

Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

16.11.2022

Лекция

Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификации.

Цели:

1.Образовательная: рассмотреть непрерывность функции, точки разрыва и их классификации.

2.Воспитательная: воспитать логическое мышление, внимание.

3.Развивающая: развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал практического занятия на тему: «Непрерывность функции и их свойства. Точки разрыва и их классификации » формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Вопросы лекции:

- 1) **Определение непрерывной функции.**
- 2) **Точки разрыва.**

Определение непрерывной функции

Определение 1. Функция f называется непрерывной в точке a из X , если для любой окрестности $U_{f(a)}$ найдется такая окрестность U_a точки a , что образ множества $U_a \cap X$ при отображении f содержится в $U_{f(a)}$.

В логической символике это определение записывается так:

$$f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывна в точке } a \in X \Leftrightarrow \forall U_{f(a)} \exists U_a : f(U_a \cap X) \subset U_{f(a)}.$$

Поскольку под окрестностью конечной точки мы понимаем симметричную окрестность, то это определение равносильно следующему:

Определение 2 (по Коши). Функция $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если для любого числа $\varepsilon > 0$ найдется такое число $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что для всех $x \in X$, удовлетворяющих условию $|x - a| < \delta$, выполняется неравенство $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

В логической символике последнее определение можно записать так:

$$\begin{aligned} &\text{функция } f : X \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывна в точке } a \in X \Leftrightarrow \\ &(\forall \varepsilon > 0 \exists \delta = \delta(\varepsilon) > 0 : \forall x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.) \end{aligned}$$

Замечание 1. Свойство непрерывности функции f изучается в любой точке $a \in X$, в то время как предел — в предельной точке a множества X , которая может не принадлежать X .

Замечание 2. В определении непрерывной функции в точке a рассматриваются образы всех точек множества $X \cap U_a$, а в определении предела функции — образы точек из $X \cap U_a$, отличных от a . Если $a \in X$, но не является предельной точкой множества X , то ее называют изолированной точкой множества X . Ясно, что функция непрерывна в каждой изолированной точке области определения.

Поскольку $f(a)$ принадлежит каждой окрестности $U_{f(a)}$, то, учитывая определение предела функции f в точке a , получаем следующее определение, равносильное предыдущим.

Определение 3. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}$, $a \in X$, a — предельная точка множества X . Функция f называется непрерывной в точке a , если существует предел функции в точке a и он равен значению функции f в точке a .

Учитывая представление функции, имеющей в точке конечный предел, получаем: непрерывность функции f в точке a означает, что f имеет представление $f(x) = f(a) + o(1)$, $x \rightarrow a$.

Наконец, используя определение предела функции по Гейне, получаем определение, равносильное предыдущим

Определение 4 (по Гейне). Функция $f: X \rightarrow \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если для любой последовательности $\{x_n\}$ элементов множества X , сходящейся к a , соответствующая последовательность $\{f(x_n)\}$ образов сходится к $f(a)$.

Замечание. По сравнению с определением Гейне предела функции в определении 3.4 непрерывности функции снято требование, обязывающее все элементы последовательности $\{x_n\}$ быть отличными от a . (В случае, когда a — изолированная точка множества X , все элементы x_n , начиная с некоторого, равны a .)

Определение 5. Функция f называется непрерывной на множестве X , если она непрерывна в каждой точке этого множества.

Совокупность вещественнозначных функций, непрерывных на множестве X , обычно обозначается символом $C(X)$.

Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Функция $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, непрерывна на $\mathbb{R}$.

Действительно, для любой точки $a \in \mathbb{R}$, для $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(a)| = 0$. Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$ имеем:

$$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Последнее означает непрерывность функции в точке a , а значит и на множестве $\mathbb{R}$.

Пример 2. Если $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, то $f \in C(\mathbb{R})$.

Зафиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{R}$ и число $\varepsilon > 0$. Так как

$$|f(x) - f(a)| = |x - a|, \forall x \in \mathbb{R},$$

то, полагая $\delta = \varepsilon$, получим $|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Поэтому f непрерывна в точке a и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 3. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \text{Для любых } a \in \mathbb{R} \text{ и } x \in \mathbb{R} \quad |\sin x - \sin a| &= \left| 2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2} \right| \leq \\ &\leq 2 \left| \sin \frac{x-a}{2} \right| \leq 2 \frac{|x-a|}{2} = |x-a|. \end{aligned}$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$ и получим, что, как только $|x-a| < \delta$, так $|\sin x - \sin a| \leq |x-a| < \delta = \varepsilon$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $f(x) = \cos x$.

Пример 4. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Поскольку для любых $a \in \mathbb{R}$ и $x \in \mathbb{R}$

$$|f(x) - f(a)| = ||x| - |a|| \leq |x - a|,$$

то, как и в предыдущих примерах, достаточно положить $\delta = \varepsilon$, чтобы доказать непрерывность функции f в точке a , а значит на $\mathbb{R}$.

К точкам разрыва функции $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ следует отнести те точки множества X , в которых функция f не является непрерывной. Однако такое определение целесообразно уточнить следующим образом.

Определение 6. Точка $a \in \mathbb{R}$ называется точкой разрыва функции f , если либо $a \in X$, но f не является непрерывной в ней, либо $a \notin X$, но является двусторонней предельной точкой множества X .

Заметим, что иногда к точкам разрыва функции f относят не только двусторонние, но и односторонние предельные точки множества X , которые не принадлежат X .

Учитывая определение 6 и определение непрерывной функции в точке a , заключаем, что a из X является точкой разрыва функции f , если

$$\exists U_{f(a)} : \forall U_a \exists x \in X \cap U_a : f(x) \notin U_{f(a)}$$

или

$$\exists \varepsilon > 0 : \forall \delta > 0 \exists x \in X, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$$

Иными словами, предельная точка a множества X , принадлежащая X , является точкой разрыва функции f , если либо не существует предела функции f в точке a , либо он существует, но отличен от значения $f(a)$ функции f в точке a .

Пример 5. Пусть $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Точка $a = 0$ не принадлежит области определения функции f , но является для нее двусторонней предельной. Поэтому $a = 0$ — точка разрыва функции f .

Точки разрыва

Определение 7. Пусть a — точка разрыва функции f , a — двусторонняя (или односторонняя) предельная точка множества X . Точку a называют точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние (или соответствующий односторонний) пределы функции f в точке a .

Определение 8. Если a — точка разрыва первого рода функции f и в ней существует предел функции, то точку a называют точкой устранимого разрыва.

Если a — точка устранимого разрыва функции f и $\lim_{x \rightarrow a} f = A$, то функция

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{a\}, \\ A, & x = a, \end{cases}$$

непрерывна в точке a .

Лемма 1. Если a — точка разрыва первого рода функции f и a — односторонняя предельная точка множества X , то она является точкой устранимого разрыва функции f .

Утверждение следует из предыдущего определения и теоремы о равносильности предела и одностороннего предела функции в односторонней предельной точке.

Определение 9. Если a — точка разрыва функции f и в этой точке не существует или бесконечен хотя бы один из односторонних пределов функции f , то a называется точкой разрыва второго рода.

Из определений 7 и 9 получаем, что каждая точка разрыва функции f , которая не является точкой разрыва первого рода, является точкой разрыва второго рода.

Теорема 1 (о точках разрыва монотонной функции). Монотонная на промежутке функция может иметь только точки разрыва первого рода.

Пусть для определенности функция f монотонна на $(a, b]$. Если x_0 — точка разрыва функции f , то либо $x_0 \in (a, b)$, либо $x_0 = b$. По следствию из теоремы о пределе монотонной функции существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, если $x_0 \in (a, b)$ и $f(x_0 - 0)$ если $x_0 = b$. Следовательно, x_0 — точка разрыва первого рода.

Часто бывает полезно понятие односторонней непрерывности функции в точке.

Определение 10. Пусть a — левосторонняя (правосторонняя) предельная точка множества X и $a \in X$. Говорят, что функция f , определенная на X , непрерывна в точке a слева (справа), если существует предел $f(a - 0)$ (соответственно $f(a + 0)$) и он равен значению функции f в точке a .

Используя определения Коши и Гейне для одностороннего предела функции, можно получить соответствующие определения односторонней непрерывности функции в точке.

Например, если a — левосторонняя предельная точка X , $a \in X$, то функцию $f: X \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ называют непрерывной в точке a слева, если $\forall \{x_n\} : x_n \in X, x_n < a, x_n \rightarrow a \Rightarrow f(x_n) \rightarrow f(a)$.

Замечание. В односторонней предельной точке, принадлежащей области определения функции, понятия односторонней непрерывности и непрерывности функции совпадают. Если же рассматриваемая точка является двусторонней предельной, то функция непрерывна в ней тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа.

Домашнее задание

Ответить на вопросы:

- 1) Определение функции непрерывной в точке.**
- 2) Определение точки разрыва первого рода.**
- 3) Определение точки устранимого разрыва.**
- 4) Определение точки разрыва второго рода.**

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru