
	UNIVERSIDADES PÚBLICAS DE LA COMUNIDAD DE MADRID PRUEBA DE ACCESO A LA UNIVERSIDAD Curso **2024-2025** MATERIA: **MATEMÁTICAS II**	

INSTRUCCIONES GENERALES Y CALIFICACIÓN
Después de leer atentamente el examen, responda razonadamente a una pregunta en cada uno de los cuatro bloques, tres de ellos con optatividad y uno sin optatividad. Todas las respuestas deberán estar debidamente justificadas.

CALIFICACIÓN: Cada bloque se calificará sobre 2,5 puntos. TIEMPO: 90 minutos.

Bloque 1. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:
Pregunta 1.1. Sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales dependiente del parámetro real k:
$(k\ 1\ 1\ k+1\ 1\ -k\ 1\ k+1\ 0)(x\ y\ z) - (0\ k\ 2k) = (0\ 0\ 0)$. Se pide
a) (1,5 puntos) Discutir el sistema en función de los valores de k

Resolución

Trasponiendo podemos escribir el sistema así: $(k\ 1\ 1\ k+1\ 1\ -k\ 1\ k+1\ 0)(x\ y\ z) = (0\ k\ 2k)$

Las matrices de coeficientes y ampliada son $A = (k\ 1\ 1\ k+1\ 1\ -k\ 1\ k+1\ 0)$ y
$A^* = (k\ 1\ 1\ 0\ k+1\ 1\ -k\ k\ 1\ k+1\ 0\ 2k)$

det A $= -k + k^2 + 2k + 1 - 1 + k^3 + k^2 = k^3 + 2k^2 + k = k(k^2 + 2k + 1) = k(k+1)^2 = 0 \Leftrightarrow k = 0, k = -1$

– Si $k \neq 0$, $k \neq -1$, det A $\neq 0$ y rg A $= 3 =$ rg A* $=$ nº de incógnitas. Luego, por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible determinado, tiene solución única.

– Si $k = 0$, det A $= 0$ y $A = (0\ 1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0)$. Como $|1\ 1\ 1\ 0| = -1 \neq 0$, rg A $= 2$.

$A^* = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)\ \ f3 = f2\ (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$. Como $|1\ 1\ 1\ 0| = -1 \neq 0$, rg A* $= 2$.
Luego, rg A* $=$ rg A $= 2 <$ nº de incógnitas. Por el teorema de Rouché-Fröbenius el sistema es compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones.

– Si $k = -1$,

$A^* = (-1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1\ 1\ -1\ 1\ 0\ 0\ -2)f1 + f3\quad (0\ 1\ 1\ -2\ 0\ 1\ 1\ -1\ 1\ 0\ 0\ -2)f2 - f1\quad (0\ 0\ 0\ 1\ 0\ 1\ 1$

La 1ª fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, que es incompatible. Luego, el sistema es incompatible.

b) (1 punto) Resolver el sistema para $k = 0$.

Resolución

Sabemos que para $k = 0$ hay infinitas soluciones y $A^* = (0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0)$ que corresponde al sistema
$\{y + z = 0\ x + y = 0$; $y = -z$; $x = -y = z$. Llamando $z = k$, las infinitas soluciones son $\{x = k\ y = -k\ z = k$, $k \in$ R.

Pregunta 1.2. Dada la matriz $A = (1\ 5\ -1\ -3)$, se pide.
a) (1,5 puntos) Hallar las matrices simétricas B que verifiquen $BA = (A + A^2)B$.

Resolución

Si la matriz simétrica es $B = (x\ z\ z\ y)$, con x, y, z ∈ R. Sustituyendo

$(x\ z\ z\ y)(1\ 5\ -1\ -3) = [(1\ 5\ -1\ -3) + (1\ 5\ -1\ -3)(1\ 5\ -1\ -3)](x\ z\ z\ y)$

Operando, $(x - z\ 5x - 3z\ z - y\ 5z - 3y) = [(1\ 5\ -1\ -3) + (-4\ -10\ 2\ 4)](x\ z\ z\ y)$

queda
$(x \ - \ z \ 5x \ - \ 3z \ z \ - \ y \ 5z \ - \ 3y\ ) = (- \ 3 \ \ - \ 5\ 1\ 1\ )(x\ z\ z\ y\ ) \Rightarrow (x \ - \ z \ 5x \ - \ 3z \ z \ - \ y \ 5z \ - \ 3y\ ) = (- \ 3x \ - \ 5$

Igualando, elementos,
$\{x \ - \ z \ =- \ 3x \ - \ 5z \ 5x \ - \ 3z \ =- \ 3z \ - \ 5y \ z \ - \ y \ = \ x \ + \ z \ 5z \ - \ 3y \ = \ z \ + \ y \ \Rightarrow \{4x \ + \ 4z \ = \ 0 \Rightarrow z \ =- \ x \ 5x$
. Luego, $B \ = (x \ \ - \ x \ \ - \ x \ \ - \ x\ )$

b) (1 punto) Con la matriz $A_1 \ = \ A$, se consideran las matrices
$A_2 = A_1^2 + A_1$, $A_3 = A_2^2 + A_2$, $A_4 = A_3^2 + A_3$ y así sucesivamente. Hallar A_{2025}

Resolución

$A_2 = (1\ 5 \ \ - \ 1 \ \ - \ 3\ )(1\ 5 \ \ - \ 1 \ \ - \ 3\ ) + (1\ 5 \ \ - \ 1 \ \ - \ 3\ ) = (- \ 4 \ \ - \ 10\ 2\ 4\ ) + (1\ 5 \ \ - \ 1 \ \ - \ 3\ ) = (- \ 3 \ \ - \ 5$

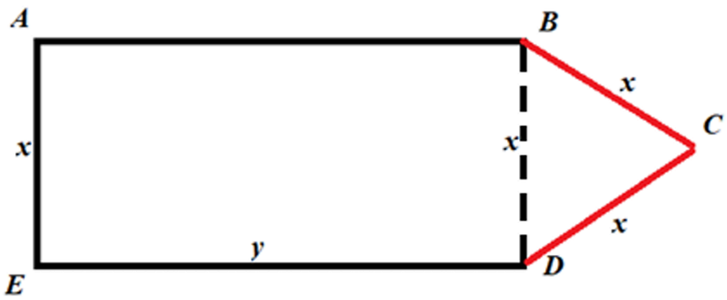
$A_3 = (- \ 3 \ \ - \ 5\ 1\ 1\ )(- \ 3 \ \ - \ 5\ 1\ 1\ ) + (- \ 3 \ \ - \ 5\ 1\ 1\ ) = (4\ 10 \ \ - \ 2 \ \ - \ 4\ ) + (- \ 3 \ \ - \ 5\ 1\ 1\ ) = (1\ 5 \ \ - \ 1 \ \ -$

$A_4 = A_3^2 + A_3 = A_1^2 + A_1 = A_2$. Luego, si n es impar $A_n = A_1$ y si n es par $A_n = A_2$

Por tanto, $A_{2025} = A_1 = A = (1\ 5 \ \ - \ 1 \ \ - \ 3\ )$

Bloque 2. (Calificación: 2,5 puntos) Responda a la pregunta siguiente:
Pregunta 2. Un agricultor dispone de 120 metros de valla para delimitar una parcela con forma de pentágono. Los vértices del pentágono se nombrarán consecutivamente como A, B, C, D y E.
Se sabe que A, B, D y E forman un rectángulo, y que el punto C se encuentra en el exterior de este rectángulo, formando un triángulo equilátero con los puntos B y D. ¿A qué distancia del vértice A el agricultor debe ubicar los vértices B y E si quiere que la parcela tenga la mayor área posible?

Resolución



Como el perímetro es 120, entonces 3x + 2y = 120, $y = \frac{120-3x}{2}$

La función a maximizar es

$Área = A(rectángulo) + A(triángulo) = xy + \frac{x^2\sqrt{3}}{4} = x\frac{120-3x}{2} + \frac{x^2\sqrt{3}}{4}$

Operando y simplificando, la función a maximizar es $A(x) = \frac{240x + x^2(\sqrt{3}-6)}{4}$

$A'(x) = \frac{240 + 2(\sqrt{3}-6)x}{4} = \frac{120 + (\sqrt{3}-6)x}{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{120}{6-\sqrt{3}}$

$A''(x) = \frac{\sqrt{3}-6}{2}$; $A''\left(\frac{120}{6-\sqrt{3}}\right) = \frac{\sqrt{3}-6}{2} < 0$

Luego, el área máxima es para $x = \frac{120}{6-\sqrt{3}} \cong 28,12$, $y = \frac{120 - 3\frac{120}{6-\sqrt{3}}}{2} = 60 - \frac{180}{6-\sqrt{3}} \cong 17,83$

El área de la parcela es máxima cuando situamos el punto B aproximadamente a17,83 m de A y el punto E a 28,12 metros de A.

Bloque 3. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:
Pregunta 3.1. Sean los puntos A(1, 1, 2), B(2, −1, 0), C(−2, 0, 3) y D(2, −3, −1) y la recta: $r: \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{-1}$

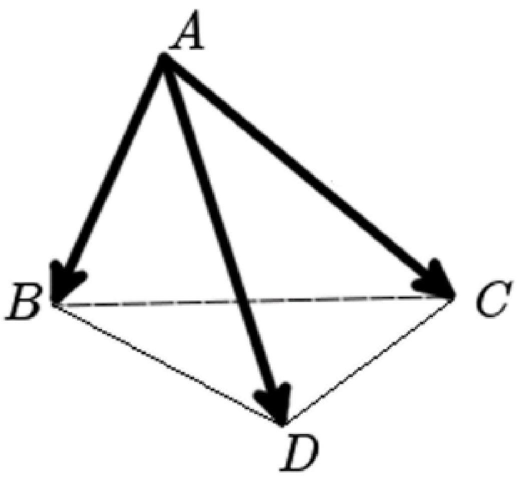
a) (0,5 puntos) Compruebe que los puntos no son coplanarios y calcule el volumen del tetraedro determinado por ellos.

Resolución

Veamos si los puntos son coplanarios.

$\det det \left(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right) = \det det \left(1 \; -2 \; -2 \; -3 \; -1 \; 1 \; 1 \; -4 \; -3 \right) = 3 - 2 - 24 - 2 + 18 + 4 =$

⇒ no son coplanarios.



$V_{tetraedro} = \frac{1}{6} V_{paralelepípedo}\left(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right) = \frac{1}{6} \left| \det det \left(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right) \right| = \frac{1}{6} |-3| = \frac{1}{2} = 0,5 \; u^3$

b) (1 punto) Calcule el área de la cara del tetraedro ABCD determinada por los puntos A, B y C y la longitud de la altura del tetraedro que parte del vértice D.

Resolución

La cara ABC es un triángulo. Sabemos que el área del triángulo es la mitad del área del paralelogramo generado por los vectores $\vec{AB} = (1, \; -2, \; -2)$ y $\vec{AC} = (-3, \; -1, \; 1)$.

O sea, $A(triángulo) = \frac{1}{2} \left| \vec{AB} \; x \; \vec{AC} \right|$;

$\vec{AB} \; x \; \vec{AC} = \left| \vec{i} \; \vec{j} \; \vec{k} \; 1 \; -2 \; -2 \; -3 \; -1 \; 1 \right| = (-4, \; 5, \; -7)$

El área de la cara ABC es $A(triángulo) = \frac{1}{2} |(-4, \; 5, \; -7)| = \frac{1}{2}\sqrt{90} = \frac{1}{2} 3\sqrt{10} = \frac{3}{2}\sqrt{10} \cong 4,74 \; u^2$

La altura del tetraedro es $h = \frac{V_{paralelepípedo}}{A_{base \; ABC}} = \frac{\left| \det det \left(\vec{AB}, \vec{AC}, \vec{AD} \right) \right|}{\left| \vec{AB} \; x \; \vec{AC} \right|} = \frac{3}{3\sqrt{10}} = \frac{\sqrt{10}}{10} \cong 0,32 \; u$

c) (1 punto) Calcule la distancia entre la recta r y la recta determinada por los puntos B y D.

Resolución

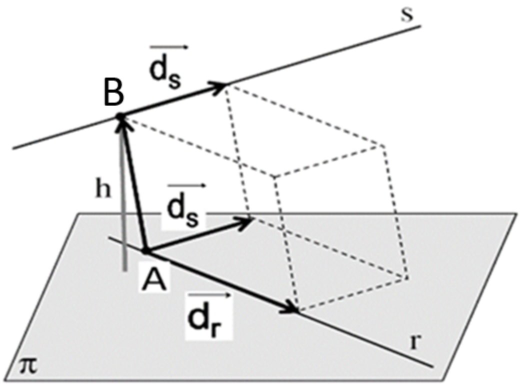
Sabemos que $r: \frac{x-1}{2} = y + 1 = \frac{z}{-1}$, B(2, −1, 0), D(2, −3, −1) y sea s la recta determinada por B y D

A(1, −1, 0) ∈ r y un vector director de r es $\vec{d}_r = (2, \; 1, \; -1)$

B(2, −1, 0) ∈ s y un vector director de s es $\vec{d_s} = \vec{DB} = (0,\ 2,\ 1)$

det $det\left(\vec{AB},\ \vec{d_r},\ \vec{d_s}\right) =$ det $det\ (1\ 0\ 0\ 2\ 1\ -\ 1\ 0\ 2\ 1\ ) = 3\neq0$. Luego, los vectores son l.i. y las rectas se cruzan.

Hallemos la distancia entre ambas: Podemos hallarla usando la fórmula de la altura del paralelepípedo,



$$V_{paralel} = A_{base}.\ h \Rightarrow h = dist(r,\ s) = \frac{V_{paralel}}{A_{base}} = \frac{\left|det\left(\vec{AB},\ \vec{d_r},\ \vec{d_s}\right)\right|}{\left|\vec{d_r}\ x\ \vec{d_s}\right|}$$

$\vec{d_r}\ x\ \vec{d_s} = (2,\ 1,\ -\ 1)\ x\ (0,\ 2,\ 1) = \left|\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ 2\ 1\ -\ 1\ 0\ 2\ 1\right| = (3,\ -\ 2,\ 4)\ ;$
$dist(r,\ s) = \frac{|3|}{\sqrt{29}} = \frac{3\sqrt{29}}{29} \cong 0,557\ u$

Pregunta 3.2. Dados los puntos A(0, 0, 1) y B(1, 0, 1), se pide:
a) (1 punto) Hallar una ecuación del plano paralelo al eje OZ y que pasa por los puntos A y B.

Resolución

Al ser $\vec{w} = (0,\ 0,\ 1)$ // OZ y el vector $\vec{AB} = (1,\ 0,\ 0)$, vectores directores del plano α que piden, un vector normal de α es $\vec{n_\alpha} = \vec{w}\ x\ \vec{AB} = \left|\vec{i}\ \vec{j}\ \vec{k}\ 0\ 0\ 1\ 1\ 0\ 0\right| = (0,\ 1,\ 0)$

Como α pasa por A(0, 0, 1), entonces α: 0(x – 0) + 1(y – 0) + 0(z – 1) = 0 ; α: y = 0

b) (1,5 puntos) Hallar una ecuación de una recta perpendicular al plano z = 1 que diste una unidad tanto del punto A como del punto B.

Resolución

s es la recta que se pide, C es el punto de corte de s con el plano π: z = 1, A, B ∈ π , $\vec{d_s} = (0,\ 0,\ 1)$
Entonces C(a, b, 1) y, por tanto, $s: \{x = a\ y = b\ z = 1 + k$

1 = dist(A, s) = $\left|\vec{AC}\right| = |(a,\ b,\ 0)| = \sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1$

1 = dist(B, s) =
$\left|\vec{BC}\right| = |(a - 1,\ b,\ 0)| = \sqrt{(a-1)^2 + b^2} \Rightarrow a^2 - 2a + 1 + b^2 = 1 \Rightarrow a^2 - 2a + b^2 = 0$

Queda el sistema, $\{a^2 + b^2 = 1\ a^2 - 2a + b^2 = 0$; restando las ecuaciones, 2a = 1, $a = \frac{1}{2}$

Sustituyendo $\frac{1}{4} + b^2 = 1 \Rightarrow b^2 = \frac{3}{4} \Rightarrow b = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$. Hay dos soluciones:

$s_1: \{x = \frac{1}{2}\ y = \frac{\sqrt{3}}{2}\ z = 1 + k$, $s_2: \{x = \frac{1}{2}\ y = \frac{-\sqrt{3}}{2}\ z = 1 + k$

Bloque 4. (Calificación máxima: 2,5 puntos) Responda a una de las dos preguntas siguientes:
Pregunta 4.1. En base a un estudio de los datos antropométricos de la población laboral española en hombres se considera que la masa, en kilogramos, de un individuo de esta población es una variable normal de media 75,67 y desviación típica 11,05. Se pide:
a) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa entre 60 y 80 kilogramos.
b) (0,75 puntos) Calcular la probabilidad de que un hombre de esta población elegido al azar tenga masa superior a 100 kilogramos.
c) (1 punto) Elegidos diez hombres distintos al azar en esta población calcular la probabilidad de que no más de uno supere los 100 kilogramos.

Resolución

X = masa, en kg $\rightarrow N(75,67\ ;\ 11,05)$. Tipificando, $Z = \frac{X - 75,67}{11,05} \rightarrow N(0,\ 1)$

a) Piden $p(60 < X < 80) = p\left(\frac{60 - 75,67}{11,05} < \frac{X - 75,67}{11,05} < \frac{80 - 75,67}{11,05}\right) \cong p(-1,42 < Z < 0,39) =$

$= p(Z < 0,39) - p(Z > 1,42) = p(Z < 0,39) - [1 - p(Z \leq 1,42)] = 0,6517 - 1 + 0,9222 = 57,39\%$

b) Ahora nos piden $p(X > 100) = p\left(\frac{X - 75,67}{11,05} > \frac{100 - 75,67}{11,05}\right) = p(Z > 2,2) = 1 - p(Z \leq 2,2) =$

$= 1 - 0,9861 = 0,0139 = 1,39\%$

c) Realizamos 10 veces el experimento aleatorio de elegir al azar un hombre y ver si supera los 100 kg y la probabilidad de que los supere es 0,0139, entonces la variable aleatoria Y = “nº de hombres que superan los 100 kg” → B(10 ; 0,0139)

La ley de probabilidad es $p_k = p(Y = k) = \binom{10}{k} 0,0139^k\, 0,9861^{10-k}$, con k = 0, 1, 2, 3, ..., 9, 10.

Se pide $p(Y \leq 1) = p(Y = 0) + p(Y = 1) = \binom{10}{0} 0,0139^0\, 0,9861^{10} + \binom{10}{1} 0,0139^1\, 0,9861^9 =$

$= 1.1.0,9861^{10} + 10.0,0139.0,9861^9 \cong 0,9919 = 99,19\%$

Pregunta 4.2. La probabilidad de que un corredor sufra una caída en un día con lluvia es de 0,08 y en un día seco es de 0,004. La probabilidad de que llueva y se caiga es de 0,032. Hoy un corredor ha salido.
Se pide:
a) (1,25 puntos) Calcular la probabilidad de que vuelva a casa sin haberse caído.
b) (1,25 puntos) Hallar la probabilidad de que, sabiendo que se ha caído, no esté lloviendo.

Resolución

A = "caerse" B = "llover". Según el enunciado, $p(A/B) = 0{,}08$ $p(A/B^c) = 0{,}004$ $p(A \cap B) = 0{,}032$

Como, $p\left(\frac{A}{B}\right) = \frac{p(A \cap B)}{p(B)} \Rightarrow p(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A/B)} = \frac{0{,}032}{0{,}08} = 0{,}4$; se deduce que $p(B^c) = 1 - p(B) = 1 - 0{,}4 = 0{,}6$

a) Se pide $p(A^c)$. Según el teorema de probabilidad total, es $p(A) = p(B)p(A/B) + p(B^c)p(A/B^c) =$

$= 0{,}4 \,.\, 0{,}08 + 0{,}6 \,.\, 0{,}004 = 0{,}0344$. La probabilidad es $p(A^c) = 1 - p(A) = 1 - 0{,}0344 = 0{,}9656 = 96{,}56\%$

b) Nos piden $p\left(\frac{B^c}{A}\right) = \frac{p(A \cap B^c)}{p(A)} = \frac{p(B^c)\, p(A/B^c)}{p(A)} = \frac{0{,}6 \,.\, 0{,}004}{0{,}0344} \cong 0{,}0698 = 6{,}98\%$