<!!!на этот текст ссылается стр-1>

введение

будем исходить из максимы, что граф (особенно нограф) есть фигура геометрическая, аналогичная многоугольнику: нограф есть точки соединённые непересекающимися (кроме этих точек) линиями. в алгебре графом принято называть ту алгебраическую структуру, которая "держит" строение графа. то что граф и его алгебраическая структура разные вещи следует из того что одному и тому же графу разные авторы сопоставляют разные АС; ну и конечно более из того что АС держит лишь строение но не геометрию графа. логически главное что графы задействуют геометрическое мышление при анализе их свойств и особенно при навигации по графу.
здесь собраны и немного разобраны встречающиеся в и-нете определения [алгебраических структур для] графа. понятно что применяется то или иное ТМ-ное конструирование, есть сужения и неточности. ну а как известно мы придерживаемся КМАС:-)
а расхожая идея: множество вершин и множество дуг, причём каждой дуге приписана пара вершин (пара вполне ТМ-ная, т.е. может оказаться что вершина приписана всего одна;-).

переписка

19.11.2020 послал to Eric предложение законнектиться.

<<определения графа

PlanetMath.org

https://planetmath.org/
https://planetmath.org/graph

A *graph* G is an ordered pair of disjoint sets (V, E) such that E is a subset of the set $V^{(2)}$ of unordered pairs of V. V and E are always assumed to be finite, unless explicitly stated otherwise. The set V is the set of *vertices* (sometimes called nodes) and E is the set of *edges*. If G is a graph, then $V = V(G)$ is the vertex set of G, and $E = E(G)$ is the edge set. Typically, $V(G)$ is defined to be nonempty. If x is a vertex of G, we sometimes write $x \in G$ instead of $x \in V(G)$.

https://proofwiki.org/wiki/Main_Page

"A **graph** is intuitively defined as a pair consisting of a set of vertices and a set of edges."
https://proofwiki.org/wiki/Definition:Graph_(Graph_Theory)

WolfAlpha

"In a mathematician's terminology, a graph is a collection of points and lines connecting some (possibly empty) subset of them."
https://mathworld.wolfram.com/Graph.html

[ГСиА] - отображение рёбер в пары вершин

с.11

Граф $G=(V, E)$ состоит из двух множеств: конечного множества элементов, называемых *вершинами*, и конечного множества элементов, называемых *ребрами*. Каждое ребро определяется парой вершин. Если ребра графа определяются упорядоченными парами вершин, то G называется *направленным* или *ориентированным* графом. В противном случае G называется *ненаправленным* или *неориентированным* графом. В первых четырех главах книги рассматриваются ненаправленные графы.

фактически оказывается что рёбра это отдельное множество каждому эл-ту которого сопоставляется неупор-пара вершин (в том числе одна):

Для обозначения вершин графа будем использовать символы $v_1, v_2, v_3, \ldots$, а для обозначения ребер — $e_1, e_2, e_3, \ldots$. Вершины v_i и v_j, определяющие ребро e_l, называются *концевыми вершинами* ребра e_l. В этом случае ребро e_l обозначается как $e_l = (v_l, v_j)$. Заметим, что в множестве E допускается более чем одно ребро с одинаковыми концевыми вершинами. Все ребра с одинаковыми концевыми вершинами называются *параллельными*. Кроме того, концевые вершины ребра не обязательно различны. Если $e_l = (v_i, v_i)$, то ребро e_l называется *петлей*. Граф называется *простым*, если он не содержит петель и параллельных ребер. Граф G является графом *порядка* n, если множество его вершин состоит из n элементов.

!!!стихийно они говоря о двух множествах – двусортны!!! т.е. заниматься их «конструктивизацией» довольно интересно: начиная с двух множеств они далее на втором вводят **отображение в пары первого** (причём пары упор либо не упор).

Diestel

он интересен тем что продаёт и поддерживает актуаль:-) НО и не интересен т.к. надо покупать;-)
http://diestel-graph-theory.com/basic.html?
https://www.math.uni-hamburg.de/home/diestel/books/graph.theory/preview/GrTh5_Ch1.pdf

1.1 Graphs

A *graph* is a pair $G = (V, E)$ of sets such that $E \subseteq [V]^2$; thus, the elements of E are 2-element subsets of V. To avoid notational ambiguities, we shall always assume tacitly that $V \cap E = \emptyset$. The elements of V are the *vertices* (or *nodes*, or *points*) of the graph G, the elements of E are its *edges* (or *lines*). The usual way to picture a graph is by drawing a dot for

+похож на GNA
+?как у него с параллельными рёбрами?
!!!**у него и петель** нет см. 1.2. degree.
т.е. у него подтеория простых графов!

начальная терминология

у него богатая:
с.2

incident A vertex v is *incident* with an edge e if $v \in e$; then e is an edge *at* v.
ends The two vertices incident with an edge are its *endvertices* or *ends*, and an edge *joins* its ends. An edge $\{x, y\}$ is usually written as xy (or yx). If $x \in X$ and $y \in Y$, then xy is an X–Y *edge*. The set of all X–Y edges
$E(X,Y)$ in a set E is denoted by $E(X,Y)$; instead of $E(\{x\},Y)$ and $E(X,\{y\})$ we simply write $E(x,Y)$ and $E(X,y)$. The set of all the edges in E at a
$E(v)$ vertex v is denoted by $E(v)$.

[GNA] – простоват;-)

в биб-ке Гугл.
он новее (2009?) но попроще/сложнее/чумоватее:

1.1 Graphs, subgraphs and factors

A *graph* G is a pair $G = (V, E)$ consisting of a finite[2] set $V \neq \emptyset$ and a set E of two-element subsets of V. The elements of V are called *vertices*. An element $e = \{a, b\}$ of E is called an *edge* with *end vertices* a and b. We say that a and b are *incident* with e and that a and b are *adjacent* or *neighbors* of each other, and write $e = ab$ or $a \overset{e}{—} b$.

стр.2 и смело использует для subgraph subset;-)
«потерял» же он параллельные ребра (edge) и даже петли, т.к. у него действительно 2х элементные множества в E!
И, на стр.13 выясняется, что он в полной сознанке и ему так нравится: мульти**графы**... не его...(но математически это забавно: как-то не веришь что он понимает что говорит, а оказывается что он говорит даже о графах без петель!!!
т.е. по классике надо было с самого начала говорить что будем в основном заниматься простыми графами без петель, а он это говорить в сноске 3 см. ниже!!!)

1.3 Euler tours

In this section we will solve the Königsberg bridge problem for arbitrary graphs. The reader should note that Figure 1.1 does not really depict a graph according to the definitions given in Section 1.1, because there are pairs of vertices which are connected by more than one edge. Thus we generalize our definition as follows. Intuitively, for a *multigraph* on a vertex set V, we want to replace the edge set of an ordinary graph by a family E of two-element subsets of V. To be able to distinguish different edges connecting the same pair of vertices, we formally define a *multigraph* as a triple (V, E, J), where V and E are disjoint sets, and J is a mapping from E to the set of two-element subsets of V, the *incidence map*. The image $J(e)$ of an edge e is the set $\{a, b\}$ of end vertices of e. Edges e and e' with $J(e) = J(e')$ are called *parallel*. Then all the notions introduced so far carry over to multigraphs. However, in this book we will – with just a few exceptions – restrict ourselves to graphs.[3]

The circular tours occurring in the Königsberg bridge problem can be described abstractly as follows. An *Eulerian trail* of a multigraph G is a trail which contains each edge of G (exactly once, of course); if the trail is closed, then it is called an *Euler tour*.[4] A multigraph is called *Eulerian* if it contains an Euler tour. The following theorem of [Eul36] characterizes the Eulerian multigraphs.

Theorem 1.3.1 (Euler's theorem). *Let G be a connected multigraph. Then the following statements are equivalent:*

(a) *G is Eulerian.*
(b) *Each vertex of G has even degree.*
(c) *The edge set of G can be partitioned into cycles.*

Proof: We first assume that G is Eulerian and pick an Euler tour, say C. Each occurrence of a vertex v in C adds 2 to its degree. As each edge of G occurs exactly once in C, all vertices must have even degree. The reader should work out this argument in detail.

---

[3] Some authors denote the structure we call a *multigraph* by *graph*; graphs according to our definition are then called *simple graphs*. Moreover, sometimes even edges e for which $J(e)$ is a set $\{a\}$ having only one element are admitted; such edges are then called *loops*. The corresponding generalization of multigraphs is often called a *pseudograph*.

[4] Sometimes one also uses the term *Eulerian cycle*, even though an Euler tour usually contains vertices more than once.

[Емеличев и др]

см. в подпапке в биб-ке

+У:он похоже [GNA] а возможно и Diestel!

Пусть V — непустое множество, $V^{(2)}$ — множество всех его двухэлементных подмножеств. Пара (V, E), где E — произвольное подмножество множества $V^{(2)}$, называется *графом* (*неориентированным графом*).

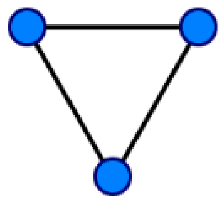
[СТТГ]

«**Граф** — базовое понятие. Включает множество *вершин* и множество *рёбер*, являющееся подмножеством декартова квадрата множества вершин (то есть каждое ребро соединяет ровно две вершины).

»

и далее по ссылке обычный «бред»

Граф, или **неориентированный граф** G — это упорядоченная пара $G := (V, E)$, где V — это непустое множество **вершин** или **узлов**, а E — множество пар (в случае неориентированного графа — неупорядоченных) вершин, называемых **рёбрами**.



V (а значит и, E, иначе оно было бы мультимножеством) обычно считаются конечными множествами. Многие результаты, полученные для конечных графов, неверны (или каким-либо образом отличаются) для *бесконечных графов*, поскольку не все утверждения, имеющие место для конечных совокупностей, выполняются в случае бесконечных множеств.

[GRAPP]

4 значения термина граф - http://pco.iis.nsk.su/WikiGrapp/%D0%93%D1%80%D0%B0%D1%84

!!!в том числе п.3 с инцидентором можно сказать близок☺

3. Тройка (V, E, P), где V — множество *вершин*, E — множество объектов некоторой природы, отличной от природы вершин, называемых *ребрами*, P — *инцидентор*, сопоставляющий с каждым ребром $e \in E$ пару *граничных вершин* v и w из V.

wikip

"An undirected graph is a graph in which edges have no orientation."
https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics)#Undirected_graph

m-w

http://www.merriam-webster.com/dictionary/graph
"3 a collection of vertices and edges that join pairs of vertices"

литература

см.

<<определения multigraph

в ontolog-forum Communique-2020 KG определяется как labeled directed miltigraph, я поставил коммент что graph хватит и воспоследовала переписка с KenB и Paul Black и оказалось что бардак больше чем можно было ожидать.

идеи

-я в начале до того возбудился что для "can" придумал идею динамического/меняющегося графа - ан нет.

+multigraph

+следует смотреть мат-книги где это понятие используется а не приводится

--например такова книга Кнута и Ко! =там это сокращение для есть паралл и/или(?) петли.

!эта тема возникла в Коммюнике (draft) 2020, где я предложил заменить термин на directed graph, позже в переписке с KenB на dirg, usually multigraph, считая multigraph допустимым сокращением для "граф с параллельными дугами"

НО и Кен и Paul (PEB) и определения в инете используют неприемлемые для ТГ слова типа can

НО в ночь с 3.11.2020 на 4 до орёлика дошло (Кен в переписке употребил schema) что mg понимается динамически как БД - тогда конкретный граф это лишь одна из реализаций некоего мг!..

вот ночное:

-тем самым понимаемый динамически граф есть формально совокупность допустимых графов, т.е. семейство, кстати вполне себе счётное;-)

НОНО есть статические определения мг см.

==это закрывает тему динамики как нет существующую и выводит на первое место в описании ситуации Wolfram тут:-)

30.11.2020 послал Ken-у ответ на его определение

см.

0+do letter=24.11.2020 отправил в онтоф

multidigraph. formal definition
Dear All,

After fruitful correspondence with Ken Baclawski and Paul Black https://xlinux.nist.gov/dads/, let's discuss other opinions about multidigraph formal definition.

Some important kind of definition is a definition of abstract structure. Usually this structure has some amount of named components somehow interconnected.
Let's consider a formal definition (*Definition 1*) of multidigraph from https://en.wikipedia.org/wiki/Multigraph#Labeling
Let's just rearrange components as it's usual for algebraic structures: sets firsts, relations and functions (aka maps or operations) second.
We have:
V - abstract set we name *vertices*,
A - abstract set we name *arcs*,
usually we think or hope that these sets do not intersect and are not empty, and finite;

ΣV, **ΣA** - finite alphabets, special kind of sets - not just abstract;-) Maybe we think that they do not intersect; otherwise we should have one alphabet for both.

Now we have maps (aka functions):

s, **t** from **A** to **V**, and we hope this maps are full i.e. not partial functions - that is usual for operations, but not so much if we recall division by zero;

lV from **V** to **ΣV**,

lA from **A** to **ΣA**,

both may be partial.

We do not have relations here.

So, two abstract sets (**V**, **A**), two alphabets (**ΣV**, **ΣA**) and four unary functions (**s**, **t**, **lV**, **lA**) from-to these sets.

To collect all these components together Kuratowski 's <>-brackets are used usually:

<**V**, **A**, **ΣV**, **ΣA**, **s**(A:V), **t**(A:V), **lV**(V:ΣV), **lA**(A:ΣA)>,

where for functions we have in ()-brackets their signatures: keeping the "type" of their arguments and results.

Is that a good idea to agree that we have a definition of labeled multidigraph as an abstract structure?

IMHO we have a definition of a labeled digraph.

Is that a definition we should keep in mind for Communique-2020?

Alex

и ещё

+У:у Евклида аналогом графа могут быть и многоугольник (poligon) и многогранник (polyhedron)

переписка

+!!!Ken

я пропустил, что Кен уже пояснил, а на повторный вопрос Кен не ответил - а ведь он прямо написал

"A graph (with no loops or multiple edges) is also a multigraph.":-)

!!!в этом смысле определение на которое он ссылается ему подходит - там определён граф;-)

+6.11.2020 к ужину Кен прислал цитату (но без ссылки но нарл же где-то!) что бывает что и граф и мульти - одно и тоже = я отшутился.

вот его ответ "The term "graph" is ambiguous in mathematics. It can be synonymous with simple graph or with multigraph. Mathematicians are well aware of this, and so they must specify in any paper or book what they mean by "graph". In the Wikipedia article for graphs in discrete mathematics this ambiguity is mentioned:

A multigraph is a generalization that allows multiple edges to have the same pair of endpoints. In some texts, multigraphs are simply called graphs.[6][7]

Sometimes, graphs are allowed to contain *loops*, which are edges that join a vertex to itself. For allowing loops, the above definition must be changed by defining edges as multisets of two vertices instead of two-sets. Such generalized graphs are called *graphs with loops* or simply *graphs* when it is clear from the context that loops are allowed.

"

а вот компот откуд цитата https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics)

+!!!кстати об атрибутах

"Using the word "attribute" would be too confusing. In all KGs that I am familiar with, attributes are represented as edges whose destination is a data value."

=он формально прав - атрибуты сводятся к стрелкам и метка остаётся чуть ли не единственным "внутренним" атрибутом!!!

+тут надо кумекать т.к. отображая узлы и дуги в строки он называет это метками, а если мы отображаем в другой узел помеченный строкой (литеральный), то это атрибут!!!

+послать что-то типа:

I am continuing thinking about subtle differences between label and attribute. Like this: attribute is not a node with data value label; attribute is a mapping of node or edge, arc into data values.

In RDF literal node is a pseudo-node as it has only one incoming arc, i.e. replicated throughout graph...

6.11.2020 послал Кену тот же вопрос что и PEB:"But if a simple graph is a multigraph then every graph is a multigraph. What do you think?'

+Paul E. Black

https://hissa.nist.gov/~black/

!!!он ведёт https://xlinux.nist.gov/dads/ - **кучу определений**!!!

вот определение PEB из DADS:

"A *graph* whose *edges* are unordered pairs of *vertices*, and the same pair of vertices **can** be connected by multiple edges."

+!!!статическое понимание делает это определение эквивалентным определению графа, т.е. бессмысленным

+D-1$$$+Ken в переписке остановился на определении Def-1

из wikip:

Labeling [edit]

Multigraphs and multidigraphs also support the notion of graph labeling, in a similar way. However there is no unity in terminology in this case.

The definitions of **labeled multigraphs** and **labeled multidigraphs** are similar, and we define only the latter ones here.

Definition 1: A labeled multidigraph is a labeled graph with *labeled* arcs.

Formally: A labeled multidigraph G is a multigraph with *labeled* vertices and arcs. Formally it is an 8-tuple $G = (\Sigma_V, \Sigma_A, V, A, s, t, \ell_V, \ell_A)$ where

- V is a set of vertices and A is a set of arcs.
- Σ_V and Σ_A are finite alphabets of the available vertex and arc labels,
- $s\colon A \rightarrow\ V$ and $t\colon A \rightarrow\ V$ are two maps indicating the *source* and *target* vertex of an arc,
- $\ell_V\colon V \rightarrow \Sigma_V$ and $\ell_A\colon A \rightarrow \Sigma_A$ are two maps describing the labeling of the vertices and arcs.

Definition 2: A labeled multidigraph is a labeled graph with multiple *labeled* arcs, i.e. arcs with the same end vertices and the same arc label (note that this notion of a labeled graph is different from the notion given by the article graph labeling).

утвердив что формальное определение всё говорит, но в нём динамики нет!

и на вопрос является ли простой граф мг не ответил.

+!!!+отсечка:

называние мультиграфом подчёркивает что в рассматриваемом графе могут быть а могут и не быть параллельные рёбра.

==Ken+Paul&Co именуют мультиграфом то что мы называем графом!:-)

доказательство:

-у них простой граф - мультиграф (см. переписку)

-definition 1 see на которое ссылается Ken в задании 8-ки прямо и чёткое задаёт по нашему - помеченный орграф (а у них это мультиграф!!!).

в математике же мульти это граф с параллельными рёбрами.

определения ещё

гу definition Multigraph

базовое определение wikip из статьи о нём:

"In mathematics, and more specifically in graph theory, a **multigraph** is a graph which **is permitted to have** multiple edges (also called *parallel edges*[1]), that is, edges that have the same end nodes. Thus two vertices may be connected by more than one edge."

определение из wikip glossary

multigraph

A multigraph is a graph **that allows** multiple adjacencies (and, often, self-loops); a graph that **is not required to be** simple.

wikip https://en.wikipedia.org/wiki/Graph_(discrete_mathematics)

упоминается 11 раз!

Wolfram

https://mathworld.wolfram.com/Multigraph.html

"As a result of these many ambiguities, use of the term "multigraph" should be deprecated, or at the very least used with extreme caution."

+!!!там внушительный состав ссылок самая ранняя 1990: Skiena, S. Implementing Discrete Mathematics: Combinatorics and Graph Theory with Mathematica. Reading, MA: Addison-Wesley, 1990.

статья 1993 Д.Кнут+

https://arxiv.org/pdf/math/9310236.pdf

+!!!используют мг (329 раз!!!):

-"Sections 1–10 of this paper provide a basic introduction to the theory of **evolving graphs** and **multigraphs**, using generating functions as the principal tool. **Two models of graph evolution** are presented in section 1, the “graph process” and the “multigraph process.”"

-"It may also be called the multigraph process, because it can generate graphs with **self-loops** x −− x, and it can also generate **multiple edges**."

+У:в первом приближении несмотря на динамику они используют мг как "непростой" граф;-)

A multigraph M on n labeled vertices can be defined by a symmetric $n \times n$ matrix of nonnegative integers m_{xy}, where $m_{xy} = m_{yx}$ is the number of undirected edges $x — y$ in G. For purposes of analysis, we shall assign a *compensation factor*

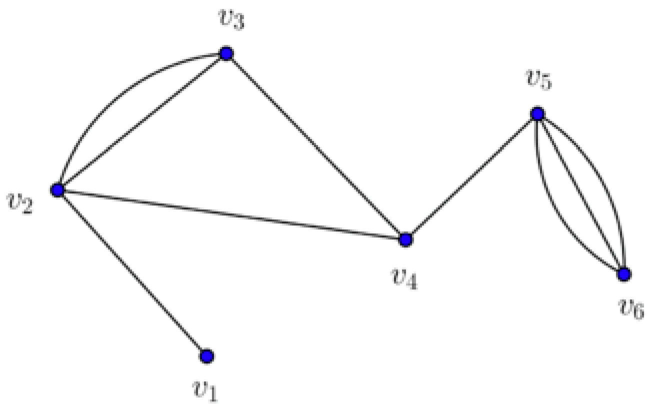
++У:на месте G должно быть M - очепятка.

https://proofwiki.org/wiki/Definition:Multigraph

Definition

A **multigraph** is a graph that can have more than one edge between a pair of vertices.

That is, $G = (V, E)$ is a **multigraph** if V is a set and E is a multiset of 2-element subsets of V.



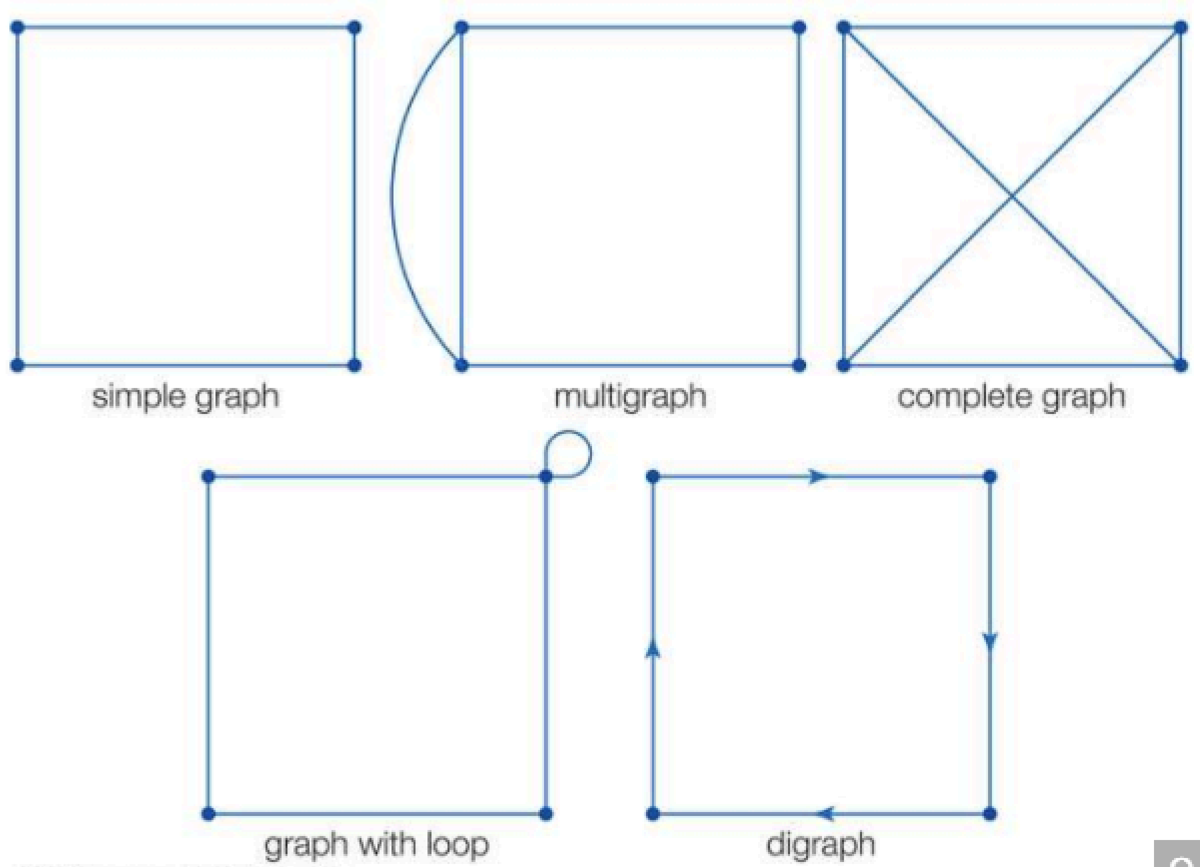
The graph above is a **multigraph** because of the double edge between B and C and the triple edge between E and F.

!!!статика!!! https://www.britannica.com/science/multigraph

Multigraph

mathematics

Share



подборки SciDir https://www.sciencedirect.com/topics/mathematics/multigraph

- *Multigraph*: Two given nodes may be connected by multiple arcs, typically abbreviated to one weighted arc. The weight is shown as a natural number next to the arc. The default value is 1, and usually not explicitly given. Arc weights permit us to conveniently specify the stoichiometry of (bio-)chemical reactions.

oxford https://www.lexico.com/definition/multigraph

multigraph

Pronunciation /ˈmʌltɪɡrɑːf/ /ˈmʌltɪɡraf/

NOUN

1 *historical* A machine for making multiple copies of a document; especially a small printing machine which uses specially cast type fitted in grooves on a rotating cylinder.

2 *Mathematics*
A graph in which two vertices may be connected by more than one edge.

!!!статики!!! https://g.co/kgs/ixJk53 **book 2003**

A graph with self-loops is called a *pseudograph*, while a *multigraph* is a graph that contains multiple edges connecting pairs of vertices. These can be tested using `PseudographQ` and `MultipleEdgesQ`, respectively. A *simple graph* contains no self-loops or multiple edges and