MOUVEMENT DE SPHERES DANS LES FLUIDES

On définit le repère de coordonnées sphériques (figure II.1 ci-dessous):

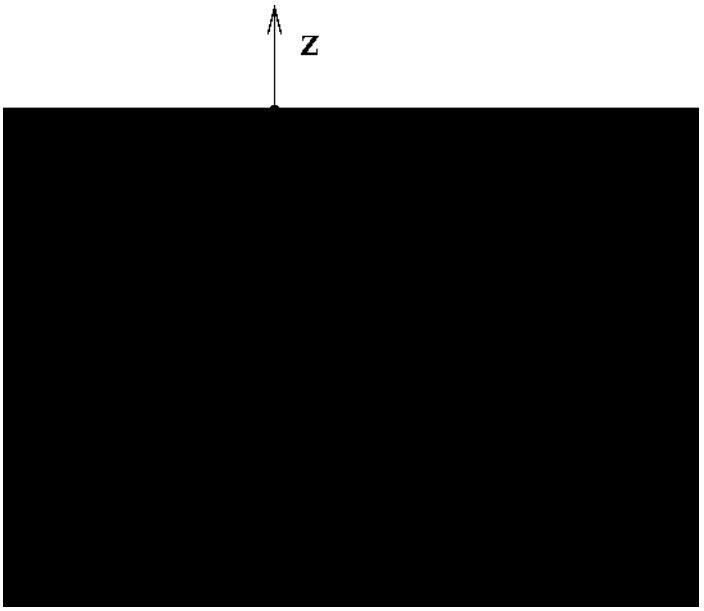


Figure II.1

La relation entre coordonnées sphériques et cartésiennes est:

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi \\ z &= r\cos\theta \end{aligned}$$

Les champs de vecteurs au point M (r, θ, φ) seront exprimés dans le repère local $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_\varphi)$.
L'axe (Oz) désigne la verticale ascendante du référentiel d'observation.
On pourra, tout au long du problème, utiliser le formulaire d'analyse vectorielle suivant, pour les champs scalaires :

$$\overrightarrow{grad}(f) = \frac{\partial f}{\partial r}\vec{e}_r + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\vec{e}_\theta + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \varphi}\vec{e}_\varphi$$

$$\Delta f = \frac{2}{r}\frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\partial^2 f}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2} + \frac{\cos\theta}{r^2\sin\theta}\frac{\partial f}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 f}{\partial \varphi^2}$$

Et pour les champs vectoriels $\vec{X} = X_r\vec{e}_r + X_\theta\vec{e}_\theta + X_\varphi\vec{e}_\varphi$:

$$div(\vec{X}) = \frac{2}{r}X_r + \frac{\partial X_r}{\partial r} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}X_\theta + \frac{1}{r}\frac{\partial X_\theta}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \varphi}$$

$$\begin{aligned} \overrightarrow{rot}(\vec{X}) = &\left(\frac{1}{r}\frac{\partial X_\varphi}{\partial \theta} + \frac{\cos\theta}{r\sin\theta}X_\varphi - \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial X_\theta}{\partial \varphi}\right)\vec{e}_r \\ &+ \left(\frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial X_r}{\partial \varphi} - \frac{X_\varphi}{r} - \frac{\partial X_\varphi}{\partial r}\right)\vec{e}_\theta \\ &+ \left(\frac{\partial X_\theta}{\partial r} + \frac{X_\theta}{r} - \frac{1}{r}\frac{\partial X_r}{\partial \theta}\right)\vec{e}_\varphi \end{aligned}$$

On utilisera, pour les applications numériques, les données suivantes:

- viscosités dynamiques de l'air et de l'eau dans les conditions usuelles : $\eta_{air} = 1,8.10^{-5}\,Pl$; $\eta_{eau} = 1,0.10^{-3}\,Pl$.
- masses volumiques de l'air et de l'eau : $\rho_{air} = 1,3\ kg.m^{-3}$; $\rho_{eau} = 10^{3}\ kg.m^{-3}$.
- accélération de la pesanteur $g = 9,8\ m.s^{-2}$.

II.1 Fluide parfait dans un champ de pesanteur

- **II.1.1** On note ρ la masse volumique du fluide, $\vec{g}$ le champ de pesanteur, P_t la pression et $\vec{v}$ le champ de vitesse. Ecrire l'équation d'Euler pour un fluide parfait, en supposant le référentiel d'observation galiléen.

- **II.1.2** En déduire, à une constante près, la valeur de la pression hydrostatique $P_h(z)$ lorsque le fluide, supposé incompressible, est au repos dans le référentiel galiléen.

II.2 Ecoulement stationnaire d'un fluide parfait autour d'une sphère immobile

On note ρ la masse volumique du fluide et $\vec{v}$ le champ de vitesse. On définit la surpression *P* comme la différence entre la pression P_t et la pression hydrostatique P_h définie dans la partie précédente. Dans toute cette partie, on remplacera dans l'équation d'Euler la pression P_t par la surpression *P*, et on **négligera totalement** l'influence du champ de pesanteur.

- **II.2.1** Donner la condition d'incompressibilité de l'écoulement.
- **II.2.2 -** On considère un écoulement potentiel $\vec{v}(\vec{r}) = \overrightarrow{grad}\left(\Phi(\vec{r})\right)$, où Φ est une fonction arbitraire de l'espace, et $r = \left\|\overrightarrow{OM}\right\|$ la distance à l'origine du repère de coordonnées sphériques.
  Que vaut alors le rotationnel du champ de vitesse $\vec{v}$?

- **II.2.3** Soit le potentiel $\Phi_u(\vec{r}) = u\,z$, avec *u* une constante. Reconnaître le champ de vitesse $\vec{v}_u$ associé.

- **II.2.4** Exprimer Φ_u à l'aide des coordonnées sphériques r,θ,φ .
  Exprimer dans la base locale $\left(\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_\varphi\right)$ le champ de vitesse $\vec{v}_u$ associé à Φ_u .

- **II.2.5** On donne maintenant le potentiel

$$\Phi_s(r,\theta,\varphi) = \left(ur + \frac{b}{r^2}\right)\cos\theta$$

où *b* est une constante. Calculer le champ de vitesse $\vec{v}_s$ associé.

- **II.2.6** Vérifier que le champ de vitesse $\vec{v}_s$ correspond bien à un écoulement incompressible.

  II.2.7 Montrer que pour une valeur particulière *a* de la distance *r*, la composante radiale de la vitesse (c'est -à-dire la composante orientée suivant $\vec{e}_r$) s'annule. Exprimer *b* en fonction de *u* et de *a*.

  Réécrire le champ de vitesse en fonction de u, a, r et θ .

- **II.2.8**

  On s'intéresse désormais à la région de l'espace $r \geq a$, extérieure à la sphère de rayon *a*, et on souhaite représenter sur un schéma l'allure du champ de vitesse dans le demi-plan défini par $\varphi = 0$ et $\theta \in [0, \pi]$.

  Reproduire et compléter le tableau de valeurs ci-dessous, pour une constante *u* égale à 1.

r	θ	v_r	v_θ	r	θ	v_r	v_θ
a	0			$2a$	0		
a	$\pi/4$			$2a$	$\pi/4$		
a	$\pi/2$			$2a$	$\pi/2$		
a	$3\pi/4$			$2a$	$3\pi/4$		
a	π			$2a$	π		

- **II.2.9**

  A l'aide des valeurs du tableau, représenter graphiquement le champ de vitesse pour $r \geq a$. Tracer l'allure de quelques lignes de courant.

- **II.2.10**

  On rappelle que dans le cas d'un écoulement potentiel, le terme de dérivée convective peut-être mis sous la forme:

$$\left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)$$

  Déduire de l'équation d'Euler pour un écoulement parfait potentiel stationnaire, en l'absence de pesanteur, l'existence d'une quantité $\mathcal{C}$ dépendant de $\vec{v}, \rho$ et P , et dont la valeur est uniforme dans l'espace.

  Quel nom donne-t-on à ce résultat?

  En faisant tendre *r* vers l'infini, et en faisant l'hypothèse que $\lim_{r\to\infty} P(r) = 0$, déterminer la constante $\mathcal{C}$.

- **II.2.11**

  En déduire la valeur de la surpression $P(r = a, \theta, \varphi)$ au voisinage de la sphère $r = a$.
  La sphère subit-elle de la part de l'écoulement une force de traînée, c'est-à-dire une force dirigée suivant $\vec{e}_z$? (répondre sans faire de calcul.)

II.3 Sphère en mouvement de translation dans un fluide visqueux: approche qualitative

Une sphère de rayon *a* en mouvement de translation à vitesse $\vec{u}$ dans un fluide de viscosité η, subit de la part de ce fluide une force de traînée $\vec{F}$ égale à $\vec{F} = -6\pi\eta a\vec{u}$, pourvu que cette vitesse de déplacement soit suffisamment faible (loi de Stokes).

- **II.3.1**

  Une bille de rayon *a* et de masse volumique ρ_b est lâchée sans vitesse initiale dans un fluide de viscosité η et de masse volumique ρ. La bille et le fluide sont soumis à l'influence de la pesanteur, dont l'accélération est notée $\vec{g}$. Etablir l'expression de la vitesse de la bille, fonction du temps, ainsi que la vitesse limite $\vec{u}_\infty$ atteinte par celle-ci, dans le cadre de la loi de Stokes.

- **II.3.2**

  Calculer la vitesse limite de chute associée respectivement à une gouttelette de brouillard (rayon $1\ \mu m$), puis a` une goutte de pluie (rayon $1\ mm$) dans l'air. Ce dernier résultat vous paraît-il réaliste?

- **II.3.3**

  Pour juger de la validité de la formule de Stokes, il faut calculer le nombre de Reynolds associé à l'écoulement du fluide autour de la bille. Proposer une expression du nombre de Reynolds $\mathcal{Re}$ associé au mouvement de chute d'une bille dans un fluide de viscosité η .

  A quelle condition peut-on considérer que la loi de Stokes est valable?
  Cela est-il le cas dans les exemples de la question précédente?
  Comment se comporte la force de traînée à grande vitesse?

II.4 Interactions hydrodynamiques dans un fluide visqueux

Les **interactions hydrodynamiques** sont des forces transmises par le fluide sur les objets qui s'y déplacent. Elles expliquent divers effets observés durant la **sédimentation** de petits objets (processus par lequel des particules dans un fluide au repos se déposent), comme la tendance de ceux-ci à tomber les uns à la verticale des autres, ou à tomber à une vitesse différente s'ils sont proches les uns des autres.

Lorsqu'une bille sphérique se déplace verticalement vers le bas à vitesse $\vec{u} = -u\,\vec{e}_z$, elle crée un déplacement du fluide autour d'elle, dont le champ de vitesse à grande distance et dans un repère de coordonnées sphériques dont l'origine est occupée par la particule, est donné par (forme d'Oseen):

$$\vec{v}(\vec{r}) = \frac{3au}{4r}\left[-2\cos\theta\ \vec{e}_r + \sin\theta\ \vec{e}_\theta\right]$$

(voir figure II.2 à gauche). L'expression ci-dessus, que l'on admettra, n'est valable que pour des distances *r* très supérieures au rayon *a* de la bille qui se déplace. Le champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r})$ représente la vitesse d'écoulement du fluide **dans le référentiel du laboratoire.**

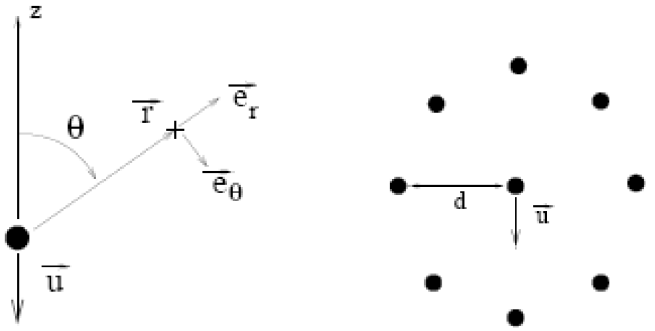


Figure II.2

- II.4.1

Reproduire et compléter le tableau de valeurs suivant, pour une valeur de la constante $(3au/4r)$ égale à 1 (où v_r et v_θ désignent respectivement les composantes radiales et orthoradiales du

champ des vitesses) :

θ	v_r	v_θ
0		
$\pi/4$		
$\pi/2$		
$3\pi/4$		
π		

- II.4.2

Neuf billes identiques occupent les positions de la figure II.2 à droite. Les huit billes extérieures sont à égale distance d de la bille centrale et immobiles par rapport au fluide. La bille centrale est animée d'un mouvement vertical, et d'une vitesse $\vec{u}$ dirigée vers le bas.

Reproduire la figure II.2 de droite sur la copie, puis dessiner l'allure des forces exercées par le déplacement de la bille centrale sur chacune des huit billes périphériques voisines, supposées immobiles, et causées par la nature visqueuse de l'écoulement.

- II.4.3

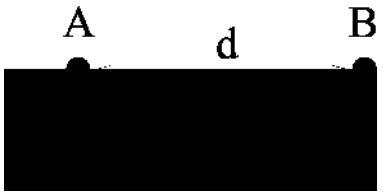


Figure II.3

Deux sphères identiques A et B soumises à leur poids et à la friction visqueuse du fluide descendent à la même vitesse $\vec{u}$ (figure II.3). On note $\vec{r}_A$ et $\vec{r}_B$ les positions respectives des sphères A et B, $\vec{r}_{AB}$ la séparation $\vec{r}_B - \vec{r}_A$ et d la distance $\|\vec{r}_{AB}\|$ .On suppose que le déplacement de la bille A crée au point B un champ de vitesse $\vec{v}(\vec{r}_{AB})$ par rapport au référentiel du laboratoire. La bille B subit donc de la part du fluide une force de friction de Stokes égale à:

$$\vec{F}_s = -6\pi\eta a\left[\vec{u} - \vec{v}\left(\vec{r}_{AB}\right)\right]$$

En faisant un bilan des forces exercées sur la bille B, déduire sa vitesse de descente $\vec{u}$ en fonction de sa masse m, de l'accélération de la pesanteur g , de la viscosité du fluide η et du rayon a.

En comparant avec le résultat obtenu en II.3.1, conclure sur le fait que deux billes proches sédimentent plus vite, moins vite ou aussi vite qu'une bille isolée.

Fin de l'énoncé