

Властивості і графіки тригонометричних функцій

1. Парність і непарність тригонометричних функцій

Якщо при повороті навколо точки O на кут α початковий радіус OA переходить у радіус OB , то при повороті на кут $-\alpha$ початковий радіус OA перейде у радіус OB' , симетричний OB відносно осі абсцис (рис. 16).

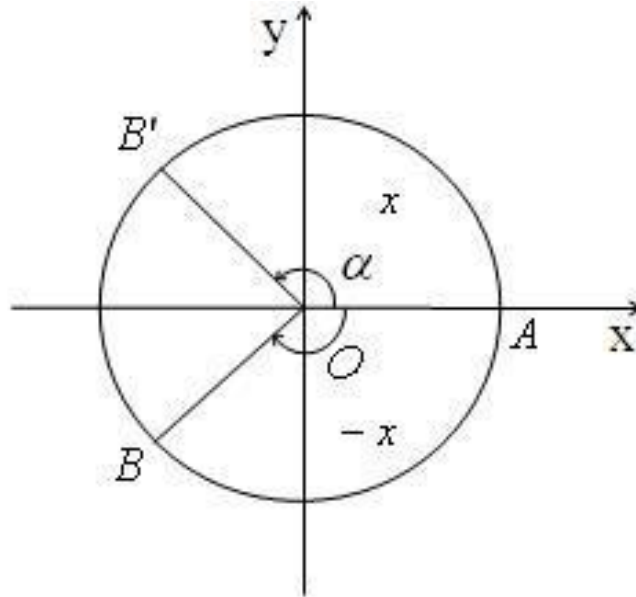


Рис. 16

Абсциси точок B і B' рівні, а ординати рівні за модулем, але протилежні за знаком. Це означає, що $\cos(-x) = \cos x$, $\sin(-x) = -\sin x$,
 $tg(-x) = -tgx$, $ctg(-x) = -ctgx$. Таким чином, функції $y = \sin x$,
 $y = tgx$, $y = ctgx$ непарні, а функція $y = \cos x$ парна.

Приклад. Дослідити на парність функції: а) $y = \sin^3(2x) - tg^5(4x)$;

б) $f(x) = \frac{x^2 \cos x}{ctg^2 x}$; в) $y = \sin 2x \cdot \cos 5x$.

Розв'язання

а) $y = \sin^3(2x) - tg^5(4x) \Rightarrow$

$$y(-x) = \sin^3(-2x) - tg^5(-4x) = (-\sin 2x)^3 -$$

$$-(-tg 4x)^5 = -\sin^3(2x) + tg^5(4x) = -(\sin^3(2x) - tg^5(4x)) = -y(x) \Rightarrow$$

функція $y = \sin^3(2x) - tg^5(4x)$ є непарною.

$$\text{б) } f(x) = \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{ctg}^2 x} \Rightarrow f(-x) = \frac{(-x)^2 \cos(-x)}{\operatorname{ctg}^2(-x)} = \frac{x^2 \cos x}{(-\operatorname{ctg} x)^2} = \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{ctg}^2 x} = f(x) \Rightarrow \text{функція } f(x) = \frac{x^2 \cos x}{\operatorname{ctg}^2 x} \text{ є парною.}$$

При дослідженні функції на парність можна скористатися системою Maple, замінивши незалежну змінну x на $-x$ у прикладі в):

```
> f:=x->sin(2*x)*cos(5*x);
f:=x -> sin(2 x) cos(5 x)
> f(-x);
-sin(2 x) cos(5 x)
```

Очевидно, що функція $y = \sin 2x \cdot \cos 5x$ є непарною.

2. Періодичність тригонометричних функцій

Для періодичної функції $y = f(x)$ виконується рівність $f(x + T) = f(x)$, де T – відмінне від нуля число, назване періодом функції. Кожна періодична функція має велику кількість періодів, тобто якщо T – період, то nT – період, де $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq 0$. Звичайно, говорячи про період, мають на увазі найменший додатний період, який називається основним. **Основними періодами** для тригонометричних функцій є: $T = 360^\circ$ для функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$; $T = 180^\circ$ для функцій $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$. У більш загальному вигляді можемо записати: $\sin(x \pm 360^\circ n) = \sin x$, $\cos(x \pm 360^\circ n) = \cos x$, $\operatorname{tg}(x \pm 180^\circ n) = \operatorname{tg} x$, $\operatorname{ctg}(x \pm 180^\circ n) = \operatorname{ctg} x$, $n \in \mathbb{Z}$.

Якщо кути виражаються в радіанах, то $T = 2\pi$ – основний період функцій $y = \sin x$, $y = \cos x$; $T = \pi$ – основний період функцій $y = \operatorname{tg} x$, $y = \operatorname{ctg} x$.

Відомо, що періоди функцій $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ і $y = A \cos(\omega x + \varphi)$

обчислюються за формулою $T = \frac{2\pi}{\omega}$, а періоди функцій $y = A \operatorname{tg}(\omega x + \varphi)$ і

$y = A \operatorname{ctg}(\omega x + \varphi)$ – за формулою $T = \frac{\pi}{\omega}$.

Якщо період функції $y = f(x)$ дорівнює T_1 , а період функції $\varphi(x)$ дорівнює T_2 , то період функції $y = f(x) + \varphi(x)$ і $y = f(x) - \varphi(x)$ дорівнює найменшому числу, при діленні якого на T_1 і T_2 дістаємо цілі числа.

Приклад Знайти період функції: а) $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(2\pi x)$; б) $y = \sin^2 2x$;

в) $y = 9 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right) - 4 \cos(7x + 2)$

в)

Розв'язання

а) Період функції $y = \frac{1}{3} \operatorname{tg}(2\pi x)$ дорівнює $T = \frac{\pi}{\omega} = \frac{\pi}{2\pi} = \frac{1}{2}$.

б) Для того, щоб знайти період функції $y = \sin^2 2x$, потрібно застосувати

формули пониження степеня: $\sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}$, тобто

$$y = \sin^2 2x = \frac{1 - \cos 4x}{2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 4x$$

Період функції $y = -\frac{1}{2} \cos 4x$, а отже

і даної функції $y = \sin^2 2x$ є число $T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}$.

в) Знаходимо періоди доданків. Період функції $y = 9 \sin\left(5x + \frac{\pi}{3}\right)$

дорівнює $T_1 = \frac{2\pi}{5}$, а період функції $y = 4 \cos(7x + 2)$ дорівнює $T_2 = \frac{2\pi}{7}$.

Очевидно, що період заданої функції дорівнює $T = 2\pi$.

Властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$ та їх графіки

Таблиця 5 – Властивості функцій $y = \sin x$ і $y = \cos x$

Властивості	Функція	
	$\sin x$	$\cos x$
$D(y)$	$R = (-\infty; \infty)$	R
$E(y)$	$[-1; 1]$	$[-1; 1]$
Парність	непарна	парна
Основний період	2π	2π
Нулі функції	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$f(x) > 0$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
$f(x) < 0$	$(2\pi n + \pi; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right), n \in \mathbb{Z}$
Інтервали: зростання	$\left(2\pi n - \frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} + 2\pi n\right),$	$(2\pi n - \pi; 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$
спадання	$\left(2\pi n + \frac{\pi}{2}; \frac{3\pi}{2} + 2\pi n\right),$	$(2\pi n; \pi + 2\pi n), n \in \mathbb{Z}$

Графік функції $y = \sin x$ називається синусоїдою (рис. 17), а графік функції $y = \cos x$ – косинусоїдою (рис. 18).

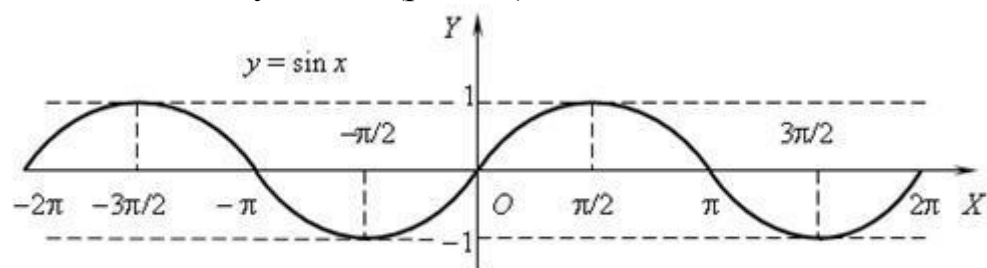


Рис. 17

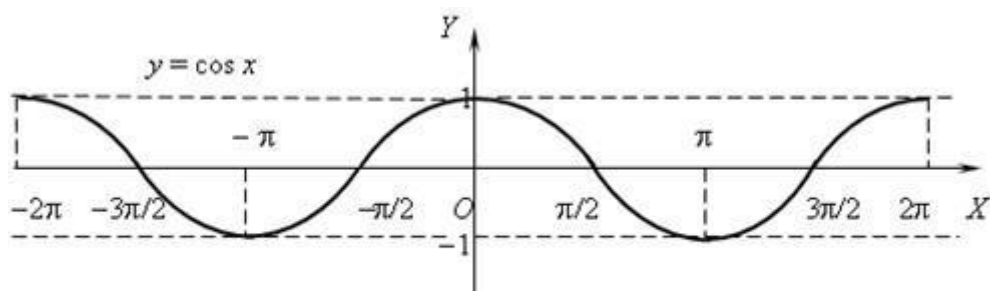


Рис. 18

Властивості функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$ та їх графіки

Таблиця 6 – Властивості функцій $y = \operatorname{tg} x$ і $y = \operatorname{ctg} x$

Властивості	Функція	
	$\operatorname{tg} x$	$\operatorname{ctg} x$
$D(y)$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$	$x \neq \frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$E(y)$	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
Парність	непарна	непарна
Основний період	π	π
Нулі функції	$\pi n, n \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + \pi n, n \in \mathbb{Z}$
$f(x) > 0$	$(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$
$f(x) < 0$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \pi n), n \in \mathbb{Z}$
Інтервали: зростання спадання	$(-\frac{\pi}{2} + \pi n, \frac{\pi}{2} + \pi n), n \in \mathbb{Z}$	$(\pi n, \pi + \pi n), n \in \mathbb{Z}$

Графік функції $y = \operatorname{tg} x$ називається тангенсоїдою (рис. 19), а графік функції $y = \operatorname{ctg} x$ – котангенсоїдою (рис. 20).

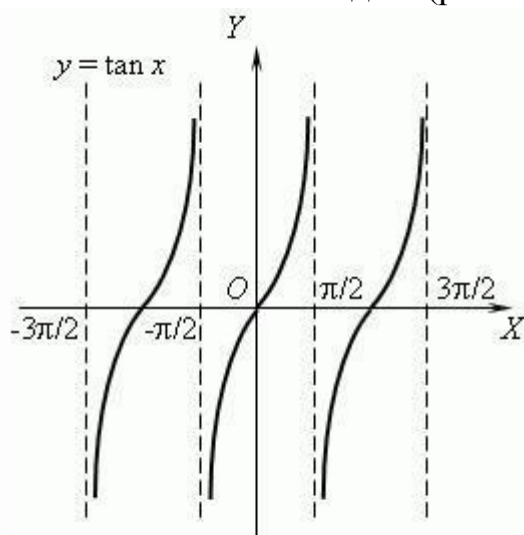


Рис. 19

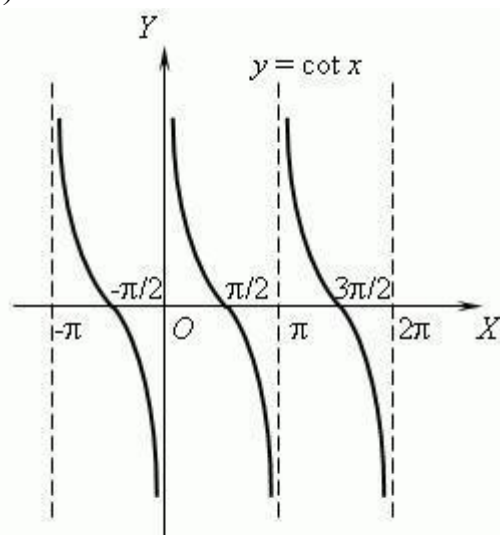


Рис. 20