

Link om te commenten:

https://docs.google.com/document/d/1VS0FiC9M2YkCr-TP-xGdSI_w7c9pgv6tMmALBltrng/edit?usp=sharing

NIET VOLLEDIG!

Dit hoofdstuk is verre van volledig en ik ga het ook niet meer aanvullen waarschijnlijk. Ik heb hier al net iets te veel tijd ingestoken. Moest je een zeer gemotiveerde student zijn die hier nog wel moeite in wil steken laat dan iets weten dan krijg je edit rechten :)

Hoofdstuk 6: Inproductruimten en Euclidische ruimten

Overzicht hoofdstuk p253

6.1 Inproducten en Hermitische producten

Definitie 6.1

Zij $(\mathbb{R}, V, +)$ een reële vectorruimte. Een inproduct (of inwendig product) op V is een afbeelding $\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{R} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$

die voldoet aan de volgende eigenschappen:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is lineair in de eerste component, dit wil zeggen dat $\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$
voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, voor alle $v_1, v_2 \in V$ en voor alle $w \in V$
2. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is symmetrisch, dit wil zeggen dat $\langle v, w \rangle = \langle w, v \rangle$ voor alle $v, w \in V$
3. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is positief, dit wil zeggen dat $\langle v, v \rangle \geq 0$ voor alle $v \in V$
4. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is definitief, dit wil zeggen dat voor $v \in V$ geldt:
 $\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$ (natuurlijk is $0 \in V$)

Voortaan spreken we van een inproductruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als een reële vectorruimte voorzien van een inproduct.

Het inproduct wordt soms ook scalair product genoemd.

Opmerking 6.2

1. Uit lineairiteit in de eerste component en symmetrie van het inproduct volgt lineairiteit in de tweede component.

Want:

$$\begin{aligned} & \langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle \\ &= \langle \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2, v \rangle \\ &= \lambda_1 \langle w_1, v \rangle + \lambda_2 \langle w_2, v \rangle \\ &= \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle \end{aligned}$$

Dus dan geldt idd dat:

$$\langle v, \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \rangle = \lambda_1 \langle v, w_1 \rangle + \lambda_2 \langle v, w_2 \rangle$$

2. Uit lineairiteit in beide componenten volgt ook dat

$$\langle 0, v \rangle = \langle v, 0 \rangle = 0 (\in \mathbb{R}) \text{ voor elke } v \in V$$

Want:

$$\langle 0, v \rangle = \langle v - v, v \rangle = \langle v, v \rangle - \langle v, v \rangle = 0$$

(analoog voor $\langle v, 0 \rangle$)

3. Voorwaarde (1.) uit de definitie van het inproduct is equivalent met

‘voor alle $w \in V$ is de afbeelding $\langle \cdot, w \rangle : V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \langle v, w \rangle$ een lineaire afbeelding’

Want inderdaad bij een lineaire afbeelding hadden we dat:

$$L(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \lambda_1 L(v_1) + \lambda_2 L(v_2)$$

Dus als we dit doen voor de afbeelding $\langle \cdot, w \rangle$ krijgen we:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle$$

En dat is inderdaad juist lineairiteit in eerste component!

Nu voeren we een analoge definitie in voor complexe vectorruimten, dan krijgen we het Hermitisch product (met hoofdletter).

Herinner dat het toegevoegde complex getal als volgt is gedefinieerd:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

Definitie 6.3

Zij $(\mathbb{C}, V, +)$ een complexe vectorruimte. Een Hermitisch product op V is een afbeelding

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V \times V \rightarrow \mathbb{C} : (v, w) \mapsto \langle v, w \rangle$$

die voldoet aan volgende eigenschappen:

1. $\langle \cdot, \cdot \rangle$ is lineair in de tweede component, dit wil zeggen dat
$$\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle = \lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle$$

voor alle $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{C}$, voor alle $v_1, v_2 \in V$ en voor alle $w \in V$
2. $\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$ voor alle $v, w \in V$
3. $\langle v, v \rangle \geq 0$ voor alle $v \in V$ (positief)
4. voor $v \in V$ geldt $(\langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0)$ (definiert)

We spreken voortaan van een Hermitische ruimte $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ als een complexe vectorruimte voorzien van een Hermitisch product.

Merk op dat we hier lineairiteit in tweede component aannemen in de definitie!

Opmerking 6.4

In het algemeen is een Hermitisch product NIET symmetrisch!

Dus dan kunnen we de lineairiteit in de tweede component ook niet doortrekken naar lineairiteit in de eerste component. Maar wel geldt:

$$\begin{aligned} & \langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle \\ &= \overline{\langle w, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 \rangle} \\ &= \overline{\lambda_1 \langle w, v_1 \rangle + \lambda_2 \langle w, v_2 \rangle} \\ &= \overline{\lambda_1 \langle v_1, w \rangle + \lambda_2 \langle v_2, w \rangle} \end{aligned}$$

er geldt $\overline{rx + sy} = \bar{r} \bar{x} + \bar{s} \bar{y}$ met $s, r, x, y \in \mathbb{C}$ en $\bar{\bar{x}} = x$

$$= \overline{\lambda_1 \langle v_1, w \rangle} + \overline{\lambda_2 \langle v_2, w \rangle}$$

Dus dan geldt er inderdaad:

$$\langle \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, w \rangle = \overline{\lambda_1} \langle v_1, w \rangle + \overline{\lambda_2} \langle v_2, w \rangle$$

Dit noemen we toegevoegde lineariteit in de eerste component

Let dus op:

- Een Hermitisch product heeft als resultaat een waarde in $\mathbb{C}$
- Een inproduct heeft als resultaat een waarde in $\mathbb{R}$
- MAAR $\langle v, v \rangle$ geeft zowel voor een Hermitisch product als een inproduct een resultaat in $\mathbb{R}$

Voor het inproduct is dit logisch (het resultaat zit altijd in $\mathbb{R}$)

Voor het Hermitisch product hebben we

$$\langle v, w \rangle = \overline{\langle w, v \rangle}$$

Als we hier 2 keer v invullen krijgen we:

$$\langle v, v \rangle = \overline{\langle v, v \rangle}$$

Waaruit volgt dat $\langle v, v \rangle \in \mathbb{R}$

Dus daarom kunnen we wel degelijk eisen in beide gevallen dat $\langle v, v \rangle \geq 0$

Extra: als de complex toegevoegde van een getal en het getal gelijk zijn dan is het getal deel van $\mathbb{R}$.

We willen dus aantonen dat $\bar{x} = x \Rightarrow x \in \mathbb{R}$ met $x \in \mathbb{C}$

We noteren x in algemene vorm als $a + bi$ met $a, b \in \mathbb{R}$ dan krijgen we:

$$\overline{a + bi} = a - bi$$

$$a - bi = a + bi$$

En dit kan alleen als:

- $a = a$
- $-b = b \Rightarrow b = 0$

Dus dan is $x = a + 0i = a$ met $a \in \mathbb{R}$ dus is $x \in \mathbb{R}$

Opmerking 6.5: conventie lineairiteit in eerste of tweede component

We hebben bij de definitie van Hermitisch product de 'meest gebruikte' conventie genomen, namelijk lineairiteit in de tweede component. Soms zal men echter kiezen voor lineairiteit in de eerste component en krijgen we toegevoegde lineairiteit in de tweede component .

→ niet belangrijk ;)

Voorbeeld 6.6: voorbeelden van enkele inproducten en Hermitische producten

BELANGRIJK zeker te bekijken

Samengevat:

- standaard inproduct op $\mathbb{R}^n$:

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} : (X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n x_i y_i = X^T \cdot Y$$

- standaard Hermitisch product op $(\mathbb{C}, \mathbb{C}^n, +)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C} : (X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}) \mapsto \sum_{i=1}^n \overline{x_i} y_i = \overline{X}^T \cdot Y$$

- Inproduct op vectorruimte van continue functies op een interval $[a, b] \subset \mathbb{R}$

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx$$

- Inproduct op de vectorruimten van de veeltermen (dit zijn ook continue functies dus analoog aan bovenstaande)

$$\langle P(X), q(X) \rangle = \int_a^b p(x) \cdot q(x) dx$$

- Inproduct op $(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{m \times n}, +)$

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^{m \times n} \times \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R} : (A, B) \mapsto \text{Tr}(A \cdot B^T)$$

Voorbeeld 6.7

Doornemen!

Inproduct in het vlak van een klassiek rechthoekig assenstelsel:

$\langle v, w \rangle = \|v\| \cdot \|w\| \cos \alpha$ met $\|x\|$ de lengte van vector x en α de hoek tussen vectoren v en w ($\alpha \in [0, \pi]$)

Opdracht 6.8

//TODO: de moeite? (controleer gewoon alle eigenschappen uit definitie)

6.2 Euclidische meetkunde en Euclidische ruimte

Definitie 6.9

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte. Dan definiëren we, voor elke vector $v \in V$, de lengte van v (of de norm van v), $\|v\|$ genoteerd, als $\|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}$. Wanneer voor een vector v geldt dat $\|v\| = 1$, dan noemen we v genormeerd of een eenheidsvector.

Deze begrippen kan men evenzeer (en op identieke wijze) invoeren in een Hermitische ruimte $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$.

Voorbeeld 6.10: voorbeelden omtrent norm

Stelling 6.11

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijhorende norm

$$\|\cdot\| : V \rightarrow \mathbb{R} : v \mapsto \|v\| = \sqrt{\langle v, v \rangle}.$$

Dan geldt:

1. voor alle $\lambda \in \mathbb{R}$ en $v \in V$ dat $\|\lambda v\| = |\lambda| \cdot \|v\|$
2. voor alle $v \in V : \|v\| \geq 0$ en $(\|v\| = 0 \Leftrightarrow v = 0)$

Bewijs:

Voor een inproductruimte:

$$\begin{aligned}\|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda \langle v, \lambda v \rangle} \\ &= \sqrt{\lambda^2 \langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} \\ &= |\lambda| \|v\|\end{aligned}$$

Analoog voor Hermitische ruimte:

$$\begin{aligned}\|\lambda v\| &= \sqrt{\langle \lambda v, \lambda v \rangle} \\ &= \sqrt{\bar{\lambda} \langle v, \lambda v \rangle} \\ &= \sqrt{\bar{\lambda} \lambda \langle v, v \rangle}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \sqrt{|\lambda|^2} \langle v, v \rangle \\
&= |\lambda| \sqrt{\langle v, v \rangle} \\
&= |\lambda| \|v\|
\end{aligned}$$

Alleen stelt hier $|\lambda|$ de modulus van λ voor en niet de absolute waarde zoals in vorig geval

$$\begin{aligned}
\|v\| &\geq 0 \\
\sqrt{\langle v, v \rangle} &\geq 0
\end{aligned}$$

En dat klopt omdat een wortel van een getal altijd positief is

$$\|v\| = 0 \Leftrightarrow \sqrt{\langle v, v \rangle} = 0 \Leftrightarrow \langle v, v \rangle = 0 \Leftrightarrow v = 0$$

Opmerking 6.12

Elke vector $v \neq 0$ kunnen we aanpassen naar een genormeerde vector.

Dit doen we adhv $\frac{1}{\|v\|} v$.

We zeggen dat we de vector v normeren.

Definitie 6.13

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte (of $(\mathbb{C}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Hermitische ruimte). Voor willekeurige vectoren $v, w \in V$ definiëren we $d(v, w) = \|v - w\|$ als de afstand tussen v en w .

Stelling 6.14

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte.

1. Voor alle vectoren $v, w \in V$ geldt dat

$$|\langle v, w \rangle| \leq \|v\| \cdot \|w\|$$

Deze ongelijkheid is bekend als de ongelijkheid van Cauchy-Schwartz

2. Deze ongelijkheid is een gelijkheid als en slechts als de vectoren v en w lineair afhankelijk zijn.

Bewijs:

//TODO

Definitie 6.16

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $v \neq 0$ en $w \neq 0$ elementen van V . De hoek tussen v en w is de unieke hoek $\theta \in [0, \pi]$ waarvoor

$$\cos(\theta) = \frac{\langle v, w \rangle}{\|v\| \cdot \|w\|}$$

Willekeurige vectoren v en w in V noemen we orthogonaal of loodrecht op elkaar als $\langle v, w \rangle = 0$. We schrijven hiervoor $v \perp w$.

Als $v \neq 0$ en $w \neq 0$ geldt dus dat $v \perp w$ precies wanneer $\theta = \frac{\pi}{2}$

Anders geschreven is dit $\|v\| \cdot \|w\| \cdot \cos(\theta) = \langle v, w \rangle$ of in woorden $\langle v, w \rangle$ is de lengte van v vermenigvuldigd met de lengte van de projectie van w op v .

Opmerking 6.17

Voorbeeld 6.18

Stelling 6.19

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte met bijhorende norm $\|\cdot\|$. Dan geldt voor alle $v, w \in V$ dat

$$\|v + w\| \leq \|v\| + \|w\| \text{ (de driehoeksongelijkheid)}$$

Bewijs:

\\TODO

Opmerking 6.20

Definitie 6.21

Een eindigdimensionale inproductruimte noemen we een Euclidische ruimte. Een eindigdimensionale Hermitische ruimte noemen we een unitaire ruimte.

Voorbeeld 6.22

6.3 Orthonormale basis, orthogonaal complement

Stelling 6.23

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een inproductruimte en zij $\alpha = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$ een deelverzameling van V bestaande uit onderling twee aan twee orthogonale vectoren, allen verschillend van de nulvector (dus voor alle $i \neq j$ geldt dat $\langle v_i, v_j \rangle = 0$). Dan is α een vrije verzameling.

Bewijs:

//TODO schrijf fatsoenlijk uit

stel ze zijn niet vrij:

er bestaat een x_1 tot x_n zodat met een x verschillend van 0 neem x_1

$$x_1 v_1 + x_2 v_2 + \dots + x_n v_n = 0$$

$$v_1 = 1/x_1 * (x_2 v_2 + \dots + x_n v_n)$$

$$\text{en } \langle v_1, v_2 \rangle = 0$$

$$= \langle 1/x_1 * (x_2 v_2 + \dots + x_n v_n), v_2 \rangle = x_2/x_1 \langle v_2, v_2 \rangle + 0 + 0$$

dus $0 = \langle v_2, v_2 \rangle$ dus $v_2 = 0$ (v_2 verschillend van nulvector gegeven)

dit kan niet, dus alle v 's zijn vrij

Definitie 6.24

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte. Een basis $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ voor V , zo dat:

1. $\langle v_i, v_j \rangle = 0$ voor alle indices $i \neq j$
2. $\|v_i\| = 1$ voor alle i

noemen we een orthonormale basis van V . Indien we enkel 1. eisen, spreken we van een orthogonale basis.

Opmerking 6.25

Stelling 6.26

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en zij $\beta = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ een orthonormale basis van V . Beschouw willekeurige vectoren v en w in V , met respectievelijk $(x_1, \dots, x_n)$ en

$$(y_1, \dots, y_n) \text{ in } \mathbb{R}^n \text{ als coördinaatvectoren ten opzichte van } \beta. \text{ Dan is } \langle v, w \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

Stelling 6.27

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ een willekeurige basis van V , dan kan deze basis omgevormd worden tot een orthonormale basis $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ en wel op algoritmische wijze. Deze werkwijze staat bekend als het orthogonalisatieprocede van Gram-Smidt.

Bewijs:

//TODO

Voorbeeld 6.28

Opmerking 6.29

Definitie 6.30

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U een deelruimte van V . We definiëren het orthogonaal complement van U als

$$U^\perp = \{v \in V \mid v \perp u \text{ voor alle } u \in U\}$$

Stelling 6.31

Zij $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ een Euclidische ruimte en U een deelruimte van V . Dan geldt dat

1. de som $U + U^\perp$ een directe som is ($U \oplus U^\perp$)
2. $U \oplus U^\perp = V$
3. $\dim_{\mathbb{R}} U + \dim_{\mathbb{R}} U^\perp = \dim_{\mathbb{R}} V$
4. $(U^\perp)^\perp = U$

Bewijs:

//TODO

Voorbeeld 6.32

Stelling 6.33

Als U een deelruimte is van de Euclidsiche ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $v \in V$, dan is $p(v)$ de vector in U op minimale afstand v .

Bewijs:

//TODO

Definitie 6.34

Als U een deelruimte is van de Euclidische ruimte $(\mathbb{R}, V, +, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ en $\beta_U = \{u_1, \dots, u_k\}$ een (willekeurige) orthonormale basis is van U , dan noemt men de afbeelding

$$pr_U : V \rightarrow V : v \mapsto \langle v, u_1 \rangle u_1 + \langle v, u_2 \rangle u_2 + \dots + \langle v, u_k \rangle u_k$$

de orthogonale projectie van V op U .

Opmerking 6.36

6.4 Transformaties met een symmetrische matrix