تابع لحل السلسلة رقم 03

التمرين الثالث :

1) أ-تبيين أن النقطة $\Omega\left(0;\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحني (C)

تذكير : النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C) معناه : من أجل كل $x\in D_f$, $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

بما أن

$$f(-x)+f(x)=\frac{1}{2}(-x)+1+\frac{e^{-x}}{e^{-x}+1}+\frac{1}{2}x+1+\frac{e^x}{e^x+1}$$

$$=2+\frac{1}{e^x+1}+\frac{e^x}{e^x+1}=2+\frac{e^x+1}{e^x+1}=2+1=3$$

إذن : $f(-x)+f(x)=3$ ومنه النقطة $\Omega\left(0;\frac{3}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C)

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ و $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$

لأنه $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{1}{2}x+1+\frac{e^x}{e^x+1}\right)=-\infty$

لما $x\to-\infty$:
$$\begin{cases}\frac{1}{2}x+1\to-\infty\\ \frac{e^x}{e^x+1}\to 0\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{2}x+1+\frac{e^x}{e^x+1}\right)=+\infty$

لما $x\to-\infty$: $\frac{1}{2}x+1\to+\infty$ و

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^x}{e^x\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{e^x}\right)}=1$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^x}=0$

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{1}{2}+\frac{e^x\left(e^x+1\right)-\left(e^x\times e^x\right)}{\left(e^x+1\right)^2}=\frac{1}{2}+\frac{e^x}{\left(e^x+1\right)^2}$$

واضح انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)>0$

جدول التغيرات :

3) أ - تبيين أن المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$

لدينا : $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)\right]=\lim\limits_{x\to-\infty}\left(\frac{e^x}{e^x+1}\right)=0$

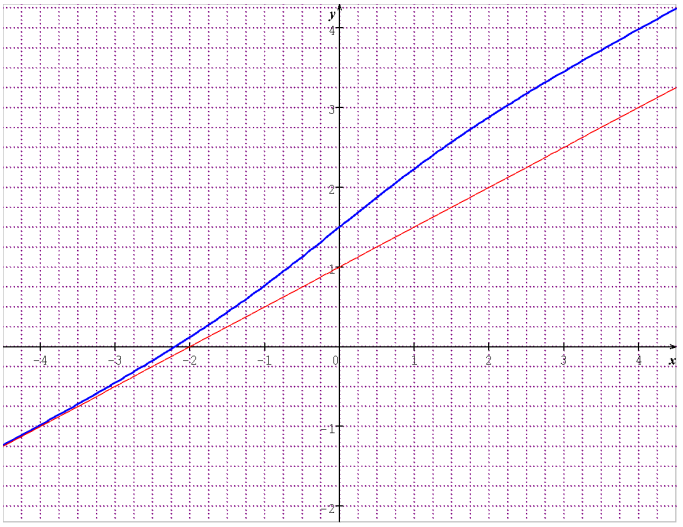
ومنه المستقيم (Δ) الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$ مقارب مائل للمنحني (C) عند $-\infty$

ب- دراسة وضعية (C) بالنسبة للمستقيم الذي معادلته $y=\frac{1}{2}x+1$

ندرس إشارة الفرق : $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)$

لدينا : $f(x)-\left(\frac{1}{2}x+1\right)=\frac{e^x}{e^x+1}>0$ ومنه (C) يقع فوق (Δ)

ج - أنشاء (C) و (Δ) . و $f(0)=\frac{3}{2}$ يقع محور الفواصل (C) في نقطة واحدة (واصح من جدول التغيرات)



x	$-\infty$ $+\infty$
$f'(x)$	$+$
$f(x)$	

التمرين الرابع :

1) أ-تبيين أن النقطة $\Omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر للمنحنى (C)

تذكير : النقطة $\Omega(\alpha;\beta)$ مركز تناظر لـ (C) معناه : من أجل كل $x\in D_f$, $(2\alpha-x)\in D_f$ و $f(2\alpha-x)+f(x)=2\beta$

بما أن

$$f(-x)+f(x)=\frac{2e^{-3x}-1}{e^{-3x}+1}+\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}=\frac{2-e^{3x}}{1+e^{3x}}+\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$$

$$=\frac{1+e^{3x}}{1+e^{3x}}=1$$

إذن

ومنه النقطة $\Omega\left(0;\frac{1}{2}\right)$ مركز تناظر لـ (C) $f(-x)+f(x)=1$

ب- أحسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$ ثم فسر النتيجة هندسيا .

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\left(\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}\right)=-1$$

لأن : $\lim\limits_{x\to-\infty}e^{3x}=0$

التفسير الهندسي : المستقيم الذي معادلته $y=-1$ مقارب لـ (C) عند $-\infty$

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{e^{3x}\left(2-\frac{1}{e^{3x}}\right)}{e^{3x}\left(1+\frac{1}{e^{3x}}\right)}$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(2-\frac{1}{e^{3x}}\right)}{\left(1+\frac{1}{e^{3x}}\right)}=2$$

لأن : $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{e^{3x}}=0$

التفسير الهندسي : المستقيم الذي معادلته $y=2$ مقارب لـ (C) عند $+\infty$

2) أ- أحسب $f'(x)$ ثم شكل جدول تغيرات f على $\mathbb{R}$

$$f'(x)=\frac{6e^{3x}\left(e^{3x}+1\right)-3e^{3x}\left(2e^{3x}-1\right)}{\left(e^{3x}+1\right)^2}$$

$$=\frac{6e^{6x}+6e^{3x}-6e^{3x}+3e^{3x}}{\left(e^{3x}+1\right)^2}=\frac{9e^{3x}}{\left(e^{3x}+1\right)^2}>0$$

واضح انه من أجل كل $x\in\mathbb{R}$: $f'(x)>0$

جدول التغيرات :

3) إيجاد نقطة تقاطع (C) تقاطع مع محور الفواصل

نحل المعادلة $f(x)=0$

$f(x)=0$ معناه $\frac{2e^{3x}-1}{e^{3x}+1}$ أي $2e^{3x}-1=0$ ومنه $2e^{3x}=1$

أي

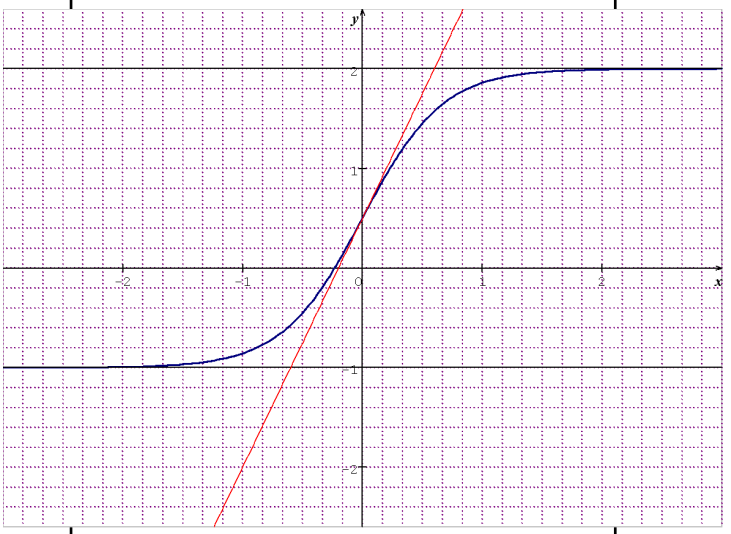
$e^{3x}=\frac{1}{2}$ ومنه $3x=\ln\left(\frac{1}{2}\right)=-\ln 2$ أي $x=-\frac{\ln 2}{3}$

ومنه (C) تقاطع مع محور الفواصل في نقطة واحدة $A\left(-\frac{\ln 2}{3};0\right)$

ب- كتابة معادلة المماس (T) لـ (C) عند النقطة التي فاصلتها 0

$$(T): y = f'(0)(x-0)+f(0)$$

$$f'(0)=\frac{9}{4} \quad \text{و} \quad f(0)=\frac{1}{2} \qquad y=\frac{9}{4}x+\frac{1}{2}$$



x	$-\infty$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$		2	

ج - أنشاء (C) و (Δ) . و (C) يقع محور الفواصل في نقطة واحدة
(واضح من جدول التغيرات)

التمرين السادس:

1) نبيين أن مستمرة و قابلة للإشتقاق على يسار 0

تذكير : f مستمرة عند 0 معناه

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=f(0)$$

لدينا : $f(0)=0$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} x e^{\frac{1}{x}}=0=f(0)$$

لأنه : لما $x\xrightarrow{<}0$: $\frac{1}{x}\to-\infty$ ومنه $e^{\frac{1}{x}}\to 0$ وعليه $x e^{\frac{1}{x}}\to 0$

ومنه f مستمرة على يسار 0

$\lim_{x\xrightarrow{<}0} f(x)=\lim_{x\xrightarrow{<}0} x e^{\frac{1}{x}}$ ح ع ت من الشكل $0\times\infty$ لأنه : لما

$x\xrightarrow{>}0$: $\frac{1}{x}\to+\infty$ ومنه $e^{\frac{1}{x}}\to+\infty$ وعليه

$$x e^{\frac{1}{x}}\to 0\times\infty$$

نضع $\frac{1}{x}=t$ لما $x\xrightarrow{>}0$ فإن : $t\to+\infty$ ومنه

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0} x e^{\frac{1}{x}}=\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty \quad \text{إذن :} \quad \lim_{x\xrightarrow{>}0} x e^{\frac{1}{x}}=+\infty$$

ومنه f مستمرة على يسار 0 و ليست مستمرة على يمين 0

دراسة قابلية الإشتقاق على يسار 0

تذكير : f قابلة للإشتقاق عند 0 معناه

$$\lim_{x\xrightarrow{>}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{f(x)-f(0)}{x-0}=l=f'(0) \quad / \quad l\in\mathbb{R}$$

$$\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{x\,e^{\frac{1}{x}}-0}{x-0}=\lim_{x\xrightarrow{<}0}\frac{x\,e^{\frac{1}{x}}}{x}=\lim_{x\xrightarrow{<}0} e^{\frac{1}{x}}=0$$

ومنه f قابلة للإشتقاق عند 0 و لدينا $f'(0)=0$

ملاحظه هامة : بما أن f ليست مستمرة على يمين 0 فهي غير قابلة للإستقاق على يمين 0 .

$$x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)=\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}$$

أ – التحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

لدينا : من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$\frac{e^{\frac{1}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)\times\left(\frac{x}{1}\right)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1\right)$$

و هو المطلوب

ب- حساب $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x)$ و $\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left(f(x)-x-1\right)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا .

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} f(x) = \lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x e^{\frac{1}{x}}$ ح ع ت من الشكل $0 \times \infty$ لأنه : لما

$x \xrightarrow{>} 0$: $\frac{1}{x} \to +\infty$ ومنه $e^{\frac{1}{x}} \to +\infty$ وعليه

$x e^{\frac{1}{x}} \to 0 \times \infty$

نضع $\frac{1}{x} = t$ لما $x \xrightarrow{>} 0$ فإن : $t \to +\infty$ ومنه

$\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x e^{\frac{1}{x}} = \lim\limits_{t \to +\infty} \frac{e^t}{t} = +\infty$ إذن : $\lim\limits_{x \xrightarrow{>} 0} x e^{\frac{1}{x}} = +\infty$

التفسير الهندسي : $x = 0$ هي معادلة مستقيم مقارب لـ (C)

$\lim\limits_{|x| \to +\infty} \left(f(x)-x-1\right) = \lim\limits_{|x| \to +\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x - 1\right)$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(x e^{\frac{1}{x}} - x - 1\right) = \lim\limits_{x \to -\infty} \left(x\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right) - 1\right)$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} - 1 \right)$

نضع $\frac{1}{x} = t$ لما $x \to -\infty$ فإن : $t \to 0$ ومنه

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(\frac{\left(e^{\frac{1}{x}} - 1\right)}{\frac{1}{x}} - 1 \right) = \lim\limits_{t \to 0} \left(\frac{\left(e^t - 1\right)}{t} - 1 \right) = 0$

لأن $\lim\limits_{t \to 0} \frac{e^t - 1}{t} = 1$ نهاية شهيرة

إذن : $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x)-x-1\right) = 0$

التفسير الهندسي :

$\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x)-x-1\right) = 0$ معناه $\lim\limits_{x \to -\infty} \left(f(x)-\left(x+1\right)\right) = 0$

أي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x+1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $-\infty$

بنفس الطريقة نجد $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(f(x)-x-1\right) = 0$

أي المستقيم (Δ) الذي معادلته $y = x+1$ مقارب مائل لـ (C) بجوار $+\infty$

1) أ-حساب $f'(x)$ لكل x من $\mathbb{R}^*$ ثم أدرس إشارتها

لدينا : من أجل كل $x \in \mathbb{R}^*$:

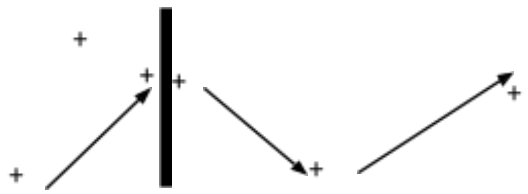
$f'(x) = e^{\frac{1}{x}} - \frac{1}{x^2} e^{\frac{1}{x}} \times x = e^{\frac{1}{x}} - \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} = e^{\frac{1}{x}}\left(1 - \frac{1}{x}\right) = \left(\frac{x-1}{x}\right) e^{\frac{1}{x}}$

إشارة $f'(x)$ من نفس إشارة $\left(\frac{x-1}{x}\right)$ لأن : $e^{\frac{1}{x}} > 0$

إشارة $\left(\frac{x-1}{x}\right)$

الدالة f متزايدة تماما على كل من المجالين $]-\infty; 0[$ و $]1; +\infty[$ و متناقصة تماما على المجال $]0; 1[$

جدول التغيرات :



1) أ- تبيين أن من أجل كل t من $\mathbb{R}$: $e^t - 1 - t \geq 0$

نعلم أنه من أجل كل t من $\mathbb{R}$: $e^t \geq 1 + t$

(التمثيل البياني للدالة الأسية يقع فوق المستقيم الذي معادلته $y = t+1$)

ومنه $e^t \geq 1 + t$ أي $e^t - 1 - t \geq 0$

ب–التحقق أن من أجل كل x من $\mathbb{R}^*$:

$$f(x)-(x+1)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)$$

ج-

دراسة إشارة $f(x)-(x+1)$ ثم فسر النتيجتين هندسيا .

$$f(x)-(x+1)=x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)$$

إشارة $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)$

بوضع $\frac{1}{x}=t$ نجد $x\left(e^{\frac{1}{x}}-1-\frac{1}{x}\right)$ هي $\frac{1}{t}\left(e^{t}-1-t\right)$

مما سبق : $e^{t}-1-t\geq 0$ ومنه إشارة $\frac{1}{t}\left(e^{t}-1-t\right)$ هي من نفس إشارة $\frac{1}{t}$.

إذا كان $x<0$ فإن (C) يقع تحت (Δ)

إذا كان $x>0$ فإن (C) يقع فوق (Δ)

د - أنشاء (C) .

x	
$f'(x)$	
$f(x)$