Преподаватель Семенова Ольга Леонидовна

Математика

Группа ТЭК 2/3

16.11.2022

Лекция

Непрерывные функции и их свойства. Точки разрыва и их классификации.

Цели:

1.**Образовательная**: рассмотреть непрерывность функции, точки разрыва и их классификации.

*2.***Воспитательная***:* воспитать логическое мышление, внимание.

*3.***Развивающая***:* развитие коммуникативных качеств, критического мышления, познавательной активности студентов.

Формируемые общие и профессиональные компетенции: Материал практического занятия на тему: «Непрерывность функции и их свойства. Точки разрыва и их классификации » формирует такие общие компетенции:

- ОК 1. Понимать сущность и социальную значимость своей будущей профессии, проявлять к ней устойчивый интерес.
- ОК 2. Организовывать собственную деятельность, выбирать типовые методы и способы выполнения профессиональных задач, оценивать их эффективность и качество.
- ОК 3. Принимать решения в стандартных и нестандартных ситуациях и нести за них ответственность.
- ОК 4. Осуществлять поиск и использование информации, необходимой для эффективного выполнения профессиональных задач, профессионального и личностного развития.
- ОК 5. Использовать информационно-коммуникационные технологии в профессиональной деятельности.
- ОК 6. Работать в коллективе и команде, эффективно общаться с коллегами, руководством, потребителями.
- ОК 7. Брать на себя ответственность за работу членов команды (подчиненных), за результат выполнения заданий.
- ОК 8. Самостоятельно определять задачи профессионального и личностного развития, заниматься самообразованием, осознанно планировать повышение квалификации.
- ОК 9. Ориентироваться в условиях частой смены технологий в профессиональной деятельности.

Вопросы лекции:

1) **Определение непрерывной функции.**
2) **Точки разрыва.**

Определение непрерывной функции

Определение 1. *Функция f называется непрерывной в точке а из X, если для любой окрестности $U^{f}{}_{(a)}$ найдется такая окрестность U_a точки а, что образ множества Ua $\cap$ X при отображении f содержится в $U^{f}{}_{(a)}$.*

В логической символике это определение записывается так:

f : X → $\mathbb{R}$ непрерывна в точке a ∈ X ⇔ ∀U f (a) ∃ U_a : f (Ua X) ⊂ U f (a).

Поскольку под окрестностью конечной точки мы понимаем симметричную окрестность, то это определение равносильно следующему:

Определение 2 (по Коши). Функция f : X → $\mathbb{R}$ называется непрерывной в точке a ∈ X , если для любого числа ε > 0 найдется такое число δ = δ(ε) > 0, что для всех x ∈ X, удовлетворяющих условию |x - a| < δ, выполняется неравенство | f (x) - f (a)| < ε.

В логической символике последнее определение можно записать так:
функция f : X → $\mathbb{R}$ непрерывна в точке a ∈ X ⇔
(∀ε > 0 ∃ δ = δ(ε) > 0 : $\forall_x$ ∈ X, |x - a| < δ ⇒ | f (x) - f (a)| < ε.)

Замечание 1. Свойство непрерывности функции f изучается в любой точке a ∈ X , в то время как предел — в предельной точке а множества X , которая может не принадлежать X .

Замечание 2. В определении непрерывной функции в точке a рассматриваются образы всех точек множества X $\cap$ U_a , а в определении предела функции — образы точек из X $\cap$ U_a , отличных от а.
Если a ∈ X , но не является предельной точкой множества X , то ее называют изолированной точкой множества X . Ясно, что функция непрерывна в каждой изолированной точке области определения.

Поскольку f (a) принадлежит каждой окрестности U f (a) , то, учитывая определение предела функции f в точке a, получаем следующее определение, равносильное предыдущим.

Определение 3. *Пусть $f : X \to \mathbb{R}$, $a \in X$, a — предельная точка множества X. Функция f называется непрерывной в точке a, если существует предел функции в точке a и он равен значению функции f в точке a.*

Учитывая представление функции, имеющей в точке конечный предел, получаем: непрерывность функции f в точке a означает, что f имеет представление $f(x) = f(a) + o(1)$, $x \to a$.

Наконец, используя определение предела функции по Гейне, получаем определение, равносильное предыдущим

Определение 4 (по Гейне). *Функция $f : X \to \mathbb{R}$ называется непрерывной в точке $a \in X$, если для любой последовательности {xn} элементов множества X, сходящейся к a, соответствующая последовательность {f (xn)} образов сходится к f (a).*

Замечание. По сравнению с определением Гейне предела функции в определении 3.4 непрерывности функции снято требование, обязывающее все элементы последовательности $\{x_n\}$ быть отличными от a. (В случае, когда a — изолированная точка множества X , все элементы x_n , начиная с некоторого, равны a.)

Определение 5. *Функция f называется непрерывной на множестве X, если она непрерывна в каждой точке этого множества.*

Совокупность вещественнозначных функций, непрерывных на множестве X , обычно обозначается символом C(X).
Рассмотрим некоторые примеры.

Пример 1. Функция $f(x) = C$, $x \in \mathbb{R}$, непрерывна на $\mathbb{R}$.
Действительно, для любой точки $a \in \mathbb{R}$, для $\forall x \in \mathbb{R}$ $|f(x) - f(a)| = 0$.
Поэтому $\forall \varepsilon > 0 \forall \delta > 0$ имеем:

$|x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Последнее означает непрерывность функции в точке a, а значит и на множестве R.

Пример 2. Если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $f(x) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$, то $f \in C(\mathbb{R})$.
Зафиксируем произвольную точку $a \in \mathbb{R}$ и число $\varepsilon > 0$. Так как

$|f(x) - f(a)| = |x - a|$, $\forall x \in \mathbb{R}$, то, полагая $\delta = \varepsilon$, получим$|x$

$- a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon$.

Поэтому f непрерывна в точке a и непрерывна на $\mathbb{R}$.

Пример 3. Функция $f(x) = \sin x$ непрерывна на $\mathbb{R}$.

Для любых a ∈ $\mathbb{R}$ и x ∈ $\mathbb{R}$ $|\sin x - \sin a| = \left|2\sin\frac{x-a}{2}\cos\frac{x+a}{2}\right| \leq$

$$\leq 2\left|\sin\frac{x-a}{2}\right| \leq 2\frac{|x-a|}{2} = |x-a|.$$

Поэтому для любого $\varepsilon > 0$ положим $\delta = \varepsilon$ и получим, что, как только $|x-a| < \delta$, так $|\sin x - \sin a| \leq |x - a| < \delta = \varepsilon$.

Аналогично доказывается непрерывность функции $f(x) = \cos x$.

Пример 4. Функция $f(x) = |x|$ непрерывна на $\mathbb{R}$.
Поскольку для любых a ∈ $\mathbb{R}$ и x ∈ $\mathbb{R}$

$$|f(x) - f(a)| = |\,|x| - |a|\,| \leq |x-a|,$$

то, как и в предыдущих примерах, достаточно положить $\delta = \varepsilon$, чтобы доказать непрерывность функции f в точке a, а значит на $\mathbb{R}$.

К точкам разрыва функции $f : X \to \mathbb{R}$ следует отнести те точки множества X , в которых функция f не является непрерывной. Однако такое определение целесообразно уточнить следующим образом.

Определение 6. *Точка $a \in \mathbb{R}$ называется точкой разрыва функции f, если либо $a \in X$, но f не является непрерывной в ней, либо a 6 $\notin X$, но является двусторонней предельной точкой множества X.*

Заметим, что иногда к точкам разрыва функции f относят не только двусторонние, но и односторонние предельные точки множества X , которые не принадлежат X .

Учитывая определение 6 и определение непрерывной функции в точке a, заключаем, что a из X является точкой разрыва функции f, если

$\exists U_{f(a)} : \forall U_a\ \exists_x \in X \bigcap U_a : f(x) \notin U_{f(a)}$
или
$\exists \varepsilon > 0 : \forall\ \delta > 0\ \exists_x \in X, |x - a| < \delta : |f(x) - f(a)| \geq \varepsilon.$

Иными словами, предельная точка a множества X , принадлежащая X , является точкой разрыва функции f , если либо не существует предела функции f в точке a, либо он существует, но отличен от значения f (a) функции f в точке a.

Пример 5. Пусть $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{\sin x}{x}$. Точка a = 0 не принадлежит области определения функции f , но является для нее двусторонней предельной. Поэтому a = 0 — точка разрыва функции f .

Точки разрыва

Определение 7. *Пусть a — точка разрыва функции f, a – двусторонняя (или односторонняя) предельная точка множества X . Точку a называют точкой разрыва первого рода, если существуют конечные односторонние (или соответствующий односторонний) пределы функции f в точке a.*

Определение 8. *Если a — точка разрыва первого рода функции f и в ней существует предел функции, то точку a называют точкой устранимого разрыва.*

Если a — точка устранимого разрыва функции f и $\lim\limits_{a} f$ = A, то функция

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x), & x \in X \setminus \{a\}, \\ A, & x = a, \end{cases}$$

непрерывна в точке a.

Лемма 1. *Если a — точка разрыва первого рода функции f и a — односторонняя предельная точка множества X , то она является точкой устранимого разрыва функции f .*

Утверждение следует из предыдущего определения и теоремы о равносильности предела и одностороннего предела функции в односторонней предельной точке.

Определение 9. *Если a — точка разрыва функции f и в этой точке не существует или бесконечен хоть один из односторонних пределов функции f, то a называется точкой разрыва второго рода.*

Из определений 7 и 9 получаем, что каждая точка разрыва функции f, которая не является точкой разрыва первого рода, является точкой разрыва второго рода.

Теорема 1 (о точках разрыва монотонной функции). *Монотонная на промежутке функция может иметь только точки разрыва первого рода.*

Пусть для определенности функция f монотонна на (a, b]. Если x_0 — точка разрыва функции f, то либо $x_0 \in (a, b)$, либо x0 = b. По следствию из теоремы о пределе монотонной функции существуют конечные односторонние пределы $f(x_0 - 0)$, $f(x_0 + 0)$, если $x_0 \in (a, b)$ и $f(x_0 - 0)$ если $x_0 = b$. Следовательно, x_0 — точка разрыва первого рода.

Часто бывает полезно понятие односторонней непрерывности функции в точке.

Определение 10. *Пусть a — левосторонняя (правосторонняя) предельная точка множества X и $a \in X$. Говорят, что функция f, определенная на X, непрерывна в точке a слева (справа), если существует предел $f(a - 0)$ (соответственно $f(a + 0)$) и он равен значению функции f в точке a.*

Используя определения Коши и Гейне для одностороннего предела функции, можно получить соответствующие определения односторонней непрерывности функции в точке.

Например, если a — левосторонняя предельная точка X, $a \in X$, то функцию $f : X \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ называют непрерывной в точке a слева, если $\forall \{x_n\} : x_n \in X$, $x_n < a$, $x_n \to a \Rightarrow f(x_n) \to f(a)$.

Замечание. В односторонней предельной точке, принадлежащей области определения функции, понятия односторонней непрерывности и непрерывности функции совпадают. Если же рассматриваемая точка является двусторонней предельной, то функция непрерывна в ней тогда и только тогда, когда она непрерывна и слева, и справа.

Домашнее задание

Ответить на вопросы:

1) **Определение функции непрерывной в точке.**
2) **Определение точки разрыва первого рода.**
3) **Определение точки устранимого разрыва.**
4) **Определение точки разрыва второго рода.**

Ответы присылать на электронную почту: teacher-m2022@yandex.ru