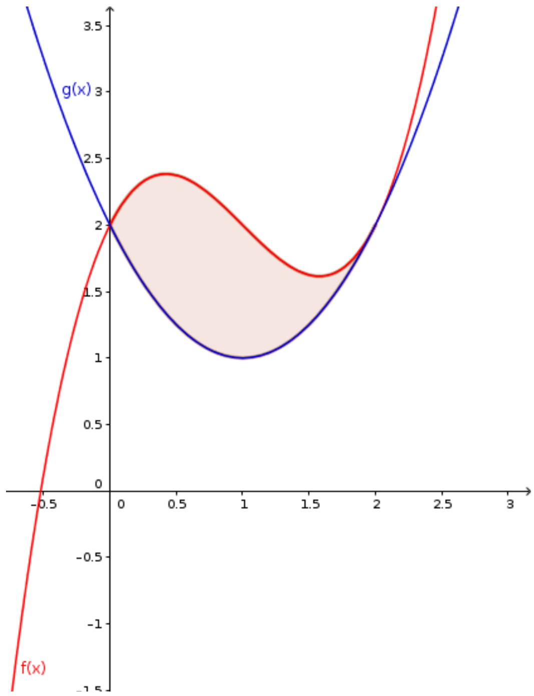
Vogliamo ora calcolare l'area compresa tra due funzioni.
Chiamiamo f(x) la funzione che delimita il bordo inferiore e g(x) quella relativa al bordo superiore.
Dobbiamo ora calcolare i punti di intersezione tra te due funzioni (chiamiamoli a e b) e utilizzarli come estremi di integrazione.
Pertanto l'area compresa tra le due funzioni avrà il valore:

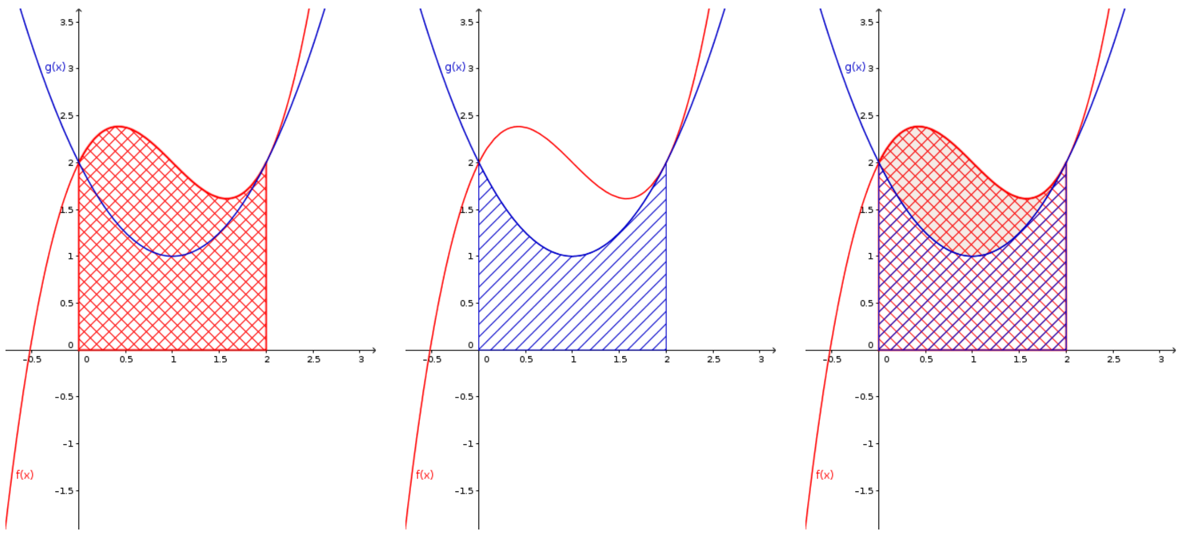
$$\int_a^b f(x)dx \; - \int_a^b g(x)dx$$

o equivalentemente

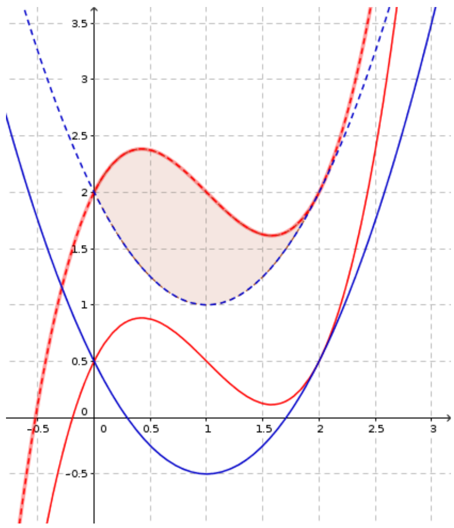
$$\int_a^b (f(x) - g(x)) \, dx$$



Si osservi la sequenza delle immagini qua sotto in cui compaiono l'area sotto f(x), l'area sotto g(x) e la loro differenza, che è l'area che cerchiamo



Si noti che in questo esempio le due funzioni sono positive nell'intervallo di integrazione [a,b].
Se le due funzioni fossero in parte positive o nulle e in parte negative, attraverso una traslazione verticale, potremmo spostare il grafico in modo che siano entrambe positive.
La traslazione non modifica l'area pertanto utilizzeremo le funzioni f(x)+k e g(x)+k, positive, al posto di f(x) e g(x).
Dunque possiamo scrivere che l'area è data da:

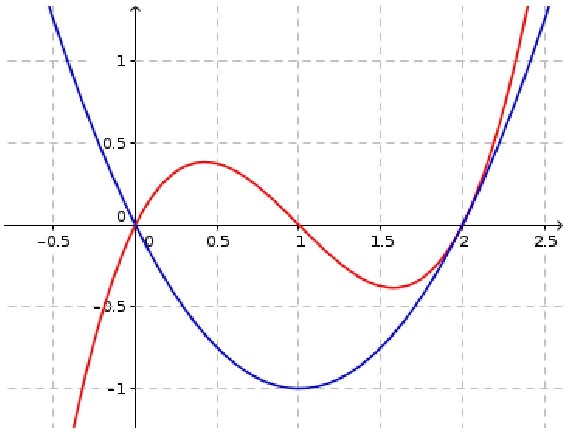


$$\int_a^b (f(x) + k)\,dx - \int_a^b (g(x) + k)\,dx = \int_a^b (f(x) + k - g(x) - k)\,dx$$

Si può dunque utilizzare la formula $\int_a^b (f(x) - g(x))\,dx$in qualunque posizione si trovino i grafici.

<u>Esempio</u>

Calcolare l'area della regione di piano compresa tra le funzioni $y=x^2-2x$ e $y=x^3-3x^2+2x$.



Disegniamo le funzioni e calcoliamo le loro intersezioni.

$$\begin{cases} y = x^2 - 2x \\ y = x^3 - 3x^2 + 2x \end{cases}$$

Usando il metodo del confronto:

$x^2-2x = x^3-3x^2+2x$

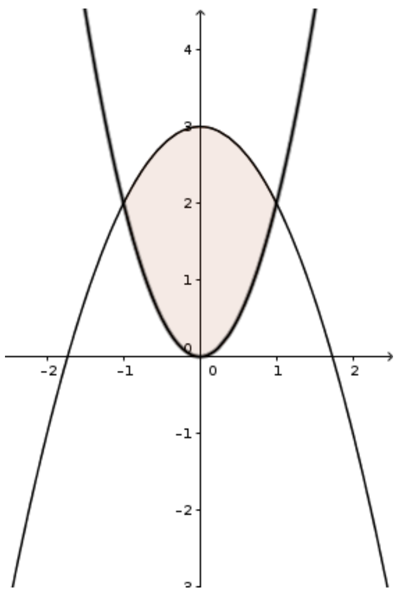
$x^3-4x^2+4x=0$

una soluzione è $x=0$ e ci sono altre due soluzioni che si ottengono calcolando le soluzioni di $x^2-4x+4=0$. Questa equazione di secondo grado ha soluzione doppia $x=2$.

Perciò l'area si calcola con

$$\int_0^2 [x^3 - 3x^2 + 2x - (x^2 - 2x)]dx = ([x^3 - 4x^2 + 4x)dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{4}{3}x^3 + 2x^2\right]_0^2 = 4 - \frac{32}{3} + 8 = \frac{4}{3}$$

<u>Esempio</u>



Calcolare l'area compresa tra le funzioni $y=2x^2$ e $y=3-x^2$

Si tratta di due parabole: la prima ha vertice nell'origine, e concavità verso l'alto; la seconda ha vertice in (0;3), e concavità verso il basso.

Per trovare i punti comuni tra le due curve si deve risolvere il sistema

$$\begin{cases} y = 2x^2 \\ y = 3 - x^2 \end{cases}$$

eliminando la y si ha subito un'equazione di secondo grado:

$2x^2 = 3 - x^2$

$3x^2 - 3 = 0$

Questa equazione si può risolvere scomponendo il polinomio a primo membro:

$3(x-1)(x+1) = 0$

Dunque l'equazione ha due soluzioni, x = -1 e x = 1 come è evidente anche dal disegno.

I due punti di intersezione sono A(-1;2) e B(+1;2).

Per calcolare l'area della regione di piano delimitata dalle due curve occorre calcolare l'integrale definito tra -1 e 1 della differenza tra la parabola superiore ($y=3-x^2$) e quella inferiore ($y=2x^2$):

$$\int_{-1}^{1}(3-x^2-2x^2)\,dx=\int_{-1}^{1}(3-3x^2)\,dx=\Big[3x-x^3\Big]_{-1}^{1}=(3-1)-(-3+1)=2+2=4$$

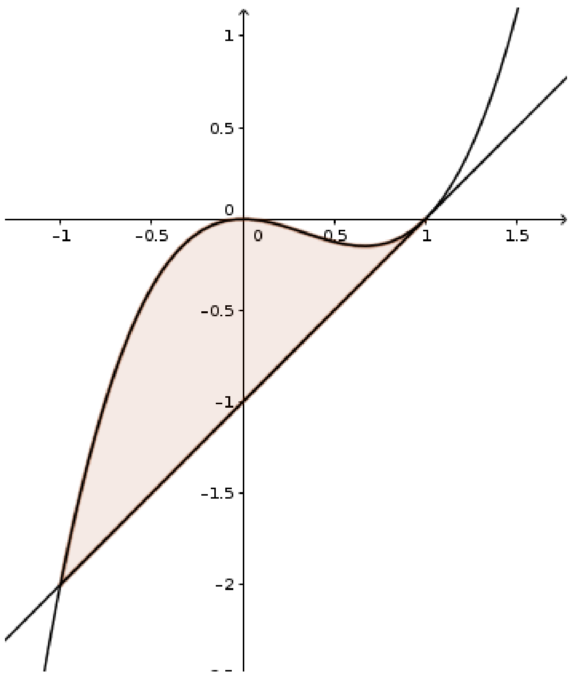
L’area tra le due curve vale quindi 4.
Osservando il grafico, si nota che entrambe le funzioni sono pari. pertanto per simmetria avremmo potuto calcolare l’integrale tra 0 e 1 e poi raddoppiare il valore trovato.

<u>Esempio</u>

Calcolare l'area compresa tra le seguenti funzioni: $y=x^3-x^2$ e $y=x-1$
Si tratta di una cubica e di una retta. La cubica può scriversi anche come $y=x^2(x-1)$ e quindi ha due zeri, uno doppio (tangente all'asse delle x) $x = 0$ e uno semplice $x = +1$.
Per trovare i punti comuni tra le due curve si deve risolvere il sistema; eliminando la y si ha subito un'equazione algebrica di terzo grado:

$x^3-x^2=x-1$

$x^3-x^2-x+1=0$



Questa equazione si può risolvere in diversi modi; per esempio scomponendo a fattor parziale il polinomio a primo membro:

$x^2(x-1)-(x-1)=0$

$(x^2-1)(x-1)=0$

$(x-1)(x+1)(x-1)=0$

$(x+1)(x-1)^2=0$

Altra possibilità: avendo riconosciuto che il polinomio si annulla per $x = 1$, dividerlo, in base al teorema di Ruffini, per $(x - 1)$
ottenendo un polinomio (e quindi un'equazione) di secondo grado.
Dunque l'equazione ha due soluzioni, una semplice $x = -1$ e una doppia $x = 1$. Questo vuole dire che per $x = 1$ le due curve hanno non solo lo stesso valore ma anche la stessa pendenza (derivata prima); infatti la derivata della cubica è $3x^2 - 2x$ che per $x = 1$, vale $3-2=1$, che è anche il coefficiente angolare della retta.
Vi è quindi una sola regione di piano delimitata dalle due curve; per calcolarne l'area occorre calcolare l'integrale definito tra -1
e 1 della differenza tra la cubica e la retta:

$$\int_{-1}^{1}x^3-x^2-x+1\,dx=\left[\frac{x^4}{4}-\frac{x^3}{3}-\frac{x^2}{2}+x\right]_{-1}^{1}=\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1\right)-\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{3}-\frac{1}{2}-1\right)=-\frac{1}{3}+1-$$

L'area tra le due curve vale quindi $\frac{4}{3}$.

Esercizi

Determina l’area della regione finita di piano delimitata dalle due funzioni indicate

1. f(x)=sen(x) , g(x)=cos(x)
2. f(x)=sen(x) , $g(x)=x^2-\pi^2$
3. $f(x)=x^2-1$, $g(x)=-x^2-3x-1$
4. $f(x) = 1 - \frac{1}{2}x^2$, $g(x) = \frac{x^2}{1+x^2}$

Problemi

5. Determina l’area della regione di piano individuata dall’iperbole di equazione $y = \frac{4}{x}$ e dalla parabola $y=x^2-6x+9$
6. Determina l’area della regione finita di piano individuata dall’iperbole $y = \frac{1}{x}$ e dal ramo di parabola di equazione $y = \sqrt{x}$ e dalla retta x=4
7. Calcola l’area di ciascuna delle due regioni di piano individuate dalle funzioni $y=x^3$ e $y = \frac{1}{1+x^2}$.
8. Calcolare l’area della regione finita di piano individuata dalla curva di equazione $y = 1 + \sqrt{2x}$ e dalle rette di equazione 2x-2y-1=0 e x=0.
9. Calcolare l’area della regione finita di piano individuata dalla curva di equazione $y = \frac{x^2+2}{x}$ e dalla retta di equazione y=3.
10. Disegna le 4 parabole $y= x^2$, $y= -x^2$, $x= y^2$, $x= -y^2$. Calcola l’area di ciascun “petalo”