

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

10 КЛАСС

1 вариант

Задание 1

Решите уравнение:

$$\sqrt{(x+1)^2} + 2\sqrt{x^2 + 4x + 4} = |10 + x| - |5 - 2x|.$$

Решение: Корни в левой части уравнения можно раскрыть как модули $(x^2 + 4x + 4 = (x + 2)^2)$ и свести к совокупности систем уравнений.

Ответ: $[-1; 2,5]$.

Задание 2

В треугольнике ABC с углом A , равным 60° , проведена биссектриса AD . Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите длину OB , если $AB = 0.5$. В ответе укажите OB^2 .

Решение: Можно показать, что треугольник ODC — равносторонний. Если ввести следующие обозначения: $AD = l$, $BD = x$, $AC = z$, то справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{2z} = \frac{3x}{\sqrt{3}}, l = \frac{\sqrt{3}z}{2z+1}.$$

$l^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$ по свойству биссектрисы, следовательно $l^2 = 0,5z - \sqrt{3}x/3$. После этого, задачу можно свести к системе уравнений, относительно x, l, z .

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

Ответ: $\frac{7}{12}$.

Задание 3

Найдите наибольшее возможное значение параметра b , при котором неравенство $2b + b^2 - 2b \sin x > \cos^2 x + 2$ не выполняется при каком-либо значении x . В качестве ответа введите квадрат найденного значения b .

Решение: Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, свести данное уравнение к квадратному относительно $\sin x$, сделать замену $\sin x = t$. Для t действует соответствующее ограничение на значения: $-1 \leq t \leq 1$. Тогда получаем, что неравенство выполняется при любых x , если $b \in (-\infty; -2 - \sqrt{6}) \cup (\sqrt{2}; +\infty)$.

Ответ: 2.

найдите наибольшее возможное значение параметра b , при котором неравенство ... не выполняется при каком-либо значении x . В ответе укажите квадрат этого значения" (тогда ввести нужно 2).

Задание 4

Найдите все целые решения системы уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 46 \end{cases}$$
.

Решение: Можно свести систему к виду:
$$\begin{cases} x + y + z = 4 \\ (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 18 \end{cases}$$

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

Рассмотрев второе уравнение, преобразуем его к виду:

$$\left((x+y+z)^3 - x^3\right) - (y^3 + z^3) = 18.$$

Проведя преобразования при помощи формул

суммы и разности кубов, получим уравнение $(y+z)(x+y)(x+z) = 6$.

Ответ: (3, 3, -2), (3, -2, 3), (-2, 3, 3).

Задание 5

Дан квадрат размером 35×35 клеток. Какое минимальное количество клеток нужно закрасить, чтобы четырех клеток, образующих «Г», обязательно была хотя бы одна закрашенная?

Решение: закрашивать надо по диагонали каждую 3-ю клетку, между диагоналями должен быть промежуток в две не закрашенные клетки. Таким образом, будет закрашено $N^2/3$ клеток, где N — сторона квадрата. Можно показать, что это минимально возможное количество, так как внутри любого квадрата 3×3 нужно закрашивать не менее трех клеток.

Ответ: 408.

Задание 6

Пусть число вхождений заданного символа в текст составляет от 10,5% до 11% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение: пусть символ встречается в тексте x раз. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L , для

которого существует такое натуральное число x , что $\frac{10,5}{100} < \frac{x}{L} < \frac{11}{100}$. Чем

меньше x , тем меньше соответствующее L . При $x = 1$ не существует

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

удовлетворяющего неравенству натурального L . При $x = 2$ находим, решая

неравенство, что $L = 19$. Из неравенства $L \geq \frac{100x}{11}$ следует, что $L > 19$ при $x \geq$

3.

Ответ: 19.

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

10 КЛАСС

2 вариант

Задание 1

Решите уравнение:

$$\sqrt{3x^2 + 6x + 4} - \sqrt{2x^2 + 3x + 5} = \sqrt{3x^2 + 4x + 1} - \sqrt{2x^2 + 5x + 8}.$$

Решение: сгруппировать корни из данных квадратных трехчленов так, чтобы при домножении и делении на сопряженные, сократились квадраты x .

Ответ: -1,5.

Задание 2

В треугольнике ABC с углом A , равным 60° , проведена биссектриса AD . Радиус описанной около треугольника ADC окружности с центром в точке O равен $\frac{\sqrt{3}}{3}$. Найдите длину отрезка OM , где M — точка пересечения отрезков AD и BO , если $AB = 1,5$. В качестве ответа укажите OM^2 .

Решение: Можно показать, что треугольник ODC — равносторонний. Если ввести следующие обозначения: $AD = l$, $BD = x$, $AC = z$, то справедливы следующие соотношения:

$$\frac{1}{2z} = \frac{3x}{\sqrt{3}}, l = \frac{\sqrt{3}z}{2z+1}.$$

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

$l^2 = AB \cdot AC - BD \cdot DC$ по свойству биссектрисы, следовательно

$l^2 = 1,5z - \sqrt{3}x/3$. После этого, задачу можно свести к системе уравнений,

относительно x, l, z .

Ответ: 1,44.

Задание 3

Найдите все значения параметра a , при которых уравнение

$(a+2)x^2 + (|a+3| - |a+1|)x + a = 4$ имеет два различных положительных корня.

В качестве ответа укажите целое значение a внутри интервала таких значений.

Решение: при $a = -2$, уравнение становится линейным уравнением, что не удовлетворяет условию задачи. При $a \neq -2$, необходимо и достаточно,

чтобы выполнялась система:
$$\begin{cases} D > 0 \\ -\frac{b}{c} > 0 \\ \frac{c}{a} > 0 \end{cases}$$
.

Воспользовавшись основным тригонометрическим тождеством, свести данное уравнение к квадратному относительно $\sin x$, сделать замену $\sin x = t$. Для t действует соответствующее ограничение на значения: $-1 \leq t \leq 1$. Таким образом, $a \in (4, 6)$.

Ответ: 5.

Задание 4

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

Найдите все целые решения системы уравнений
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 3 \end{cases}.$$

Решение: Можем свести систему к виду:
$$\begin{cases} x + y + z = 3 \\ (x + y + z)^3 - x^3 - y^3 - z^3 = 24 \end{cases}.$$

Рассмотрев второе уравнение, воспользоваться формулами суммы кубов и разности кубов, преобразовав его предварительно к виду:

$$\left((x + y + z)^3 - x^3\right) - (y^3 + z^3) = 24.$$

Проведя преобразования, получить уравнение

$$(y + z)(x + y)(x + z) = 8.$$

Ответ: (4, 4, -5), (4, -5, 4), (1, 1, 1), (-5, 4, 4).

Задание 5

Дан квадрат размером 35×35 клеток. Какое минимальное количество клеток нужно закрасить, чтобы из любой не закрашенной клетки нельзя было попасть в не закрашенную ходом шахматного коня?

Решение: закрашивать необходимо в шахматном порядке, поскольку любой ход коня на шахматной доске приходится на клетку другого цвета. Число закрашенных клеток у шахматной доски с длиной стороны в N клеток равно $N^2/2$.

«Ходом коня» можно обойти любую квадратную таблицу большую, чем 4×4 так, чтобы конь побывал на каждой ее клетки ровно один раз. Если пронумеровать эти ходы, то нетрудно заметить, что меньше $N^2/2$ клеток окрасить нельзя потому, что тогда в этой последовательности обязательно

**МОСКОВСКАЯ ПРЕДПРОФЕССИОНАЛЬНАЯ
ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ
МАТЕМАТИКА. ОТБОРОЧНЫЙ ЭТАП**

найдутся две подряд неокрашенные, т.е. будет возможен ход с одной из них на другую. Таблицу 35×35 нужно разбить на 49 таблиц 5×5 , а нумеровать поочередно, начиная с первой таблицы 5×5 .

Ответ: 612.

Задание 6

Пусть число вхождений заданного символа в текст составляет от 11,5% до 12% длины текста (под длиной текста понимаем общее количество символов в тексте). Найдите минимально возможную длину текста.

Решение: пусть символ встречается в тексте x раз. Задачу можно переформулировать так: найдите наименьшее натуральное число L , для

которого существует такое натуральное число x , что $\frac{11,5}{100} < \frac{x}{L} < \frac{12}{100}$. Чем

меньше x , тем меньше соответствующее L . При $x = 1$ не существует удовлетворяющего неравенству натурального L . При $x = 2$ находим, решая

неравенство, что $L = 17$. Из неравенства $L \geq \frac{100x}{12}$ следует, что $L > 17$ при $x \geq 3$.

Ответ: 17.