



Теоретичні відомості

Вивчення багатьох фізичних процесів і геометричних закономірностей часто призводить до розв'язування завдань з параметрами. Олімпіаді завдання також містять рівняння з параметрами, які часто є дуже складними і вимагають нестандартного підходу до розв'язання.

Багато завдань з параметрами можна розв'язати як аналітичним, так і графічним методами в системі xOy або xOa .

Важливим є виявлення найбільш раціонального способу розв'язання, яке швидко приводить до відповіді. Одним із зручних і швидких способів розв'язання значної кількості рівнянь і нерівностей з параметрами є графічний метод.

Наведемо розв'язання деяких типів рівнянь.

Розглянемо рівняння $f(a, b, c, \dots, k, x) = f(a, b, c, \dots, k, x)$, (1)

де $a, b, c, \dots, k, x$ — змінні величини.

Будь-яку систему значень змінних $a = a_0, b = b_0, c = c_0, \dots, k = k_0, x = x_0$, при якій і ліва і права частини цього рівняння набувають дійсних значень, називають **системою допустимих значень змінних $a, b, c, \dots, k, x$** .

Змінні $a, b, c, \dots, k$, які під час розв'язування рівняння вважають сталими, називають **параметрами**, а саме рівняння називають **рівнянням, що містить параметри**.

Параметри позначають першими літерами латинського алфавіту: $a, b, c, d, \dots, k, m, n$, а невідомі — буквами x, y, z .

Розв'язати рівняння з параметрами означає вказати, при яких значеннях параметрів існують розв'язки і які вони.

Два рівняння, що містять одні й ті самі параметри, називають **рівносілними**, якщо:

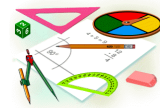
- 1) вони мають зміст при одних і тих самих значеннях параметрів;
- 2) кожен розв'язок першого рівняння є розв'язком другого, і навпаки.

Алгоритм розв'язання завдань графічним методом у системі xOy

1. Знаходимо область допустимих значень рівняння.
2. Запишемо рівняння у вигляді $f(x) = g(x)$.
3. У системі координат xOy будемо графіки функцій $y = f(x)$ та $y = g(x)$ для тих значень x , які належать області допустимих значень поданого рівняння.
4. Встановлюємо взаємне розташування графіків поданих функцій залежно від значень параметра a .
5. Якщо графіки перетинаються, то визначаємо абсциси точок перетину. Для цього достатньо розв'язати рівняння $f(x) = g(x)$ відносно x .
6. Записуємо відповідь.

Алгоритм розв'язання завдань графічним методом у системі xOa

1. Знаходимо область допустимих значень рівняння.



2. Виражаємо a як функцію від x .
3. У системі координат xOa будуємо графік $a = f(x)$ для тих значень x , які належать області допустимих значень поданого рівняння.
4. Знаходимо точки перетину прямої $a = c$, де c будь-яке дійсне число з графіком функції $a = f(x)$. Якщо пряма $a = c$ перетинає графік $a = f(x)$, то визначаємо абсциси точок перетину. Для цього достатньо розв'язати рівняння $a = f(x)$ відносно x .
5. Записуємо відповідь.

Приклади задач з розв'язанням

Приклад № 1. При яких значеннях параметра a корінь рівняння $|x - 3| + |x - a| = a - 3$ тільки одне парне число.

Розв'язання.

Детально проаналізуємо взаємне розташування графіків функцій $y = |x - 3| + |x - a|$ та $y = a - 3$ залежно від значення параметра a . Розглянемо систему координат xOy .

Побудуємо графіки функцій $y = |x - 3| + |x - a|$ та $y = a - 3$ для різних значень параметра a , наприклад:

$a = 3, 4, 5, 6$ (при $a < 3$ рівняння не має розв'язків):
тобто

при $a = 3$ $y = 2|x - 3|$;

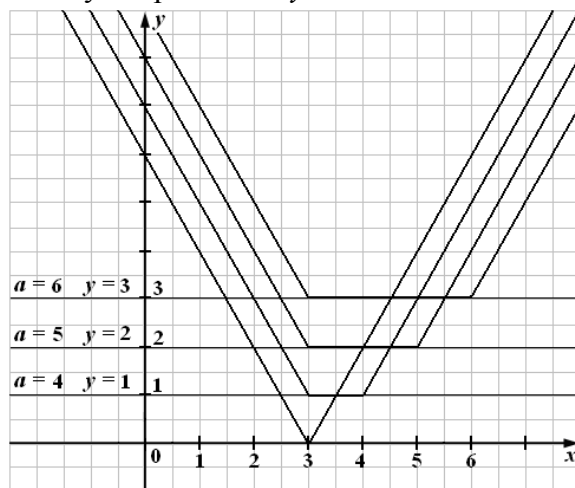
при $a = 4$ $y = |x - 3| + |x - 4|$;

при $a = 5$ $y = |x - 3| + |x - 5|$;

при $a = 6$ $y = |x - 3| + |x - 6|$;

та прямі $y = a - 3$ при $a = 3, 4, 5, 6$:

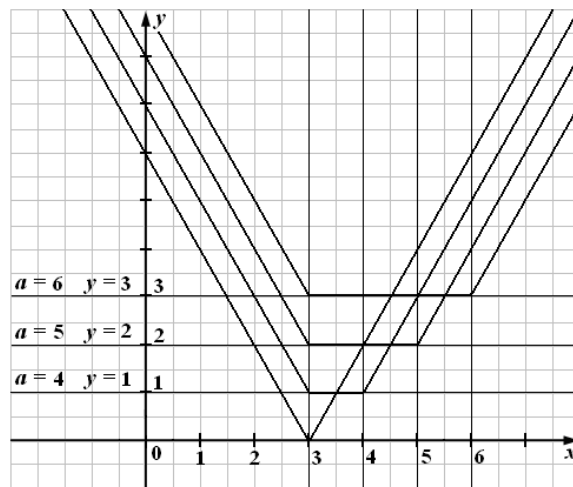
$y = 0, y = 1, y = 2, y = 3$.



Проаналізувавши зміну взаємного розташування графіків функцій $y = |x - 3| + |x - a|$ та $y = a - 3$ залежно від параметра a встановлюємо, що при $a = 3$ рівняння має єдиний розв'язок $x = 3$.

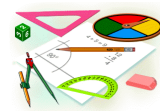
При $a > 3$ рівняння має безліч розв'язків, які більші за 3 і менші a .

Очевидно, що множина коренів рівняння $|x - 3| + |x - a| = a - 3$ містить тільки одне парне число $x = 4$, якщо a всі дійсні числа від 4 та менші 6.



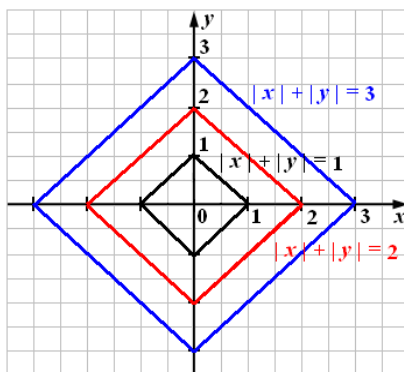


Графічний спосіб розв'язування рівнянь з параметрами



Відповідь. Множина коренів рівняння містить тільки одне парне число $x = 4$, якщо a всі дійсні числа від 4 та менші 6.

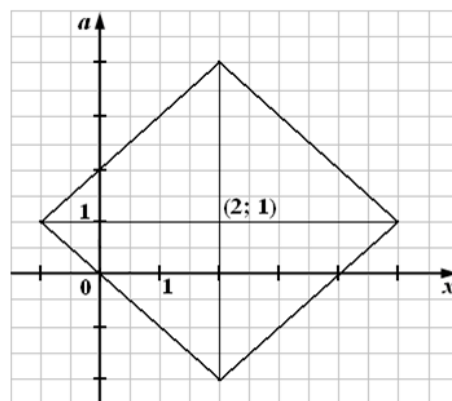
Важливо знати. Графіки рівнянь $|x| + |y| = 1$, $|x| + |y| = 2$, $|x| + |y| = 3$ мають вигляди квадратів з діагоналями 2, 4, 6 відповідно (див рис.).



Приклад № 2. Знайдіть кількість коренів рівняння $|x - 2| + |a - 1| = 3$ та їх значення залежно від параметра a .

Розв'язання.

Користуючись попереднім зауваженням, побудуємо графік рівняння $|x - 2| + |a - 1| = 3$ в системі xOa . Його можна отримати з графіка рівняння $|x| + |y| = 3$ шляхом перенесення останнього на 2 одиниці вправо вздовж осі Ox та на 1 одиницю вгору вздовж осі Oy . Це квадрат, діагоналі якого дорівнюють 6 одиниць, паралельні осям координат. Центр квадрата знаходиться в точці $(2; 1)$.

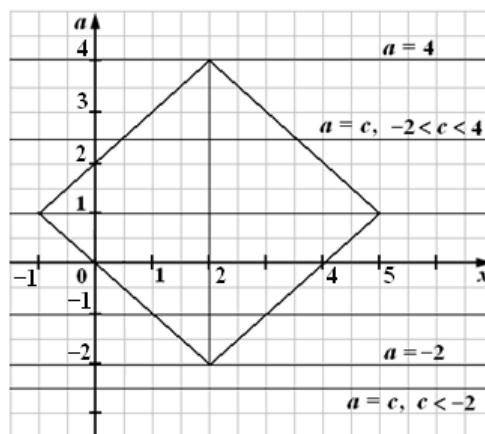


Побудуємо прямі $a = c$, де c – будь-яке дійсне число, і тим самим визначимо кількість коренів рівняння.

Якщо a – це всі дійсні числа менші за -2 і більші за 4, то рівняння не має коренів.

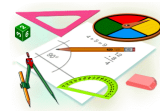
При $a = 4$ та при $a = -2$ рівняння має один корінь $x = 2$; при $a = 1$ рівняння має два корені $x_1 = -1$ та $x_2 = 5$.

Якщо a це всі дійсні числа більші за -2 і менші за 4, то рівняння має два корені. Знайдемо їх значення. Рівняння сторін квадрата мають вигляд $a = -x$ та $a = x - 4$. Звідси: $x_1 = -a$, $x_2 = a + 4$.





Графічний спосіб розв'язування рівнянь з параметрами



Якщо a це всі дійсні числа більші за 1 і менші за 4, то рівняння теж має два корені. Знайдемо їх значення. Рівняння сторін квадрата мають вигляд $a = x + 2$ та $a = -x + 6$. Звідси: $x_1 = a - 2$, $x_2 = 6 - a$.

Відповідь. Якщо a – всі дійсні числа менші за -2 і більші за 4, то рівняння не має коренів.

При $a = 4$ та при $a = -2$ рівняння має один корінь $x = 2$.

При $a = 1$ рівняння має два корені $x_1 = -1$ та $x_2 = 5$.

Якщо a це всі дійсні числа більші за -2 і менші за 1, то рівняння має два корені $x_1 = -a$, $x_2 = a + 4$.

Якщо a це всі дійсні числа більші за 1 і менші за 4, то рівняння має два корені $x_1 = a - 2$, $x_2 = 6 - a$.

Приклад № 3. Для якого найбільшого цілого значення параметра a рівняння $||x - 3| - a| = 7$ має два розв'язки?

Розв'язання.

Розв'яжемо рівняння графічним способом. Більш детально проаналізуємо взаємне розташування графіків функцій $g(x) = ||x - 3| - a|$ та $f(x) = 7$.

$f(x) = 7$ – пряма, паралельна осі Ox і проходить через точку $(0; 7)$.

Розглянемо різні положення графіка функції $g(x) = ||x - 3| - a|$ залежно від параметра a та визначимо кількість точок перетину графіків.

1. Якщо $a = 0$, то $g(x) = |x - 3|$, тому рівняння має два корені (рис. 1).

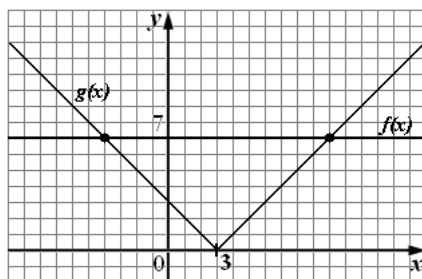


Рис. 1

2. Якщо $a < -7$, то графік функції $g(x)$ має вигляд, який вказано на рисунку 2. Точок перетину графіків немає. Рівняння розв'язків не має.

3. Якщо $a = -7$, тоді маємо одну точку перетину графіків (рис.3). Рівняння має один розв'язок.

4. Якщо $-7 < a < 0$, то графіки функцій перетинаються в двох точках (рис.4) і рівняння має два розв'язки.



Графічний спосіб розв'язування рівнянь з параметрами

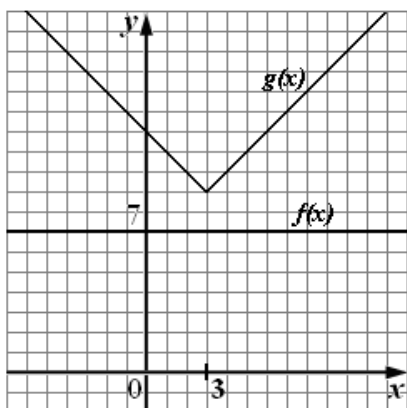
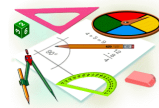


Рис.2

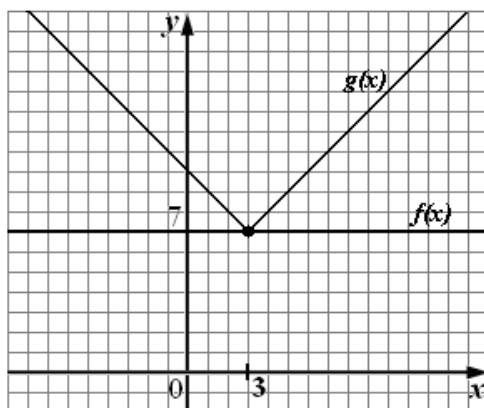


Рис.3

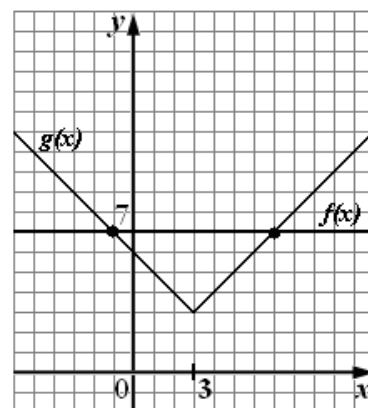


Рис.4

5. Якщо $0 < a < 7$. Рівняння має два розв'язки (рис.5).

6. Якщо $a = 7$, то графіки перетинаються в трьох точках (рис.6).

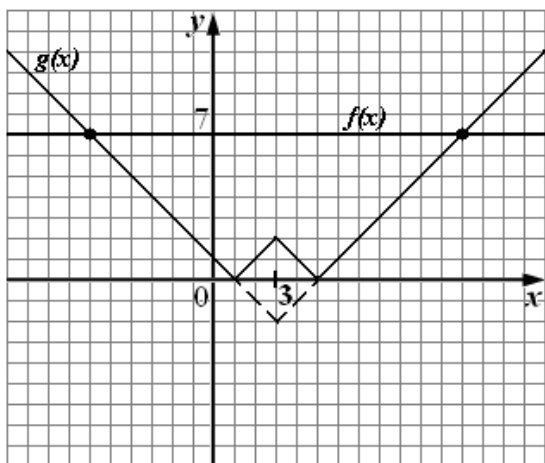


Рис.5

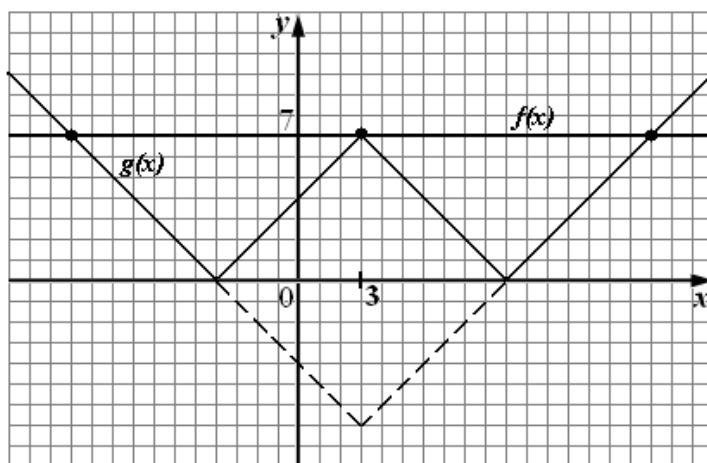


Рис.6

7. Якщо $a > 7$, то рівняння матиме чотири розв'язки (рис.7).

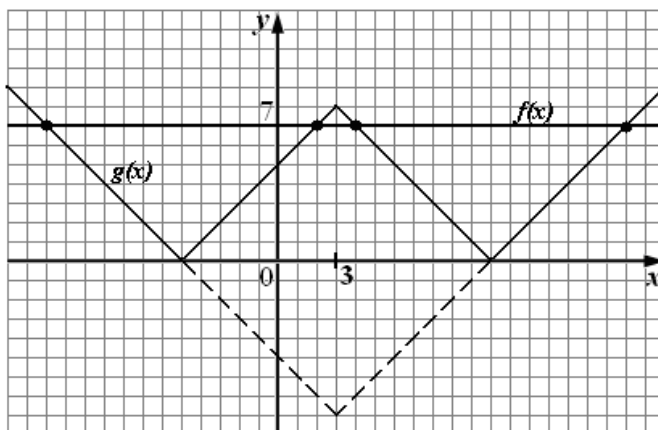
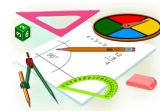


Рис.7



Як видно з наведених міркувань, рівняння має два розв'язки, коли $-7 < a < 7$ (випадки 1, 4, 5). Тому $a = 6$ – найбільше ціле значення параметра, яке задовольняє умову.

Відповідь. 6.

Задачі до даної теми

1¹. При якому значення параметра a рівняння $||x - 4| - a| = 11$ має два розв'язки?

Відповідь. $a = 0$; $0 < a < 11$.

2². Для якого найбільшого цілого значення параметра a рівняння $||x - 4| - a| = 9$ має два розв'язки?

Відповідь. 8.

3³. При яких значеннях параметра a рівняння $|x - 2| + |a - 1| = 3$ має один розв'язок.

Відповідь. При $a = 4$ та при $a = -2$, $x = 2$.

4⁴. При яких значеннях параметрах a корінь рівняння $|x - 3| + |x - a| = a - 3$ тільки одне парне число.

Відповідь. Рівняння має тільки одне парне число $x = 4$, якщо a всі дійсні числа від 6 та менше 8.

Список рекомендованої літератури до підготовки з даної теми:

1. Білозір Н.М. Модуль і параметр у рівняннях // Математика. – 2001. – №17. – с. 15.
2. Шаповал Л.В. Рівняння з параметрами. // Математика в школах України. – 2014. – №34–36. – 120с.