

ÉLÉMENTS DE CORRIGÉ

Partie I - Étude de la fonction «Réguler la tension et la vitesse de la bande de papier déroulée»

I.A. Expliquons pourquoi la vitesse de la bande de papier déroulée varie

Le rouleau de papier a pour rayon R au début du déroulement et r à la fin. Donc si ω est la vitesse de rotation du rouleau par rapport au bâti alors la vitesse de la bande de papier varie de ωR à ωr avec ω .

I.B. Représentons, sous forme schématique, la chaîne fermée «bâti - tige du vérin de régulation - tige de mesure - bâti»

$\{0\}$: repère lié au bâti.
 $\{1\}$: repère lié à la tige du vérin
 $\{2\}$: repère lié à la tige de mesure

Autres solutions pour la liaison $L_{\text{Tige du vérin/Tige de mesure}}$: Liaison sphère – cylindre de centre C et d'axe $(C, \vec{z}_1)$ ou liaison sphère – plan de normale $(C, \vec{x}_1)$.

Donnons la forme générale du torseur cinématique associé à la liaison $L_{\text{Tige du vérin/Tige de mesure}}$

Modélisation	Liaison	Torseur cinématique associé
--------------	---------	-----------------------------

Spatiale	Linéaire rectiligne d'axe $(C', \vec{y})$ et de normale $(C', \vec{x}_1)$	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_x \vec{x}_1 + \vec{\omega}_y \vec{y} \\ \vec{V}_y \vec{y} + \vec{V}_z \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{C'}$
Modélisation	Liaison	Torseur cinématique associé
Plane	Ponctuelle plane de rampe OC	$\left\{ \begin{array}{l} \vec{\omega}_y \\ \vec{V}_z \vec{z}_1 \end{array} \right\}_{C'}$

I.C. Déterminons la loi $x = f(\theta)$

Nous avons :

Linéarisons cette loi

Comme $\theta = \pm 4^\circ$ alors $\tan \theta = \theta$, d'où :

$$x = L\theta$$

I.D. Donnons l'expression de la fonction de transfert $F_1(s)$

L'information angulaire $\theta = \pm 4^\circ$ est convertie en tension $U_\theta = \pm 4V$, donc :

$$F_1(s) = 1$$

L'unité est : V/degré .

I.E. Donnons l'expression de la fonction de transfert $F_2(s)$

La génératrice tachymétrique G mesure la vitesse de rotation $\omega_{R_3 / \text{bâti}}$. Or l'entrée du schéma-bloc est $V_b = r_3 \omega_{R_3 / \text{bâti}}$. Nous avons :

$$F_2(s) = \frac{1}{r_3}$$

L'unité est : m^{-1} .

I.F. Donnons le signe d'une variation ΔL_n en fonction du signe de ΔV

Si $\Delta V > 0$ alors L_n diminue et $\Delta L_n < 0$ donc la tige du vérin de régulation se déplace suivant $-\vec{x}$.

Si $\Delta V < 0$ alors L_n augmente et $\Delta L_n > 0$ donc la tige du vérin de régulation se déplace suivant $\vec{x}$.

Donner alors le rôle du vérin de régulation

Le vérin de régulation permet de compenser les variations de longueur de la bande de papier en fonction de $\Delta V = V_b - V_a$, tout en régulant la tension de la bande de papier.

I.G. Démontrons la relation $V_b - V_a = -2V_c$

Il y a roulement sans glissement au contact laize – rouleau R_2 et le papier est considéré comme inextensible donc :

$$\vec{V}(M \in R_2 / \text{laize}) = \vec{0}, \text{ d'où } \vec{V}(M \in R_2 / \text{bâti}) = \vec{V}(M \in \text{laize} / \text{bâti}) = V_a \vec{x}.$$

$$\vec{V}(N \in R_2 / \text{laize}) = \vec{0}, \text{ d'où } \vec{V}(N \in R_2 / \text{bâti}) = \vec{V}(N \in \text{laize} / \text{bâti}) = -V_b \vec{x}.$$

La liaison $L_{R_2 / \text{Tige du vérin}}$ est une liaison pivot d'axe $(C, \vec{y})$, donc :

$$\vec{V}(C \in R_2 / \text{bâti}) = \vec{V}(C \in \text{tige du vérin} / \text{bâti}) = V_c \vec{x}.$$

$$\text{Or } \vec{V}(M \in R_2 / \text{bâti}) = \vec{V}(C \in R_2 / \text{bâti}) + \vec{\Omega}_{R_2 / \text{bâti}} \wedge \vec{CM}, \text{ et}$$

$$\vec{V}(N \in R_2 / \text{bâti}) = \vec{V}(C \in R_2 / \text{bâti}) + \vec{\Omega}_{R_2 / \text{bâti}} \wedge \vec{CN}.$$

$$\text{Nous avons donc : } V_a \vec{x} - V_b \vec{x} = 2V_c \vec{x} + \vec{\Omega}_{R_2 / \text{bâti}} \wedge (\vec{CM} + \vec{CN}).$$

$$\text{Comme } \vec{CM} + \vec{CN} = \vec{0} \text{ alors } V_a \vec{x} - V_b \vec{x} = 2V_c \vec{x}, \text{ d'où :}$$

$$V_b - V_a = -2V_c$$

On retrouve bien le résultat ci-dessus : si $\Delta V > 0$ (respectivement $\Delta V < 0$) la tige du vérin de régulation se déplace suivant $-\vec{x}$ (respectivement $\vec{x}$) et $V_c < 0$ (respectivement $V_c > 0$).

Déduisons-en les fonctions de transfert $F_4(s)$ et $F_3(s)$

Nous avons $V_c = \frac{dx}{dt}$ et $x = L\theta$, donc $V_c = \frac{Ld\theta}{dt}$.

Or $V_c = -\frac{V_b - V_a}{2}$, d'où $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2L}$. Soit :

$$F_4(s) = -\frac{1}{2L}$$

En tenant compte des unités du schéma-bloc, nous avons :

$$F_3(s) = \frac{180}{\pi s}$$

I.H. Donnons l'expression de la fonction de transfert $F_5(s)$

La génératrice tachymétrique M mesure la vitesse de rotation $\omega_{R_M / \text{bâti}}$. Or la sortie du schéma-bloc est $V_a = r_M \omega_{R_M / \text{bâti}}$. Nous avons :

$$F_5(s) = r_M$$

L'unité est : m.

I.I. Déterminons les expressions littérales de $B_1(s)$, $B_2(s)$ et $B_3(s)$

D'après le schéma-bloc donné figure 4 et les résultats précédents, nous avons :

$$B_1(s) = \frac{K_G}{r_3} \quad B_2(s) = -\frac{90K}{\pi L s} \quad B_3(s) = \frac{K_A \cdot V(s) \cdot M(s)}{1 + K_M \cdot K_A \cdot V(s) \cdot M(s)}$$

Montrons que les fonctions de transfert $B_1(s)$, $B_2(s)$ et $B_3(s)$ peuvent s'écrire respectivement sous la forme $B_1(s) = K_1$, $B_2(s) = \frac{K_2}{s}$ et $B_3(s) = \frac{K_3}{1+T_3s}$

Nous avons :

$$B_1(s) = \frac{K_G}{r_3} \text{ donc : } B_1(s) = K_1$$

$$B_2(s) = -\frac{90K}{\pi Ls} \text{ donc : } B_2(s) = \frac{K_2}{s}$$

$$B_3(s) = \frac{K_A \cdot K_V \cdot \frac{K_{Mot}}{1+T_{Mot}s}}{1+K_M \cdot K_A \cdot K_V \cdot \frac{K_{Mot}}{1+T_{Mot}s}} = \frac{K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}{1+T_{Mot}s + K_M \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}$$

$$B_3(s) = \frac{\frac{K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}{1+K_M \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}}{1 + \frac{T_{Mot}}{1+K_M \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}} s}$$

Donc : D'où :

$$B_3(s) = \frac{K_3}{1+T_3s}$$

Déterminer l'expression littérale de $V_a(s)$ en fonction de $V_b(s)$

D'après le schéma-bloc donné figure 4 et les résultats ci-dessus, nous avons :

$$V_a(s) = r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot \left(\frac{K_2}{s} \cdot (V_b(s) - V_a(s)) + K_1 \cdot V_b(s) \right)$$

$$V_a(s) \cdot \left(1 + r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \right) = r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot \left(\frac{K_2}{s} + K_1 \right) V_b(s)$$

Soit :

$$V_a(s) = \frac{r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot \left(-\frac{K_2}{s} + K_1 \right)}{1 - r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s}} V_b(s) = \frac{\left(\frac{K_1}{K_2} s - 1 \right)}{\frac{T_3}{r_M \cdot K_2 \cdot K_3} s^2 + \frac{s}{r_M \cdot K_2 \cdot K_3} - 1} V_b(s)$$

I.J. Déterminer l'expression littérale définissant l'écart $\varepsilon = V_b(s) - V_a(s)$

$$\varepsilon(s) = V_b(s) - V_a(s) = V_b(s) - \frac{r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot \left(-\frac{K_2}{s} + K_1\right)}{1 - r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s}} V_b(s) = \left(1 - \frac{r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot \left(-\frac{K_2}{s} + K_1\right)}{1 - r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s}} \right) V_b(s)$$

$$\varepsilon(s) = \left(\frac{1 - r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} - r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot \left(-\frac{K_2}{s} + K_1\right)}{1 - r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s}} \right) V_b(s) = \left(\frac{1 - r_M \cdot \frac{K_3}{1+T_3s} \cdot K_1}{1 - r_M \cdot \frac{K_2}{s} \cdot \frac{K_3}{1+T_3s}} \right) V_b(s)$$

Donc :

$$\varepsilon(s) = s \left(\frac{1 + T_3s - r_M \cdot K_3 \cdot K_1}{s(1 + T_3s) - r_M \cdot K_2 \cdot K_3} \right) V_b(s)$$

Calculons l'écart ε pour une variation brusque de vitesse V_b de type échelon d'amplitude V

Nous avons :
$$\varepsilon = \lim_{t \rightarrow \infty} \varepsilon(t) = \lim_{s \rightarrow 0} s \varepsilon(s) = \lim_{s \rightarrow 0} s^2 \left(\frac{1 + T_3s - r_M \cdot K_3 \cdot K_1}{s(1 + T_3s) - r_M \cdot K_2 \cdot K_3} \right) V_b(s)$$

Si $V_b(s) = \frac{V}{s}$ alors :

$$\varepsilon = 0$$

Calculons cet écart ε en fonction de K , dans le cas d'un signal de type rampe de pente a

Si $V_b(s) = \frac{a}{s^2}$ alors :

$$\varepsilon = \frac{r_M \cdot K_1 \cdot K_3 - 1}{r_M \cdot K_2 \cdot K_3} a$$

A.N. :

$$\varepsilon = \frac{r_M \cdot \frac{K_G}{r_3} \cdot \frac{K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}{1 + K_M \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}} - 1}{r_M \cdot \frac{-90K}{\pi L} \cdot \frac{K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}{1 + K_M \cdot K_A \cdot K_V \cdot K_{Mot}}} a = \frac{0,21 \cdot \frac{0,4}{0,13} \cdot \frac{2.2.0,5}{1 + 0,4.2.2.0,5} - 1}{0,21 \cdot \frac{-90K}{\pi \cdot 1,5} \cdot \frac{2.2.0,5}{1 + 0,4.2.2.0,5}} 0,05$$

$$\varepsilon = \frac{3,16 \cdot 10^{-3}}{K}$$

Donnons la valeur minimale de K

Nous devons avoir $\varepsilon < \varepsilon_v$, donc $\frac{3,16 \cdot 10^{-3}}{K} < \varepsilon_v$, soit :

$$K > \frac{3,16 \cdot 10^{-3}}{\varepsilon_v}$$

A.N. :

$$K > \frac{3,16 \cdot 10^{-3}}{0,05} = 0,063$$

$$K > 0,063$$

I.K. Montrons que l'amplitude θ de la tige de mesure n'est pas constante et ne reste pas dans la plage $\pm 4^\circ$ si l'écart $V_b - V_a$ est constant et non nul

Si l'écart $V_b - V_a$ est constant et non nul alors $\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2L}(V_b - V_a) = \text{cste}$, donc l'amplitude θ de la tige de mesure n'est pas constante et ne reste pas dans la plage $\pm 4^\circ$.

Proposons, de manière qualitative, un correcteur qui permet de stabiliser cette amplitude dans la plage $\pm 4^\circ$ ainsi que son implantation dans le schéma-bloc de la figure 2

Si l'entrée est en rampe alors pour annuler l'écart $V_b - V_a$, **il faut deux intégrateurs**. Dans ce cas, si le système est stable, l'amplitude θ de la tige de mesure est constante et sa valeur peut être réglée par un gain. Donc le bloc K

pourrait être avantageusement remplacé par $\frac{K}{s}$. Mais pour stabiliser l'ensemble, il faut remplacer le bloc K par un correcteur P.I. : $K(1 + \frac{1}{s})$.

Partie II - Étude de la fonction «Dérouter, entraîner et stocker la bande de papier»

II.A. Donnons les réceptivités manquantes sur les grafjets du document 3

Grafjet	Transition	Réceptivité
Initialisation du système de détection de «casse papier»	8	X45
	9	X46

Avalement du papier	1	X51
	8	↑ X54 ou ↓ X51
Arrêt d'urgence	1	X23 + X49 + X53
	6	$\overline{X23} . \overline{X49} . \overline{X53}$ ou X40 + X26

II.B. Complétons le chronogramme

Nous pouvons établir le tableau suivant :

Instant	Évènement	Étapes activées	Actions associées	Étapes désactivées
t	↑ Casse papier	51	Lancement du cycle d'avalement du papier	60
		21	Déclenchement du flux d'air	20
		22		20
t+1s		24	Arrêt du flux d'air et réinitialisation	21
t+1,5s		23	Lancement du cycle d'arrêt d'urgence	22
		31	Décélération de la ligne d'imprimerie	30
		32		30
t+4s		25-33	Écartement des rouleaux des groupes imprimants	24-32
t+5s		35	Régulation de la tension du papier au moyen du danseur	33
t+8,5s	↑ Vitesse papier nulle	34	Arrêt de la décélération	31
		36	Arrêt du cycle d'arrêt d'urgence	34-35

D'où le chronogramme :

Partie III - Étude de la fonction «Évacuer les cahiers imprimés»

Étude du roulement sans glissement au contact arbre 2 – galet 3

III.A. Déterminons V_x et V_y

Nous avons $\vec{V}(I \in 3/0) = \vec{V}(C \in 3/0) + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{CI}$.

Or $\vec{V}(C \in 3/0) = \vec{V}(C \in 2/0)$ car la liaison $L_{3/2}$ est une liaison pivot d'axe $(C, \vec{z}_0)$.

$\vec{V}(C \in 2/0) = \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{AC}$.

Or $\vec{V}(A \in 2/0) = \vec{V}(A \in 1/0)$ car la liaison $L_{2/1}$ est une liaison pivot d'axe $(A, \vec{z}_0)$.

$\vec{V}(A \in 1/0) = \vec{V}(O \in 1/0) + \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA} = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA}$ car la liaison $L_{1/0}$ est une liaison pivot d'axe $(O, \vec{z}_0)$.

Donc : $\vec{V}(I \in 3/0) = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \vec{OA} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \vec{AC} + \vec{\Omega}_{3/0} \wedge \vec{CI}$.

$$\vec{V}(I \in 3/0) = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \left((R+r) \vec{x}_1 - d \vec{z}_0 \right) + (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{z}_0 \wedge (-L \vec{x}_2 + h \vec{z}_0) +$$

$$(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \vec{z}_0 \wedge r(\cos \alpha \vec{x}_2 + \sin \alpha \vec{y}_2)$$

$$\vec{V}(I \in 3/0) = (R+r) \dot{\theta} \vec{y}_1 - L(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_2 - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \alpha \vec{x}_2 + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \alpha \vec{y}_2$$

$$\vec{V}(I \in 3/0) = (R+r) \dot{\theta} (\sin \alpha \vec{x}_2 + \cos \alpha \vec{y}_2) - L(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_2 - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \alpha \vec{x}_2 + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \alpha \vec{y}_2$$

$$\vec{V}(I \in 3/0) = \left((R+r) \dot{\theta} \sin \alpha - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \alpha \right) \vec{x}_2 + \left((R+r) \dot{\theta} \cos \alpha - L(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \cos \alpha \right) \vec{y}_2$$

Nous obtenons donc :

$$V_x = (R+r) \dot{\theta} \sin \alpha - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta}) \sin \alpha$$

$$V_y = (R+r)\dot{\theta}\cos\alpha - L(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos\alpha$$

Déterminons la relation $\dot{\beta} = f(R, r, L, \alpha, \dot{\theta})$

Si le galet **3** roule sans glisser sur la came liée au bâti **0**, nous avons alors $\vec{V}(I \in 3/0) = \vec{0}$, soit :

$$(R+r)\dot{\theta}\sin\alpha - r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})\sin\alpha = R\dot{\theta}\sin\alpha - r(\dot{\alpha} + \dot{\beta})\sin\alpha = 0$$

$$(R+r)\dot{\theta}\cos\alpha - L(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) + r(\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})\cos\alpha = 0$$

La première équation entraîne : $R\dot{\theta} - r(\dot{\alpha} + \dot{\beta}) = 0$, soit $\dot{\alpha} = \frac{R}{r}\dot{\theta} - \dot{\beta}$.

Ce résultat et la deuxième équation entraînent $2(R+r)\dot{\theta}\cos\alpha - L(1 + \frac{R}{r})\dot{\theta} + L\dot{\beta} = 0$,
soit :

$$\dot{\beta} = \left(\frac{R}{r} + 1 - \frac{2(R+r)\cos\alpha}{L} \right) \dot{\theta} = \left(\frac{R}{r} - \frac{2(R+r)\cos\alpha - L}{L} \right) \dot{\theta}$$

III.B. Calculons α_0

A' est la projection du point A dans le plan .

Le triangle OA'C est isocèle en O sur le secteur angulaire $(2\pi - \gamma)$, nous pouvons

écrire $\cos\alpha_0 = \frac{L/2}{R+r}$, d'où :

$$\alpha_0 = \arccos \frac{L/2}{R+r}$$

A.N. :

$$\alpha_0 = \arccos \frac{L/2}{R+r} = \arccos \frac{48/2}{237+26} = 84,76^\circ \quad \alpha_0 = 84,76^\circ$$

Montrons que la vitesse de rotation $\dot{\beta}$ du galet 3 autour de son axe $(C, \vec{z}_0)$ peut être, en première approximation, considérée comme constante

Si la variation de l'angle α est inférieure à 8° alors $\cos \alpha$ varie de $\cos 84,76 = 0,091$ $\cos(84,76 + 8) = -0,048$, donc en première approximation $\cos \alpha$ peut être considéré

comme constant. Comme la vitesse de rotation $\dot{\theta}$ est constante alors la vitesse de rotation $\dot{\beta}$ du galet 3 autour de son axe $(C, \vec{z}_0)$ peut être considérée comme constante, car le terme $\frac{R}{r} - \frac{2(R+r)\cos \alpha - L}{L}$ peut être considéré comme constant.

Remarque :

Sur le secteur angulaire $(2\pi - \gamma)$, nous pouvons écrire $\cos \alpha = \frac{L/2}{R+r}$, d'où : $\dot{\beta} = \frac{R}{r} \dot{\theta}$.

III.C. Justifions l'intérêt de la liaison pivot entre l'arbre 2 et le galet 3

Cette liaison pivot permet au galet 3 de rouler sans glisser sur la came liée au bâti 0 et limite la puissance dissipée par frottement de glissement.

Étude du mouvement de l'arbre 2

III.D. Déterminons l'hypothèse à formuler pour que l'action de la came liée au bâti 0 sur le galet 3 soit de support OC

Isolons le galet 3 et faisons le bilan des actions extérieures.

$$\left\{ T(\text{pesanteur} \rightarrow 3) \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{array} \right\}_C$$

• action à distance :

$$\left\{ T(2 \rightarrow 3) \right\}_C = \left\{ \begin{array}{c} \vec{R}(2 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(C, 2 \rightarrow 3) \end{array} \right\}_C \text{ avec } \vec{M}(C, 2 \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0,$$

• actions de contact :

$$\left\{ \begin{matrix} T(0 \rightarrow 3) \end{matrix} \right\}_I = \left\{ \begin{matrix} \vec{R}(0 \rightarrow 3) \\ \vec{M}(I, 2 \rightarrow 3) = \vec{0} \end{matrix} \right\}_I$$

Appliquons le théorème du moment dynamique en C au galet **3** en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(C, \bar{3} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0$.

Calculons $\vec{M}(C, \bar{3} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0$

$\vec{M}(C, \bar{3} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = (\vec{CI} \wedge \vec{R}(0 \rightarrow 3)) \cdot \vec{z}_0$. Si l'action mécanique $\vec{R}(0 \rightarrow 3)$ est de support CO alors $\vec{M}(C, \bar{3} \rightarrow 3) \cdot \vec{z}_0 = 0$.

Calculons $\vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0$

C est le centre d'inertie du galet **3**, donc :

$$\vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(C, 3/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right)_{/0}$$

Or : $\vec{\mu}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(\vec{I}(C, 3) \vec{\Omega}_{3/0} \right) \cdot \vec{z}_0 = C_3 (\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})$. D'où $\vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = C_3 \ddot{\alpha}$ car $\dot{\theta} = \text{cste}$ et $\dot{\beta} = \text{cste}$.

L'hypothèse à formuler pour considérer que $\vec{R}(0 \rightarrow 3)$ est de support CO est $C_3 \ddot{\alpha} = 0$.

III.E. Déterminons l'équation différentielle qui régit le mouvement de l'arbre 2 par rapport au bâti 0

Isolons l'ensemble **S= 2 + 3** et faisons le bilan des actions extérieures.

$$\left\{ \begin{matrix} T(\text{pesanteur} \rightarrow 2) \end{matrix} \right\}_{G_2} = \left\{ \begin{matrix} -m_2 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{matrix} \right\}_{G_2},$$

• action à distance :

$$\left\{ T(\text{pesanteur} \rightarrow 3) \right\}_C = \begin{Bmatrix} -m_3 g \vec{y}_0 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_C .$$

· actions de contact :

$$\left\{ T(1 \rightarrow 2) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{R}(1 \rightarrow 2) \\ \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \end{Bmatrix}_A \text{ avec } \vec{M}(A, 1 \rightarrow 2) \cdot \vec{z}_0 = 0 ,$$

$$\left\{ T(1 \rightarrow 2) \right\}_A = \begin{Bmatrix} \vec{0} \\ \vec{C}_t = -C_t \vec{z}_0 \end{Bmatrix}_A ,$$

$$\left\{ T(0 \rightarrow 3) \right\}_I = \begin{Bmatrix} \vec{N}(0 \rightarrow 3) = -N \cos \alpha \vec{x}_2 - N \sin \alpha \vec{y}_2 \\ \vec{0} \end{Bmatrix}_I .$$

Appliquons le théorème du moment dynamique en A à l'ensemble **S** en projection sur $\vec{z}_0$: $\vec{\delta}(A, \overline{2+3}/0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{M}(A, \overline{2+3} \rightarrow 2+3) \cdot \vec{z}_0$.

Calculons $\vec{M}(A, \overline{2+3} \rightarrow 2+3) \cdot \vec{z}_0$

$$\vec{M}(A, \overline{2+3} \rightarrow 2+3) \cdot \vec{z}_0 = (\overrightarrow{AG_2} \wedge -m_2 g \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 + (\overrightarrow{AC} \wedge -m_3 g \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 + \left(\overrightarrow{AI} \wedge -(N \cos \alpha \vec{x}_2 + N \sin \alpha \vec{y}_2) \right) \cdot \vec{z}_0 - C_t$$

$$(\overrightarrow{AG_2} \wedge -m_2 g \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 = 0 \text{ car par hypothèse } \overrightarrow{AG_2} = c \vec{z}_0 .$$

$$(\overrightarrow{AC} \wedge -m_3 g \vec{y}_0) \cdot \vec{z}_0 = \left((-L \vec{x}_2 + h \vec{z}_0) \wedge -m_3 g \vec{y}_0 \right) \cdot \vec{z}_0 = m_3 g L \cos(\theta + \alpha)$$

$$\left(\overrightarrow{AI} \wedge -N(\cos \alpha \vec{x}_2 + \sin \alpha \vec{y}_2) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left((-L \vec{x}_2 + h \vec{z}_0 + r(\cos \alpha \vec{x}_2 + \sin \alpha \vec{y}_2) \wedge -N(\cos \alpha \vec{x}_2 + \sin \alpha \vec{y}_2) \right) \cdot \vec{z}_0$$

$$\left(\overrightarrow{AI} \wedge -(N \cos \alpha \vec{x}_2 + N \sin \alpha \vec{y}_2) \right) \cdot \vec{z}_0 = NL \sin \alpha$$

D'où : $\vec{M}(A, \overline{2+3} \rightarrow 2+3) \cdot \vec{z}_0 = m_3 g L \cos(\theta + \alpha) + NL \sin \alpha - C_t$

Calculons $\vec{\delta}(A, 2+3/0) \cdot \vec{z}_0$

Nous avons $\vec{\delta}(A, 2+3/0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(A, 3/0) \cdot \vec{z}_0$.

Or :

$$\vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(A, 2/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 + \left(m_2 \vec{V}(A/0) \wedge \vec{V}(G_2 \in 2/0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(A, 2/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0$$

car $\vec{V}(A/0)$ et $\vec{V}(G_2 \in 2/0)$ sont colinéaires dans la mesure où A et G_2 appartiennent à l'axe de la liaison pivot $L_{1/2}$.

$$\left(\frac{d\vec{\mu}(A, 2/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d\vec{\mu}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right) - \vec{\mu}(A, 2/0) \cdot \left(\frac{d\vec{z}_0}{dt} \right)_{/0} = \left(\frac{d\vec{\mu}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right)$$

$$\vec{\mu}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(m_2 \overrightarrow{AG_2} \wedge \vec{V}(A \in 2/0) + \vec{I}(A, 2) \vec{\Omega}_{2/0} \right) \cdot \vec{z}_0 = \left(\vec{I}(A, 2) \vec{\Omega}_{2/0} \right) \cdot \vec{z}_0$$

Or :

car $\overrightarrow{AG_2} = c \vec{z}_0$. Donc $\vec{\mu}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0 = C_2 (\dot{\theta} + \dot{\alpha})$. Nous avons donc :

$$\left(\frac{d\vec{\mu}(A, 2/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 = C_2 \ddot{\alpha} \quad \text{car } \dot{\theta} = \text{cste} \text{ . Donc : } \vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0 = C_2 \ddot{\alpha} \text{ .}$$

Or :

$$\vec{\delta}(A, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(\vec{\delta}(C, 3/0) + m_3 \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Gamma}(C \in 3/0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 + \left(m_3 \overrightarrow{AC} \wedge \vec{\Gamma}(C \in 3/0) \right) \cdot \vec{z}_0$$

D'après la question III.A. : $\vec{V}(C \in 3/0) = \vec{\Omega}_{1/0} \wedge \overrightarrow{OA} + \vec{\Omega}_{2/0} \wedge \overrightarrow{AC}$.

$$\vec{V}(C \in 3/0) = \dot{\theta} \vec{z}_0 \wedge \left((R+r) \vec{x}_1 - h \vec{z}_0 \right) + (\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{z}_0 \wedge (-L \vec{x}_2 + h \vec{z}_0) = (R+r) \dot{\theta} \vec{y}_1 - L(\dot{\theta} + \dot{\alpha}) \vec{y}_2$$

Donc : $\vec{\Gamma}(C \in 3/0) = -(R+r) \dot{\theta}^2 \vec{x}_1 - L \ddot{\alpha} \vec{y}_2 + L(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \vec{x}_2$ car $\dot{\theta} = \text{cste}$.

$$\left(m_3 \vec{AC} \wedge \vec{\Gamma}(C \in 3/0) \right) \cdot \vec{z}_0 = \left(m_3 (-L \ddot{x}_2 + h \ddot{z}_0) \wedge (-(R+r)\dot{\theta}^2 \vec{x}_1 - L\ddot{\alpha} \vec{y}_2 + L(\dot{\theta} + \dot{\alpha})^2 \vec{x}_2) \right) \cdot \vec{z}_0 =$$

$$-m_3 L(R+r)\dot{\theta}^2 \sin \alpha + m_3 L^2 \ddot{\alpha}$$

$$\vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d \vec{\mu}(C, 3/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0$$

Nous avons

avec

$$\left(\frac{d \vec{\mu}(C, 3/0)}{dt} \right)_{/0} \cdot \vec{z}_0 = \left(\frac{d \vec{\mu}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right) - \vec{\mu}(C, 3/0) \cdot \left(\frac{d \vec{z}_0}{dt} \right)_{/0} = \left(\frac{d \vec{\mu}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0}{dt} \right)$$

$$\text{Or : } \vec{\mu}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = \left(I(C, 3) \Omega_{3/0} \right) \cdot \vec{z}_0 = C_3 (\dot{\theta} + \dot{\alpha} + \dot{\beta})$$

D'où $\vec{\delta}(C, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = C_3 \ddot{\alpha} = 0$

$$\text{car } \dot{\theta} = \text{cste} \text{ et } \dot{\beta} = \text{cste} . \text{ Donc } \vec{\delta}(A, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = m_3 L^2 \ddot{\alpha} - m_3 L(R+r)\dot{\theta}^2 \sin \alpha$$

$$\vec{\delta}(A, S/0) \cdot \vec{z}_0 = \vec{\delta}(A, 2/0) \cdot \vec{z}_0 + \vec{\delta}(A, 3/0) \cdot \vec{z}_0 = (C_2 + m_3 L^2) \ddot{\alpha} - m_3 L(R+r)\dot{\theta}^2 \sin \alpha$$

L'équation différentielle qui régit le mouvement de l'arbre **2** par rapport au bâti **0** s'écrit :

$$(C_2 + m_3 L^2) \ddot{\alpha} - m_3 L(R+r)\dot{\theta}^2 \sin \alpha = m_3 g L \cos(\theta + \alpha) + N L \sin \alpha - C_t$$

III.F. Donner la condition qui traduit le maintien du contact du galet 3 avec la came liée au bâti 0

Cette condition est donnée par $N > 0$. Or d'après le résultat précédent :

$$N = \frac{(C_2 + m_3 L^2) \ddot{\alpha} - m_3 L(R+r)\dot{\theta}^2 \sin \alpha - m_3 g L \cos(\theta + \alpha) + C_t}{L \sin \alpha}$$

Comme $\sin \alpha \approx 1$, le terme $L \sin \alpha$ est positif, donc la condition qui traduit le maintien du contact du galet **3** avec la came liée au bâti **0** s'écrit :

$$(C_2 + m_3 L^2) \ddot{\alpha} - m_3 L(R+r)\dot{\theta}^2 - m_3 g L \cos(\theta + \alpha) + C_t > 0$$

En déduire alors, sous forme littérale, l'accélération limite $\ddot{\alpha}_{\text{lim}}$

Nous obtenons :

$$\ddot{\alpha}_{\text{lim}} > \frac{m_3 L (R+r) \dot{\theta}^2 + m_3 g L \cos(\theta + \alpha) - C_t}{C_2 + m_3 L^2}$$

A.N. :

$$\ddot{\alpha}_{\text{lim}} > \frac{0,42 \cdot 48 \cdot 10^{-3} \cdot (237 + 26) \cdot 10^{-3} \cdot 43,63^2 + 0,42 \cdot 9,81 \cdot 48 \cdot 10^{-3} \cos(\theta + \alpha) - 40}{24,32 \cdot 10^{-4} + 0,42 \cdot (48 \cdot 10^{-3})^2}$$

$$\ddot{\alpha}_{\text{lim}} > \frac{10,1 + 0,2 \cos(\theta + \alpha) - 40}{3,40 \cdot 10^{-3}} = \frac{10,1 + 0,2 - 40}{3,40 \cdot 10^{-3}} \approx -8\,735 \text{ rad.s}^{-2} \quad . \text{ Donc :}$$

$$\ddot{\alpha}_{\text{lim}} > -8\,735 \text{ rad.s}^{-2}$$

Cette valeur est compatible avec la loi d'accélération qui a été choisie par le constructeur : $\ddot{\alpha} > -5\,000 \text{ rad.s}^{-2}$ et $\ddot{\alpha} < 5\,000 \text{ rad.s}^{-2}$.

Remarque :

Avec $\ddot{\alpha} = 5\,000 \text{ rad.s}^{-2}$, nous avons $C_3 \ddot{\alpha} = 1,42 \cdot 10^{-4} \cdot 5\,000 = 0,71 \text{ N.m}$ et $(C_2 + m_3 L^2) \ddot{\alpha} = (24,32 \cdot 10^{-4} + 0,42 \cdot (48 \cdot 10^{-3})^2) \cdot 5\,000 = 16,99 \text{ N.m}$.

L'hypothèse $C_3 \ddot{\alpha} = 0$ ne semble pas irréaliste.

Étude de la loi de levée de came

III.G. Vérifions que $\dot{\theta} = 43,63 \text{ rad.s}^{-1}$

D'après le document 4, le tambour 1 muni de 3 galets 3 répartis à 120° qui traitent, chacun, un cahier par tour. Si la plieuse doit traiter 75 000 cahiers par heure alors :

$$\dot{\theta} = \frac{75\,000}{3} \text{ trs / heure} = 25\,000 \text{ trs / heure} = 416,66 \text{ trs / min} = 6,94 \text{ trs / s}$$

$$\dot{\theta} = \frac{\pi \cdot 416,66}{30} \text{ rad.s}^{-1} = 43,63 \text{ rad.s}^{-1}$$

III.H. Déterminons les durées T et t_5

$$\text{Si } \dot{\theta} = \frac{25\,000}{3\,600} \text{ trs.s}^{-1} \quad \text{alors } T = \frac{3\,600}{25\,000} = 0,144 \text{ s} \quad \mathbf{T = 0,144 \text{ s}}$$

Le secteur angulaire γ vaut $90^\circ = \frac{360^\circ}{4}$ d'où $t_5 = \frac{0,144}{4} = 0,036 \text{ s}$
 $\mathbf{t_5 = 3,6.10^{-2} \text{ s}}$

Déduisons-en les valeurs de t_1 , t_2 , t_3 et t_4

Nous avons $t_5 = 0,036 \text{ s}$ pour $\gamma = 90^\circ$, donc $t_2 = \frac{0,036}{90} \cdot 25 = 1.10^{-2} \text{ s}$
 $\mathbf{t_2 = 1.10^{-2} \text{ s}}$

$$t_1 = \frac{t_2}{2} \quad \mathbf{t_1 = 0,5.10^{-2} \text{ s}}$$

$t_5 - t_3 = t_2$ donc $t_3 = t_5 - t_2 = 3,6.10^{-2} - 1.10^{-2} = 2,6.10^{-2} \text{ s}$
 $\mathbf{t_3 = 2,6.10^{-2} \text{ s}}$

$t_5 - t_4 = t_4 - t_3$ donc $t_4 = \frac{t_5 + t_3}{2} = \frac{3,6.10^{-2} + 2,6.10^{-2}}{2} = 3,1.10^{-2} \text{ s}$
 $\mathbf{t_4 = 3,1.10^{-2} \text{ s}}$

III.I. Proposons une méthode pour obtenir la loi espace $\alpha(t)$

L'accélération est constante, nous avons donc un mouvement uniformément accéléré :

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha} t + \dot{\alpha}_0$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} t^2 + \dot{\alpha}_0 t + \alpha_0$$

Le triangle OA'C est isocèle en O sur le secteur angulaire $(2\pi - \gamma)$, nous pouvons

écrire $\cos \alpha = \frac{L/2}{R+r}$ (voir question III.B.°). Donc : $\alpha = \alpha_0 = \arccos \frac{L/2}{R+r} = \text{cste}$.

Nous avons $\alpha_0 = \arccos \frac{L/2}{R+r} = \arccos \frac{48/2}{237+26} = 84,76^\circ$. Donc : $\dot{\alpha}_0 = 0$.

Nous allons donc tracer la variation de l'angle α à partir de l'angle α_0 , soit :

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha} t$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} t^2$$

Remarque :

Les calculs pour obtenir cette loi sont donnés ci-dessous.

Phase $0 \leq t \leq t_1$

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha} t, \text{ d'où } \dot{\alpha}(t_1) = 5000 \cdot 0,5 \cdot 10^{-2} = 25 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\alpha}(t_1) = 25 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha} t^2, \text{ d'où } \alpha(t_1) = \frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot (0,5 \cdot 10^{-2})^2 = 0,0625 \text{ rad}$$

$$\alpha(t_1) = 0,0625 \text{ rad}$$

Phase $t_1 \leq t \leq t_2$

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha}(t - t_1) + \dot{\alpha}(t_1), \text{ d'où } \dot{\alpha}(t_2) = -5000 \cdot (1 \cdot 10^{-2} - 0,5 \cdot 10^{-2}) + 25 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\alpha}(t_2) = 0 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha}(t - t_1)^2 + \dot{\alpha}(t_1) \cdot (t - t_1) + \alpha(t_1) \text{ d'où}$$

$$\alpha(t_2) = -\frac{1}{2} \cdot 5000 \cdot (1 \cdot 10^{-2} - 0,5 \cdot 10^{-2})^2 + 25 \cdot (1 \cdot 10^{-2} - 0,5 \cdot 10^{-2}) + 0,0625 = 0,125 \text{ rad}$$

$$\alpha(t_2) = 0,125 \text{ rad}$$

Phase $t_2 \leq t \leq t_3$

$$\dot{\alpha}(t) = \ddot{\alpha}(t - t_2) + \dot{\alpha}(t_2), \text{ d'où } \dot{\alpha}(t) = 0 \cdot (t - t_2) + 0 = 0 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\dot{\alpha}(t) = 0 \text{ rad.s}^{-1}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \ddot{\alpha}(t - t_2)^2 + \dot{\alpha}(t_2) \cdot (t - t_2) + \alpha(t_2), \text{ d'où}$$

$$\alpha(t) = \frac{1}{2} \cdot 0 \cdot (t - t_2)^2 + 0 \cdot (t - t_2) + 0,125 = 0,125 \text{ rad}$$

$$\alpha(t) = 0,125 \text{ rad}$$

En considérant la symétrie, il est possible de tracer les lois $\dot{\alpha}(t)$ et $\alpha(t)$:

Vérifions que la rotation de l'arbre 2 est supérieure à 7°

D'après les résultats ci-dessus, la rotation de l'arbre 2 est égale à $\alpha = 0,125 \text{ rad} = 7,16^\circ$ **et est donc bien supérieure à 7° et inférieure à 8°** (voir hypothèse formulée à la question III.B.).

Calculons R'

A' est la projection du point A dans le plan .

D'après le triangle $OA'C_f$, nous avons la relation :

$$OC_f^2 = OA'^2 + A'C_f^2 - 2.OA'.A'C_f.\cos \alpha \quad . \text{ D'où :}$$

$$R' = \left\{ (R+r)^2 + L^2 - 2.(R+r).L.\cos \alpha \right\}^{1/2} - r$$

A.N. :

$$R' = \left\{ (237 + 26)^2 + 48^2 - 2.(237 + 26).48.\cos(84,76 + 7,16) \right\}^{1/2} - 26 = 242,92 \text{ mm}$$

$$\mathbf{R' = 242,92 \text{ mm}}$$

III.J. Vérifions l'approximation $\sin \alpha \approx 1$

Nous avons vu que sur le secteur angulaire $(2\pi - \gamma)$, $\alpha = \alpha_0 = \arccos \frac{L/2}{R+r} = 84,76^\circ$.
Donc $\sin \alpha = \sin 84,76^\circ = 0,99 \approx 1$.

Lorsque le galet **3** est en contact avec la came liée au bâti **0** sur la portion BC, nous avons $\alpha = 84,76 + 0,125 \cdot \frac{360}{2\pi} = 91,92^\circ$ et $\sin 91,92^\circ = 0,99 \approx 1$.

L'approximation $\sin \alpha(t) \approx 1$ est donc justifiée.

III.K. Indiquons le paramètre à modifier afin que la plieuse puisse traiter 100 000 cahiers par heure.

Le paramètre à modifier est la **vitesse de rotation** $\dot{\theta}$ du tambour **1** par rapport au bâti **0**.

Donnons les conséquences de cette modification

Cette modification a bien évidemment une conséquence :

- **sur la vitesse de rotation du dérouleur et celle des rouleaux des groupes imprimants,**
- **sur la vitesse de déplacement de la bande de papier,**
- **sur la puissance des moteurs qui entraînent ces éléments, puisque leur énergie cinétique va augmenter.**

En revanche, cette modification n'a aucune influence sur la répartition des masses des solides en rotation, **donc elle n'a aucune influence sur l'équilibrage dynamique de ces solides.**

Remarque :

Une autre réponse peut être : **prendre 4 galets au lieu de 3** ($100\,000 = \frac{4}{3} \cdot 75\,000$).
Dans ce cas seule la puissance du moteur qui entraîne l'ensemble tambour 1 + arbre 2 + galets 3 devra être plus importante puisque l'énergie cinétique de cet ensemble va augmenter.