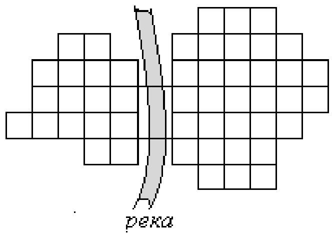
ЗАДАНИЯ
для проведения второго этапа республиканской олимпиады
по учебному предмету «Математика»

IX класс

1. Докажите, что если при некоторых целых значениях *к, т* и *п* число $k+2m+3n$ делится без остатка на 2017, то число $2015k+2013m+2011n$ также делится без остатка на 2017.

2. На рисунке изображен план города. Городские кварталы имеют форму равных квадратов. Стороны квадратов будем называть *дорогами*. Точки, где пересекаются две или более дорог назовем *перекрестками*. Новый мэр решил как можно быстрее отремонтировать дороги в городе. Какое наибольшее число дорог можно одновременно закрыть на ремонт, чтобы при этом жители города могли от любого перекрестка добраться по оставшимся дорогам до любого другого перекрестка? (Закрытие на ремонт дороги между двумя перекрестками не означает запрет проезда через эти перекрестки по другим дорогам).



3. Точки *N, L, К* – середины сторон *AB, BC* и *CA* треугольника *ABC* соответственно. *M* – точка пересечения медиан этого треугольника. Известно, что $CN = 6$ и $\angle NLA = \angle LCM = \angle LKM$. Найдите длину стороны *AC*.

4. Имеется 59 монет. Требуется разложить эти монеты по клеткам квадратной доски $n\times n$ так, чтобы количества монет в любых двух соседних по стороне клетках отличались ровно на 1 (в клетках может быть по нескольку монет или не быть их вообще). При каком максимальном *n* это возможно?

5. Вершины треугольника *ABC* лежат на параболе $y=x^2$. При этом сторона *AB* параллельна оси *OX*, а вершина *C* лежит ниже прямой *AB*. Докажите, что если длина высоты, опущенной из вершины *C* на сторону *AB*, равна 1, то $\angle C = 90°$.

Пользоваться калькулятором не разрешается

Математика

IX класс. Решения.

Решения учащихся могут отличаться от авторских!

1. ***Решение:***

Доказательство.

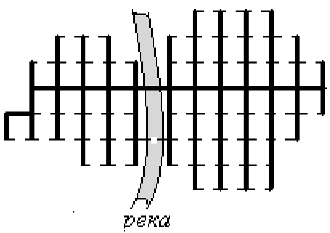
$2015k + 2013m + 2011n = (2017k - 2k) + (2017m - 4m) + (2017n - 6n) =$

$= 2017(k + m + n) - 2(k + 2m + 3n)$.

Последнее выражение представляет собой разность двух чисел, кратных 2017. *Что и требовалось доказать.*

2. Решение.

Нетрудно подсчитать общее число перекрестков: 2+4+5+6+6+5+6+8+8+8+8+5+3=74. Рассмотрим произвольный перекресток. Чтобы из этого перекрестка до какого-либо другого перекрестка надо проехать не менее чем по одной дороге. Тогда, чтобы добраться до всех остальных 73 перекрестков, придется проехать не менее чем по 73 дорогам. Таким образом, не менее 73 дорог не должны быть закрыты на ремонт.



Найдем общее число дорог в городе.

Число «вертикальных» дорог в городе: 1+3+4+5+5+4+5+7+7+7+7+4+2=61.

Число «горизонтальных» дорог в городе: 2+4+5+6+5+2+6+8+8+8+5+3=62.

Всего дорог в городе: 61+62=123. На ремонт одновременно можно закрыть 123–73=50 дорог. Приведем пример того, как можно закрыть 50 дорог, чтобы при этом жители города могли от любого перекрестка добраться по оставшимся дорогам до любого другого перекрестка.

***Ответ*: 50 дорог.**

3. Решение.

Из равенства углов *LCM* и *LKM* следует, что точки *C, K, M, L* – лежат на одной окружности. А из равенства углов *NLA* и *LCM* следует, что прямая *NL* касается данной окружности в точке *L*. Кроме того, по свойству медианы $NM = \frac{1}{3}CN = 2$. По свойству касательной имеем: $NL^2 = NM \cdot NC$. $NL^2 = 2 \cdot 6 = 12$, $NM = 2\sqrt{3}$.

$AC = 2 \cdot NL = 4\sqrt{3}$.

***Ответ*: $4\sqrt{3}$.**

4. Решение.

Раскрасим клетки доски в шахматном порядке. Из условия задачи следует, что количества монет в клетках одного цвета имеют одинаковую четность, а количества монет в клетках разного цвета имеют различную четность.

Если n четно, т.е. $n = 2k$, $k \in N$, то общее число клеток на доске равно $n^2 = 4k^2$. Соответственно клеток черного и белого цвета будет по $2k^2$ – четные количества. Отсюда следует, что общее количество монет на доске будет четно, а оно равно 59 – противоречие. Следовательно, n – нечетно.

Раскрасим при нечетном n клетки доски в шахматном порядке так, чтобы угловые клетки были черными. (В этом случае число черных клеток на доске на единицу превышает число белых).

Пусть в каждой черной клетке находится нечетное число монет, тогда максимально возможное число черных клеток равно 59 и соответственно общее число клеток на доске не превышает 59+58=117.

Пусть в каждой белой клетке находится нечетное число монет, тогда максимально возможное число белых клеток равно 59 и соответственно общее число клеток на доске не превышает 59+60=119.

В любом случае имеем $n^2 \le 119$. С учетом того, что n – нечетное, имеем $n \le 9$.

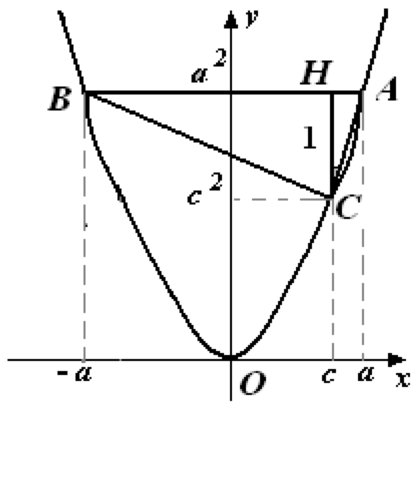
Покажем, что на доске 9×9 можно разместить 59 монет в соответствии с требованием задачи. В каждую черную клетку (их 41) положим по одной монете. Затем в произвольные 9 белых клеток положим по две монеты. Всего монет на доске будет $41+2\cdot 9=59$.

***Ответ:* 9×9.**

5.Доказательство.

Пусть вершины треугольника ABC имеют следующие координаты:

$A(a;\ a^2)$, $B(-a;\ a^2)$, $C(c;\ c^2)$, где $a, c > 0$. (Не нарушая общности рассуждений, будем полагать, что точка C лежит на «правой» ветви параболы).



Если H основание высоты, опущенной из точки C на сторону AB,
то $H(c;\ a^2)$.

Имеем: $AB = 2a$, $AH = a - c$, $BH = c - (-a) = c + a$, $CH = a^2 - c^2 = 1$.

Тогда $AB^2 = 4a^2$, $AC^2 = AH^2 + CH^2 = (a-c)^2 + 1$

$BC^2 = BH^2 + CH^2 = (c+a)^2 + 1$.

Далее имеем: $AC^2 + BC^2 - AB^2 = (a-c)^2 + 1 + (c+a)^2 + 1 - 4a^2 =$

$= a^2 - 2ac + c^2 + a^2 + 2ac + c^2 + 2 - 4a^2 = 2c^2 - 2a^2 + 2 =$

$= -2(a^2 - c^2) + 2 = -2\cdot 1 + 2 = 0$

Отсюда следует, что $AC^2 + BC^2 = AB^2$, а значит $\angle C$=90°.

Что и требовалось доказать.