

|                                                                                   |                                                                                         |                                             |                                                                                   |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|
|  | <p align="center"><b>Pruebas de Acceso a la<br/>Universidad<br/>Castilla y León</b></p> | <p align="center"><b>MATEMÁTICAS II</b></p> | <p align="center"><b>EJERCICIO</b></p> <p align="right"><b>N.º Páginas: 3</b></p> |
|-----------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------|---------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------|

**INDICACIONES**

1. OPTATIVIDAD: El examen consta de cuatro apartados: un apartado con un problema obligatorio y 3 apartados con la posibilidad de elegir entre dos problemas. Se deberá responder a un máximo de CUATRO PROBLEMAS: el problema obligatorio (apartado 2) y solamente un problema de cada uno de los tres apartados restantes. No es necesario hacerlo en el mismo orden en que están enunciados, pero se expresará claramente cuáles son los elegidos. En caso de responder a dos problemas de un mismo apartado, sólo se corregirá el que aparezca en primer lugar según el orden de numeración de pliegos y hojas de cada pliego y que no aparezca totalmente tachado.
2. CALCULADORA: Podrán usarse calculadoras no programables, que no admitan memoria para texto, ni para resolución de ecuaciones ni cálculo matricial, ni para resolución de integrales, ni para representaciones gráficas.
3. CRITERIOS GENERALES DE EVALUACIÓN: Cada uno de los problemas se puntuará sobre un máximo de 2,5 puntos. Se observarán fundamentalmente los siguientes aspectos: correcta utilización de los conceptos, definiciones y propiedades relacionadas con la naturaleza de la situación que se trata de resolver; justificaciones teóricas que se aporten para el desarrollo de las respuestas; claridad y coherencia en la exposición; precisión en los cálculos y en las notaciones. Deben figurar explícitamente las operaciones no triviales, de modo que puedan reconstruirse la argumentación lógica y los cálculos.
4. DEDUCCIONES POR ERRORES ORTOGRÁFICOS Y GRAMATICALES: Se penalizarán los errores ortográficos (grafías, tildes y puntuación) cometidos, hasta un máximo de un punto en la nota global del examen, teniéndose en cuenta que la repetición del mismo error se contabilizará como sólo uno, los dos primeros errores no se penalizarán y, a partir del tercer error ortográfico, se deducirá 0,1 puntos por error. Por errores en la redacción, en la presentación, incoherencia o incorrección léxica o gramatical se podrá deducir un máximo de medio punto de la nota global.
5. El examen debe realizarse usando bolígrafo azul o negro (sólo un color). No pueden usarse ni lápiz, ni bolígrafo borrable, ni bolígrafo de otro color.

**APARTADO 1: (obligatorio)**

**Problema 1.**

- a) Dado  $k \in \mathbb{R}$ , se considera el sistema de ecuaciones  $\begin{cases} kx - y - z = 1 \\ x + ky + 2kz = k \end{cases}$ . Discutir el sistema según los valores del parámetro  $k \in \mathbb{R}$  y resolverlo para  $k = -1$ . (1,5 puntos)

**Resolución**

Matrices de coeficientes y ampliada:  $A = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 \\ 1 & k & 2k \end{pmatrix}$  y  $A^* = \begin{pmatrix} k & -1 & -1 & 1 \\ 1 & k & 2k & k \end{pmatrix}$

Sea el menor de  $A$  y  $A^*$   $|k - 1 \ 1 \ k| = k^2 + 1 \neq 0 \ \forall k \in \mathbb{R}$ . Por tanto,  $\text{rg } A = 2 = \text{rg } A^* < n^\circ$  de incógnitas.

Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

Para  $k = -1$ ,  $A^* = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f1 \leftrightarrow f2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{f2 + f1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & -2 & -3 & 0 \end{pmatrix}$  que corresponde al sistema

$$\begin{cases} x + y + z = -1 \\ -x + y + 2z = 1 \end{cases} \Rightarrow y = x - 2z + 1; \text{ sustituyo, } x + x - 2z + 1 + z = -1 \Rightarrow 2x - z = -2 \Rightarrow z = 2x + 2$$

Luego,  $y = x - 2(2x + 2) + 1 = -3x - 3$ . Llamando  $x = k$ , las infinitas soluciones son

$$\begin{cases} x = k \\ y = -3k - 3 \\ z = 2k + 2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}.$$

- b) Sea  $A$  una matriz cuadrada que verifica  $A^2 = I + 3A$ , donde  $I$  denota la matriz identidad.

Demostrar que el determinante de A no es cero y expresar  $A^{-1}$  en función de A y de I. (1 punto)

**Resolución**

Trasponiendo términos,  $A^2 - 3A = I \Rightarrow A^2 - 3IA = I \Rightarrow A(A - 3I) = I \Rightarrow \exists A^{-1} = A - 3I$  y por tanto, al ser A inversible, el determinante de A no es cero

APARTADO 2: (elegir UN problema)

Problema 2A.

Sea la función  $f(x) = 12x + 3x^2 - 2x^3$ .

a) Calcular el área del recinto limitado por la gráfica de  $f(x)$  y su recta tangente en el punto  $x = 1$  (1,5 puntos)

**Resolución**

$f'(x) = 12 + 6x - 6x^2$ . La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función  $f$  en  $A(x_0, f(x_0))$  es  $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ . En este caso,  $x_0 = 1$ ;  $f(x_0) = f(1) = 12 \cdot 1 + 3 \cdot 1^2 - 2 \cdot 1^3 = 13$   
 $f'(x_0) = f'(1) = 12 + 6 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = 12 \Rightarrow rtg: y = 12(x - 1) + 13$ ;  $rtg: y = 12x + 1$

Abcisas de los puntos de corte entre  $y = f(x)$  y su recta tangente:  $12x + 3x^2 - 2x^3 = 12x + 1$

Trasponiendo,  $2x^3 - 3x^2 + 1 = 0$ . Factoricemos usando la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrrrrrrrrr} 1 & 2 & -3 & 0 & -1 & -1 & -1 & 1 & -10 \\ \hline & 1 & 1 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}; (x-1)(2x^2 - x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1, x = \frac{1 \pm 3}{4} \Rightarrow \text{Soluciones: } x = 1, x = \frac{-1}{2}$$

El área que piden es  $A = \left| \int_{-1/2}^1 [12x + 3x^2 - 2x^3 - (12x + 1)] dx \right| = \left| \int_{-1/2}^1 (3x^2 - 2x^3 - 1) dx \right|$ .

Una primitiva es  $p(x) = x^3 - \frac{x^4}{2} - x = \frac{2x^3 - x^4 - 2x}{2}$ . Por la regla de Barrow,

$$A = \left| p(1) - p\left(\frac{-1}{2}\right) \right| = \left| \frac{2 \cdot 1^3 - 1^4 - 2 \cdot 1}{2} - \frac{2\left(\frac{-1}{2}\right)^3 - \left(\frac{-1}{2}\right)^4 - 2\frac{-1}{2}}{2} \right| = \frac{\left| -1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} - 1 \right|}{2} = \frac{27}{32} = 0,$$

b) Calcular  $\frac{\ln \ln(1+x^2)}{xf(x)}$ , donde  $\ln$  denota el logaritmo neperiano. (1 punto)

**Resolución**

Se pide  $L = \frac{\ln \ln(1+x^2)}{x(12x + 3x^2 - 2x^3)} = \frac{\ln \ln(1+x^2)}{12x^2 + 3x^3 - 2x^4} = \frac{\ln \ln(1+0^2)}{12 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0^3 - 2 \cdot 0^4} = \frac{0}{0}$  Indeterminación. Aplicamos

L'Hôpital:  $\frac{[\ln \ln(1+x^2)]'}{(12x^2 + 3x^3 - 2x^4)'} = \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{24x + 9x^2 - 8x^3} = \frac{2}{(1+x^2)(24+9x-8x^3)} = \frac{2}{1 \cdot 24} = \frac{1}{12} \Rightarrow L = \frac{1}{12}$

Problema 2B.

Se considera la función  $f(x) = x^2 e^{-x}$ .

a) Determinar su dominio de definición, intervalos de crecimiento y decrecimiento, sus máximos y mínimos relativos y sus asíntotas. (1,5 puntos)

Resolución

Como  $f(x)$  se puede calcular  $\forall x$ ,  $\text{Dom } f = \mathbb{R}$  y es continua y derivable en  $\mathbb{R}$  por ser producto de funciones continuas y derivables. Además,  $f'(x) = 2xe^{-x} + x^2 e^{-x}(-1) = xe^{-x}(2 - x) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = 2$

Hagamos una tabla de signos de  $f'(x)$ :

|         | $(-\infty, 0)$ | 0      | $(0, 2)$  | 2      | $(2, +\infty)$ |
|---------|----------------|--------|-----------|--------|----------------|
| $f'(x)$ | -              | 0      | +         | 0      | -              |
| $f(x)$  | decreciente    | mínimo | creciente | máximo | decreciente    |

$f$  es decreciente en  $(-\infty, 0) \cup (2, +\infty)$  y creciente en el intervalo  $(0, 2)$

Mínimo relativo:  $x = 0$ ,  $y = f(0) = 0^2 e^0 = 0$ . Punto  $(0, 0)$ .

Máximo relativo:  $x = 2$ ,  $y = f(2) = 2^2 e^{-2} = \frac{4}{e^2}$ . Punto  $\left(2, \frac{4}{e^2}\right)$ .

Por otra parte, como  $f$  es continua no hay asíntotas verticales.

Veamos si hay asíntotas horizontales u oblicuas en  $-\infty$ :

$$f(x) = f(-x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (-x)^2 e^x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 e^x = +\infty. (+\infty) = +\infty \Rightarrow \text{No hay AH en } -\infty$$

AO:  $y = mx + n$ .

$$m = \frac{f(x)}{x} = \frac{x^2 e^{-x}}{x} = x e^{-x} = (-x e^x) = -\infty(+\infty) = -\infty \Rightarrow \text{No hay AO en } -\infty$$

Veamos si hay asíntotas horizontales u oblicuas en  $+\infty$ :

$$f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ porque la exponencial es un infinito de orden superior a } x^2.$$

Luego,  $f$  tiene asíntota horizontal en  $+\infty$ , A.H:  $y = 0$  (eje X). Al haber AH no hay AO.

$$\text{Estudiemos la posición de la gráfica respecto de la asíntota: } y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} = \frac{x^2}{e^x} - 0 = \frac{x^2}{e^x}$$

Si  $x \rightarrow +\infty$ ,  $y_{\text{gráfica}} - y_{\text{asíntota}} > 0$ . Luego, la gráfica está “por encima” de la asíntota en  $+\infty$

b) Calcular el área de la región limitada por la gráfica de la función  $f$  y el eje de abscisas en el intervalo  $[0, 2]$ . (1 punto)

Resolución

Como  $f$  es creciente en el intervalo  $(0, 2)$  y  $f(0) = 0$  resulta que en dicho intervalo  $f(x) > 0$ .

$$\text{El área que se pide es } A = \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^2 e^{-x} dx. \text{ Para hallar una primitiva usamos la integración por}$$

$$\text{partes: } \left[ u = x^2 \quad 2x dx \quad dv = e^{-x} dx \quad v = -e^{-x} \right] ; \int f(x) dx = -x^2 e^{-x} + 2 \int x e^{-x} dx. \text{ Otra vez por partes}$$

$$[u = x \wedge dx dv = e^{-x} dx v = -e^{-x}]. \text{Queda } \int f(x) dx = -x^2 e^{-x} + 2 \left( -x e^{-x} + \int e^{-x} dx \right)$$

Una primitiva de  $f$  es  $F(x) = -x^2 e^{-x} - 2x e^{-x} - e^{-x} = -e^{-x}(x^2 + 2x + 2)$ . Por la regla de Barrow,

$$A = F(2) - F(0) = -e^{-2}(2^2 + 2 \cdot 2 + 2) - [-e^0(0^2 + 2 \cdot 0 + 2)] = 2 - 10e^{-2} \approx 0,6466 \text{ u}^2$$

APARTADO 3: (elegir UN problema)

Problema 3A. (Propuesto en la Comunidad Valenciana, julio de 2023)

Sean el plano  $\pi: x + my + z = 2$  y la recta  $r: (x, y, z) = (1, 1, 0) + t(-1, -1, 2), t \in \mathbb{R}$ .

a) Determinar la posición relativa de  $r$  y  $\pi$  en función de  $m$ . (1,5 puntos)

### Resolución

Un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (5, m, 1)$  y un vector director de  $r$  es

$$\vec{d} = (-1, -1, 2) // (1, 1, -2)$$

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = 5 + m - 2 = m + 3 = 0 \Leftrightarrow m = -3$$

- Si  $m \neq -3$ , entonces  $\vec{d} \cdot \vec{n} \neq 0 \Rightarrow r$  y  $\pi$  son secantes.

$r$  corta perpendicularmente a  $\pi$  si  $\vec{d} // \vec{n}$ . O sea, si  $\frac{5}{-1} = \frac{m}{-1} = \frac{1}{2}$ , lo cual es imposible.

Luego,  $r$  y  $\pi$  son secantes no perpendiculares.

- Si  $m = -3$ , entonces  $\vec{d} \cdot \vec{n} = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi$  ó  $r \subset \pi$

Como  $\pi: 5x - 3y + z = 2$  y  $A(1, 1, 0) \in r$  y  $A \in \pi$  porque cumple su ecuación ( $5 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 0 = 2$ )  $\Rightarrow r \subset \pi$

b) Para  $m = 1$ , calcular el plano  $\pi'$  que contiene a  $r$  y es perpendicular a  $\pi$ . (1 punto)

### Resolución

Para  $m = 1$ ,  $\pi: 5x + y + z = 2$ .

Un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (5, 1, 1)$  y un vector director de  $r$  es  $\vec{d} = (1, 1, -2)$

El plano  $\pi'$  que nos piden tiene como vectores directores  $\vec{n} = (5, 1, 1)$  y  $\vec{d} = (1, 1, -2)$

Un vector normal de  $\pi'$  es  $\vec{n}' = \vec{n} \times \vec{d} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = (-3, 11, 4)$

Y como  $\pi'$  pasa por  $A(1, 1, 0) \in r \Rightarrow \pi': -3(x-1) + 11(y-1) + 4(z-0) = 0 \Rightarrow \pi': -3x + 11y + 4z - 8 = 0$

Problema 3B.

Sean el plano  $\pi: x + y - z = 2$  y la recta  $r: \frac{x-1}{-3} = \frac{y}{2} = \frac{z-2}{-1}$

a) Calcular la ecuación de un plano  $\pi'$  paralelo al plano  $\pi$  y que esté a una distancia de  $2\sqrt{3}$  unidades de la recta  $r$ . ¿Es único ese plano? Justificar la respuesta. (1,5 puntos)

### Resolución

Un vector normal de  $\pi$  es  $\vec{n} = (1, 1, -1)$  y un vector director de  $r$  es  $\vec{d} = (-3, 2, -1)$

$$\vec{d} \cdot \vec{n} = -3 + 2 + 1 = 0 \Rightarrow \vec{d} \perp \vec{n} \Rightarrow r // \pi \text{ ó } r \subset \pi$$

$A(1, 0, 2) \in r$  y  $A \notin \pi$  porque NO cumple su ecuación ( $1 + 0 - 2 = -1 \neq 2$ ), entonces  $r // \pi$

Observa que  $\pi: x + y - z - 2 = 0$  y como  $\pi' // \pi$ , entonces  $\pi': x + y - z + k = 0$ . Usando la fórmula de la

$$\text{distancia de un punto a un plano, } 2\sqrt{3} = d(r, \pi') = d(A, \pi') = \frac{|1+0-2+k|}{\sqrt{1^2+1^2+(-1)^2}} = \frac{|k-1|}{\sqrt{3}} \Rightarrow |k-1| = 6$$

Luego, hay 2 planos:  $k-1 = -6$  ( $k = -5$ ),  $\pi'_1: x + y - z - 5 = 0$  ó  $k-1 = 6$  ( $k = 7$ ),  $\pi'_2: x + y - z + 7 = 0$

b) Calcular la ecuación de un plano  $\pi''$  perpendicular al plano  $\pi$  y que pasa por los puntos  $P(1, 0, 1)$  y  $Q(0, 1, 0)$ . (1 punto)

**Resolución**

Al ser  $\vec{QP} = (1, -1, 1)$  y el vector normal de  $\pi$ ,  $\vec{n} = (1, 1, -1)$ , vectores directores del plano  $\pi''$  que

piden, un vector normal de  $\pi''$  es  $\vec{n}'' = \vec{QP} \times \vec{n} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix} = (0, 2, 2) //$   
 $(0, 1, 1)$

Como  $\pi''$  pasa por  $Q(0, 1, 0)$ , entonces  $\pi'': 0(x - 0) + 1(y - 1) + 1(z - 0) = 0$  ;  $\pi'': y + z - 1 = 0$

APARTADO 4: (elegir UN problema)

Problema 4A.

El tamaño de las truchas que hay en el río Tormes, entre el pantano de Santa Teresa y su paso por Fresno Alhándiga, se puede aproximar por una variable aleatoria con distribución normal de media 28 cm y desviación típica de 6 cm.

a) Calcular el porcentaje de truchas cuyo tamaño está entre 19 cm y 40 cm. (1,5 puntos)

b) Sabiendo que una de las truchas capturadas medía más de 38 cm, ¿cuál es la probabilidad de que midiera más de 42 cm? (1 punto)

**Resolución**

$X = \text{tamaño, en cm} \rightarrow N(28, 6)$ . Tipificando,  $Z = \frac{X - 28}{6} \rightarrow N(0, 1)$

$$a) p(19 < X < 40) = p\left(\frac{19 - 28}{6} < \frac{X - 28}{6} < \frac{40 - 28}{6}\right) = p(-1,5 < Z < 2) =$$

$$= p(Z < 2) - p(Z < -1,5) = p(Z < 2) - [1 - p(Z < 1,5)] = p(Z < 2) + p(Z < 1,5) - 1 =$$

$$= 0,9772 + 0,9332 - 1 = 0,9104. \text{ Luego, el porcentaje que se pide es del } 91,04\%$$

$$b) \text{ Piden } p[(X > 42)/(X > 38)] = \frac{p[(X > 42) \cap (X > 38)]}{p(X > 38)} = \frac{p(X > 42)}{p(X > 38)} = \frac{p\left(\frac{X - 28}{6} < \frac{42 - 28}{6}\right)}{p\left(\frac{X - 28}{6} < \frac{38 - 28}{6}\right)}$$

$$p[(X > 42)/(X > 38)] \cong \frac{p(Z > 2,33)}{p(Z > 1,67)} \cong \frac{1 - p(Z \leq 2,33)}{1 - p(Z \leq 1,67)} \cong \frac{1 - 0,9901}{1 - 0,9525} \cong 0,2084 = 20,84\%$$

Problema 4B.

Un grupo de WhatsApp, formado por los alumnos de un gimnasio de judo, está compuesto por un 55% de mujeres y el resto hombres. Se sabe que el 15% del grupo es cinturón verde y que una quinta parte de las mujeres es cinturón verde.

a) ¿Qué porcentaje de hombres son cinturón verde? (1 punto)

b) Si el grupo recibe un mensaje enviado por un cinturón verde, calcular la probabilidad de que lo haya enviado una mujer (0,75 puntos)

c) Si el mensaje no tiene información sobre el sexo y el color del cinturón del remitente, calcular la probabilidad de que sea hombre y cinturón verde.

**Resolución**

$A = \text{ser mujer}$     $B = \text{ser cinturón verde}$ . Construimos la siguiente tabla de porcentajes/probabilidades:

|                | A                                                       | A <sup>c</sup>       | Total                 |
|----------------|---------------------------------------------------------|----------------------|-----------------------|
| B              | $1/5 \text{ del } 55\% = 20\% \text{ del } 55\% = 11\%$ | $15\% - 11\% = 4\%$  | 15%                   |
| B <sup>c</sup> | $55\% - 11\% = 44\%$                                    | $85\% - 44\% = 41\%$ | $100\% - 15\% = 85\%$ |

---

|           |     |                       |      |
|-----------|-----|-----------------------|------|
| Tota<br>l | 55% | $100\% - 55\% = 45\%$ | 100% |
|-----------|-----|-----------------------|------|

a) Se pide  $p\left(\frac{B}{A^c}\right) = \frac{p(B \cap A^c)}{p(A^c)} = \frac{4\%}{45\%} = \frac{4}{45} \cong 0,0889 = 8,89\%$

b) Pide  $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} = \frac{11\%}{15\%} = \frac{11}{15} \cong 0,7333 = 73,33\%$

c) Se pide  $p(A^c \cap B) = 4\%$