1 au col (conditions critiques)

L'intérêt d'une tuyère convergente-divergente (tuyère de De Laval) est précisément de pouvoir générer un écoulement supersonique à partir d'un écoulement subsonique, à condition que le nombre de Mach soit égal à 1 au col de la tuyère.

III.9) L'expression du nombre de Mach est :

$$M = c / \tilde{A}(\rho P / \rho) s$$

La différentielle logarithmique de la loi de Laplace, vérifiée pour les transformations isentropiques permet d'exprimer $(\rho P / \rho) s$:

$P/\rho^\gamma = \text{cste}$, d'où $dP/P - \gamma d\rho/\rho = 0$ et :

$$(\rho P / \rho) s = \gamma P / \rho$$

La loi des gaz parfaits $P/(\rho T) = r$ permet d'exprimer le rapport P/ρ en fonction de T :

$(\rho P / \rho) s = \gamma r T$, soit

$$M = c / \tilde{A}(\gamma r T)$$

III.10) D'après la question III.3) :

$$T_{i1} = T_1 + c^2/(2cP)$$

En exprimant $cP = \gamma r / (\gamma - 1)$:

$$T_{i1} = T_1 [1 + (\gamma - 1) c^2 / (2 \gamma r T_1)]$$

En introduisant le nombre de Mach M_1 ($M_1^2 = c^2 / (\gamma r T_1)$) on en déduit l'expression de T_{i1} :

$$T_{i1} = T_1 [1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2]$$

D'après la question 5) :

$$P_{i1}/P_1 = (T_{i1}/T_1)^\gamma / (\gamma - 1)$$

En utilisant l'expression précédente de T_{i1} en fonction de T_1 :

$$P_{i1} = P_1 [1 + (\gamma - 1) M_1^2 / 2]^\gamma / (\gamma - 1)$$

III.11) Dans le référentiel lié à l'avion la vitesse des particules incidentes est l'opposée de la vitesse de l'avion dans le référentiel terrestre. Par conséquent la température T_{i1} vaut

$$T_{i1} = T_1 [1 + (\gamma - 1) M^2 / 2],$$

où M est le nombre de Mach associé à la vitesse de l'avion et la température de l'atmosphère non perturbée.

Remarque : la relation précédente est déduite du premier principe (questions III.1, III.2 et III.3). Elle est applicable à tout écoulement adiabatique unidimensionnel, sans travail autre que celui des forces de pression, en particulier dans le cas de l'écoulement en amont d'un avion volant à vitesse supersonique, bien que celui-ci ne soit pas isentropique.

Dans ce cas en effet, l'écoulement des particules de fluide (dans le référentiel de l'avion) est supersonique à grande distance et subsonique au voisinage de l'avion (la vitesse du fluide est nulle en certains points de la surface de l'avion). Il existe donc des points où le nombre de Mach vaut 1.

D'après les questions III.7 et III.8 ces points correspondent nécessairement à la section de l'écoulement minimale pour un écoulement isentropique. Or la section de l'écoulement du fluide en amont d'un avion n'a pas de raison de passer par un minimum, cet écoulement n'est par conséquent pas isentropique. Ceci se traduit par l'apparition d'**ondes de choc** en amont de l'avion, surfaces de discontinuité pour la pression et la vitesse de l'écoulement, à travers lesquelles le passage du fluide se produit avec une augmentation d'entropie. Une manifestation courante de ces ondes de choc est le bang des avions supersoniques.

Contrairement à la température d'arrêt, la pression d'arrêt mesurée sur un avion en vol supersonique n'est pas donnée par la relation de la question 10, puisque celle-ci a été établie en considérant explicitement un écoulement isentropique (Cf question III.5).

A.N. : $T_1 = 256,5 \text{ °C} = 216,6 \text{ K}$; $\gamma = 1,4$; $M = 2,2$ (Concorde) :

$$T_{i1} = 426,3 \text{ K} = 153,2 \text{ °C}$$

Si cette température est appliquée aux parois du Concorde, il est nécessaire de refroidir la cabine.

$T_1 = 256,5 \text{ °C} = 216,6 \text{ K}$; $\gamma = 1,4$; $M = 5$ (navette spatiale) :

$$T_{i1} = 1299,6 \text{ K} = 1026,5 \text{ °C}$$

Il est nécessaire de protéger la navette par un bouclier thermique.