

Розв'язування задач

1. Знайдіть довжину діагоналі AC паралелограма ABCD, якщо A (2; - 6; 0), B (-4; 8; 2), D (0; -12; 0).

Розв'язання

Оскільки $\overrightarrow{AB}(-6; 14; 2)$, $\overrightarrow{AD}(-2; -6; 0)$, то $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD}$, AC (-8; 8; 2)

(рис. 300).

Тоді $|\overrightarrow{AC}| = \sqrt{(-8)^2 + 8^2 + 2^2} = \sqrt{132} = 2\sqrt{33}$. Відповідь. $2\sqrt{33}$.

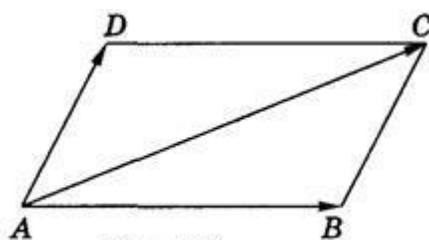


Рис. 300

2. Знайдіть кут між стороною AC і медіаною BM трикутника ABC, якщо A(-3; -5; 1), B(-4; -1; -2) і C(3; 3; 1).

Розв'язання

Кут між стороною AC та медіаною BM дорівнює куту φ між векторами $\overrightarrow{MA}$ та $\overrightarrow{MB}$ (рис. 301), або, якщо кут між цими векторами тупий,— куту $180^\circ - \varphi$.

Знайдемо координати точки M: $M\left(\frac{-3+3}{2}; \frac{-5+3}{2}; \frac{1+1}{2}\right) = M(0; -1; 1)$.

Тоді $\overline{MB}(-4; 0; -3)$, $\overline{MA}(-3; -4; 0)$;

$$\cos \varphi = \frac{\overline{MA} \cdot \overline{MB}}{|\overline{MA}| \cdot |\overline{MB}|} = \frac{(-4) \cdot (-3) + 0 \cdot (-4) + (-3) \cdot 0}{\sqrt{(-4)^2 + 0^2 + (-3)^2} \cdot \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2 + 0^2}} = \frac{12}{25}.$$

$\varphi = \arccos \frac{12}{25}$ — гострий кут. Отже, кут між стороною AC та медіаною BM дорівнює $\arccos \frac{12}{25}$.

Відповідь. $\arccos \frac{12}{25}$.

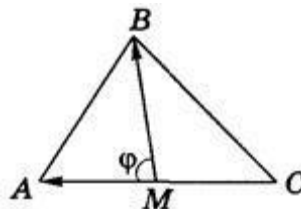


Рис. 301

3. Обчисліть площу паралелограма, побудованого на векторах $\overline{AB}(3;0;-4)$ і $\overline{AD}(0;5;0)$.

Розв'язання

Нехай паралелограм ABCD побудований на векторах $\overline{AB}$ і $\overline{AD}$ (рис. 302). Площа паралелограма дорівнює добутку суміжних сторін на синус кута між ними: $S = |\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}| \cdot \sin \varphi$.

$$|\overline{AB}| = \sqrt{3^2 + 0^2 + (-4)^2} = 5; \quad |\overline{AD}| = \sqrt{0^2 + 5^2 + 0^2} = 5;$$

$$\cos \varphi = \frac{\overline{AB} \cdot \overline{AD}}{|\overline{AB}| \cdot |\overline{AD}|} = \frac{3 \cdot 0 + 0 \cdot 5 + 0 \cdot (-4)}{5 \cdot 5} = 0.$$

Оскільки $\cos \varphi = 0$, то $\varphi = 90^\circ$. Тоді $\sin \varphi = 1$ і $S = 5 \cdot 5 \cdot 1 = 25$.

Відповідь. 25.

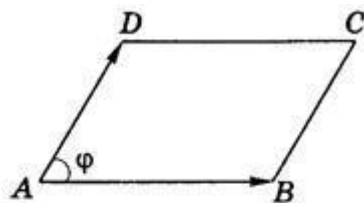


Рис. 302