

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ
НАЦІОНАЛЬНИЙ УНІВЕРСИТЕТ «ОДЕСЬКА ПОЛІТЕХНІКА»

**КОНСПЕКТ ЛЕКЦІЙ
З ОПОРУ МАТЕРІАЛІВ**

для здобувачів вищої освіти за спеціальністю

192 – Будівництво та цивільна інженерія

ОДЕСА 2025

Конспект лекцій з опору матеріалів / О.М. Лимаренко, А.Ю. Бажанова – Одеса: національний університет «Одеська політехніка», 2025. – 56 с.
Освітня програма: «Проектування будівель та споруд».

Конспект лекцій розглянуто та затверджено **на засіданні кафедри динаміки та механічної інженерії** інституту цифрових технологій, дизайну та транспорту Національного університету «Одеська політехніка».

Протокол № 6 від 22 січня 2025 року.

Опір матеріалів – одна з перших інженерних дисциплін, яка займає важливе місце в програмі підготовки фахівців. Предметом вивчення цієї дисципліни є методи розрахунків на міцність, жорсткість та стійкість елементів інженерних конструкцій.

Без відповідних знань науки про опір матеріалів деформуванню та руйнуванню неможлива підготовка фахівців механічних, будівельних, енергетичних та інших спеціальностей, якщо їх діяльність буде пов'язана з проектуванням, виробництвом, експлуатацією та ремонтом будь-яких споруд, машин, апаратів, станків та пристроїв.

Серед нинішніх навчально-методичних видань з опору матеріалів, що охоплюють весь курс і рекомендовані для студентів технічних спеціальностей вузів, слід виділити базові підручники за редакцією Г.С. Писаренка різних років видання, а також підручник Гурняка Л.І., Корнілова О.О. Певне пізнавальне значення мають підручники інших авторів, які відрізняються оригінальним методичним викладенням матеріалу з різною глибиною освітлення розділів курсу, а також методичні матеріали кафедри динаміки машин та механічної інженерії Національного університету «Одеська політехніка».

Видання цього навчального посібника зумовлено необхідністю вдосконалити і узагальнити у відповідності з діючими програмами, учбовими графіками та вимогами часу розробки кафедри для здобувачів освіти. В цьому виданні теоретична частина наведена дуже коротко в об'ємі, необхідному для першого знайомства з основними положеннями лише тих тем курсу, з яких необхідно виконати розрахункові завдання. Для більш повного і детального засвоєння матеріалу цих тем в кожній роботі вказані посилання до базових підручників. Конспект лекцій може бути використаний здобувачами освіти під час підготовки до практичних занять, виконання розрахунково-графічних робіт, самостійного опрацювання матеріалу, а також підготовки до модульного контролю та підсумкового оцінювання.

Видання призначене для студентів закладів вищої освіти, які навчаються за освітньою програмою «Будівництво та цивільна інженерія», а також може бути корисним викладачам і всім, хто цікавиться питаннями теоретичної механіки.

МЕТА ТА ЗАВДАННЯ ДИСЦИПЛІНИ

Метою вивчення дисципліни «Опір матеріалів» є формування у здобувачів вищої освіти фундаментальних знань про загальні закони механіки матеріалів, міцності, жорсткості та стійкості, статичних та динамічних навантажень, а також набуття навичок застосування методів опору матеріалів для аналізу та розв'язання інженерних задач, що виникають у галузі будівництва та цивільної інженерії.

Основними завданнями дисципліни є:

- засвоєння основних понять, визначень і гіпотез опору матеріалів;
- вивчення умов рівноваги матеріальних тіл та механіки матеріалів;
- оволодіння методами розрахунку конструкцій;
- формування навичок побудови розрахункових схем та визначення силових взаємодій у механічних системах;
- набуття вмінь застосовувати аналітичні та графічні методи розв'язання задач статички, та динаміки;
- підготовка здобувачів освіти до подальшого вивчення інженерних дисциплін, зокрема, динаміки технічних систем, будівельної механіки, теорії споруд та інших спеціальних курсів.

Вивчення дисципліни сприяє формуванню інженерного мислення, розвитку аналітичних здібностей та здатності застосовувати теоретичні знання під час розв'язання практичних задач у професійній діяльності фахівця з будівництва та цивільної інженерії.

Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКСІОМИ СТАТИКИ

1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ ТА ПОЛОЖЕННЯ

1.1. Наука про опір матеріалів

Опір матеріалів – базова дисципліна інженерної підготовки фахівців машинобудівних, транспортних, енергетичних та інших спеціальностей вищих навчальних закладів. Вивчення курсу дає змогу оволодіти методами розрахунків елементів інженерних конструкцій на міцність, жорсткість та стійкість.

Міцність – здатність матеріалу конструкції, її частин та деталей витримувати певне навантаження не руйнуючись.

Жорсткість – здатність конструкції та її елементів протистояти деформуванню (змінюванню форми і розмірів в певних межах) під дією зовнішніх навантажень. При заданих навантаженнях деформації не повинні перевищувати певного значення, встановленого вимогами до конструкції.

Стійкість – здатність конструкції або її елементів зберігати певну початкову форму пружної рівноваги.

Надійність – це більш загальна характеристика об'єкта, що охоплює і міцність, і жорсткість, і довговічність, і інші показники, щоб конструкція безвідмовно виконувала свої функції в заданих умовах на протязі певного часу.

При цьому конструкція повинна бути **економічною**. Вимоги міцності та економічності конструкцій знаходяться в постійному протиріччі. Їх **діалектична єдність і боротьба** зумовлюють розвиток науки про опір матеріалів.

В курсі **теоретичної механіки** тіла приймаються абсолютно твердими. На відміну від цього **опір матеріалів** враховує **властивості деформування**, тобто **зміну геометричних розмірів і форми тіла**.

Деформація тіл відбувається внаслідок навантаження їх зовнішніми силами або зміни температури.

Пружність – властивість тіла відновлювати свої початкові розміри і форму при розвантажуванні.

Пластичність – властивість матеріалу сприймати значні залишкові деформації без руйнування.

Крихкість – схильність матеріалів до руйнування при незначних деформаціях.

Опір матеріалів – теоретико-експериментальна наука. Дослід – теорія – дослід – така діалектика розвитку науки про опір твердих тіл деформуванню і руйнуванню. Однак, наука опору матеріалів не вичерпує всіх питань механіки деформівних тіл. Цими питаннями займаються й інші суміжні дисципліни: будівельна механіка стержневих систем, теорія пружності та теорія пластичності. Основна ж роль в інженерному вирішенні задач міцності належить дисципліні „Опір матеріалів”.

В курсі „Опір матеріалів” приймається значна кількість припущень, спрощень та обмежень, які дають змогу вирішувати широке коло інженерних розрахунків на міцність, витривалість, жорсткість та стійкість конструктивних елементів, коли результати розрахунків добре узгоджуються з даними практичної їх перевірки.

1.2. Реальний об'єкт і його розрахункові схеми

В опорі матеріалів проведення розрахунку на міцність, жорсткість, стійкість реального об'єкта чи конструкції починають з вибору їх розрахункових схем.

Розрахункова схема – це реальний об'єкт, звільнений від несуттєвих особливостей. Для одного й того ж об'єкта може бути створена не одна розрахункова схема, що в першу чергу залежить від того, що вважати найбільш істотним в кожному конкретному випадку навантаження і умов роботи.

1.3. Схематизація (моделювання) конструктивних елементів

В розрахункових схемах усю різноманітність конструктивних елементів, що

застосовуються в спорудах і машинах, зведено до таких основних чотирьох форм:

1. **Стержень або брус** – тіло, в якого один розмір (довжина) значно перевищує два інших (поперечних) розміри. Прикладами є вали, осі, балки, труби, рейки, в тому числі елементи криволінійної форми (гвинтові пружини, гаки та елементи ланцюгів).

2. **Пластина** – тіло, в якого один розмір (товщина) значно менше за два інші. Пластинами можна вважати плоскі днища й кришки резервуарів, апаратів хімічних виробництв, плити перекриття тощо.

3. **Оболонка** – тіло, обмежене криволінійними поверхнями, які розташовані на близькій відстані одна від одної (стілки тонкостінних резервуарів, стінки котлів, куполи будівельних споруд, корпуси літаків, ракет, підводних човнів тощо).

4. **Масив (масивні тіла)** – тіла, в яких усі три розміри одного порядку. До них належать фундаменти споруд, підпірні стінки, основи потужних пресів і верстатів тощо.

1.4. Схематизація опорних закріплень конструкцій

При формуванні розрахункової схеми все різноманіття існуючих опорних закріплень схематизують у вигляді **трьох основних типів опор**:

1. *Шарнірно-рухома опора (можливі її зображення показані на рис.1.1,а).*

2. *Шарнірно-нерухома опора (рис.1.1,б).*

3. *Жорстке закріплення, або заземлення (рис.1.1,в).*

В **шарнірно-рухомій опорі** виникає одна опорна реакція R (рис.1.1,а), рівнозначна протидії одного опорного стержня. Така опора позбавляє опорний переріз одного ступеня вільності, тобто перешкоджає переміщенню в напрямку, перпендикулярному до опорної площини, але допускає переміщення паралельне цій площині і поворот опорного перерізу.

В **шарнірно-нерухомій опорі** виникають дві реакції R і H (рис.1.1,б). Тут неможливі переміщення по напрямках опорних стержнів, але допускається поворот опорного перерізу.

При **жорсткому закріпленні** виникають в загальному випадку навантаження вертикальна R і горизонтальна H реакції та опорний (реактивний) момент M (рис.1.1,в). При цьому опорний переріз має всі три в'язі, необхідні для його нерухомості в площині.

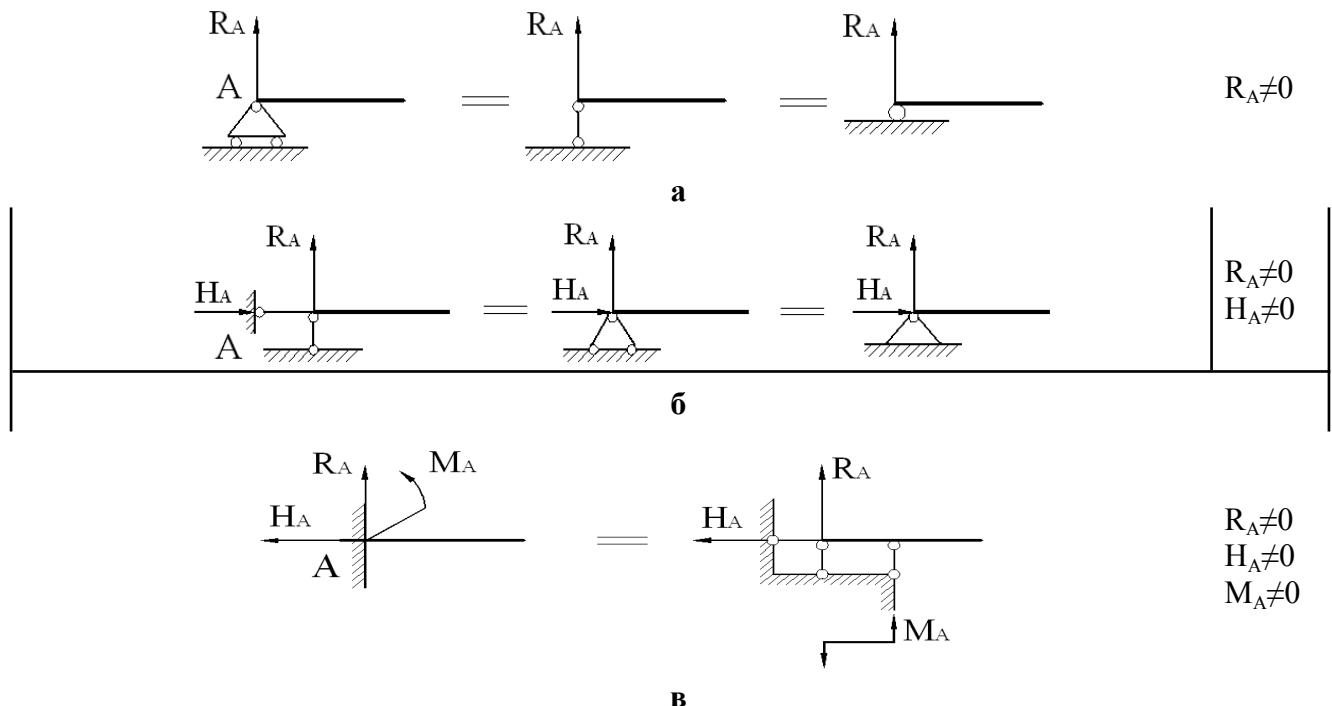


Рис.1.1. Схематизація опорних закріплень бруса

Усі реакції вважаються прикладеними в точці перетину центральних осей перерізу стержня над опорою.

1.5. Припущення (гіпотези) стосовно властивостей матеріалів конструктивних елементів

1. **Гіпотеза про суцільність матеріалу.** Припускається, що матеріал суцільно заповнює об'єм тіла, спростовуючи теорію дискретної будови речовини.
2. **Гіпотеза про однорідність та ізотропність.** Вважається, що в будь-якій точці тіла та в будь-якому напрямі механічні властивості матеріалу однакові.
3. **Гіпотеза про ідеальну пружність та природну ненапруженість матеріалу.** Припускається, що деформації, спричинені дією навантажень, після розвантаження повністю зникають, а початкові зусилля та напруження відсутні.

1.6. Класифікація та схематизація зовнішніх сил

1.6.1. Зовнішні сили навантаження

З теоретичної механіки відомо, що зовнішні сили характеризують механічну взаємодію розглядуваного елемента конструкції з пов'язаними з ним тілами, тобто взаємодію окремих тіл між собою. В цьому розумінні власна вага тіла, що розподілена по всьому його об'єму, є зовнішньою силою як результат взаємодії тіла з Землею. Зовнішні сили, які діють на реальний об'єкт, майже завжди відомі. Поверхні тіла в місці контакту можуть бути досить складними. В залежності від вибору розрахункової схеми зовнішні сили спрощують: умовно уявляють зосередженими в обмеженому місці чи точці F (кН), або розподіленими по довжині стержня q (кН/м), по поверхні тіла P (кН/м²), чи по його об'єму γ (кН/м³).

Зазначимо, що **рівнодійна рівномірно розподіленого навантаження F_q дорівнює добутку розподіленого навантаження q на довжину його дії l_i** ($F_q = q \cdot l_i$, кН) і прикладена умовно посередині цієї довжини (ділянки стержня).

До категорії зовнішніх сил відносять реакції в'язей, що накладені на тіло для його рівноваги, – так звані **реакції опор** (див. рис.1.1). Приклади зображення зовнішніх сил навантаження показані на розрахункових схемах балок (рис.1.2, а, б).

Бувають такі навантаження, які не є наслідками контакту двох тіл, що взаємодіють, наприклад: власна вага Q , сила інерції тіла $F_{ин}$, що рухається тощо. Ці сили прикладені в кожній точці об'єму, який займає тіло, і тому називаються **об'ємними** або **масовими силами**.

Навантаження вважається статичним, якщо воно постійне чи плавно зростає від нуля до свого значення, а далі залишається незмінним.

Динамічні навантаження супроводжуються значними прискореннями як деформованого тіла, так і тіл, що взаємодіють з ним.

Ударне навантаження вважається миттєво прикладеним (зростає від нуля до свого граничного значення за частки секунд).

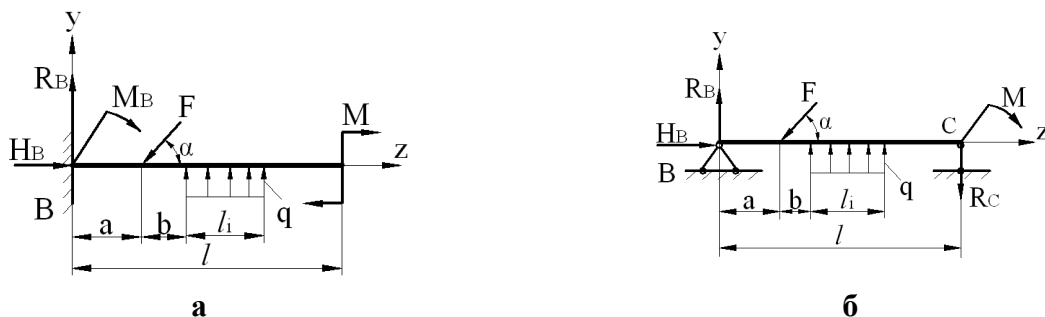


Рис.1.2. Зображення зовнішніх сил на розрахункових схемах

Повторно-змінне навантаження, як правило, циклічно змінюється в часі.

В ненавантаженому стані між сусідніми частинками тіла (кристалами, молекулами, атомами) завжди є внутрішні сили взаємодії, що прагнуть зберегти його як єдине ціле, тобто

перешкоджають зміні взаємного розташування частинок. Зовнішні сили, які діють на тіло, деформують його і зумовлюють появу в тілі протидіючих внутрішніх сил пружності, які проявляють себе в пружній віддачі при розвантаженні.

В опорі матеріалів вивчають і визначають саме ці додаткові внутрішні сили, які з'являються між частинами тіла при його навантаженні. Ці сили взаємодії називають **внутрішніми силами пружності**, і саме їх потрібно знати для виконання розрахунків на міцність, жорсткість тощо. Для виявлення внутрішніх сил пружності, а потім і визначення їх величини, застосовують **метод перерізів**. Розглянемо його зміст.

1.7. Зміст методу перерізів

Розглянемо стержень, навантажений самозрівноваженою системою сил (рис.1.3,а). У місці, яке нас цікавить, уявно розсічемо його площиною P на дві частини I і II.

Відкинемо уявно одну з відокремлених частин тіла, наприклад ліву, помічену знаком I, замінивши її дію на залишену праву (II) частину системою внутрішніх сил пружності (ВСП, рис.1.3,б). Внутрішні сили пружності віддзеркалюють взаємодію між частинами тіла, розташованими по різні боки від проведеного перерізу P . За принципом дії і протидії внутрішні сили пружності завжди взаємні: права відсічена частина стержня діє на ліву точно так само, як і ліва на праву, а це означає, **що внутрішні сили пружності можуть визначатися з умов рівноваги як лівої відсіченої частини тіла (стержня), так і правої**, бо під дією внутрішніх сил пружності і частини зовнішніх сил кожна з відокремлених частин I і II перебуває у рівновазі.

В загальному випадку внутрішні сили пружності розподілені по перерізу нерівномірно і направлені різноманітно, а тому визначити кожен з них тільки з рівнянь рівноваги неможливо. Але з курсу теоретичної механіки відомо, що будь-яку довільну систему сил можна звести до головного вектора $\vec{R}$ та головного моменту $\vec{M}$ (рис.1.3,в). Виберемо в центрі перерізу прямокутну систему координат x, y, z так, що вісь z буде нормаллю до перерізу, а осі x і y лежатимуть у самому перерізі. Якщо головний вектор внутрішніх сил та вектор головного моменту спроектувати на поздовжню вісь стержня z та головні центральні осі перерізу x та y , то в перерізі можна уявити **шість внутрішніх силових факторів** (рис.1.3,в): **три сили** (N_z, Q_x, Q_y) і **три моменти** (M_x, M_y, M_z).

1.8. Внутрішні силові фактори

Внутрішні сили пружності позначають та називають так:

N_z – поздовжня (осьова, нормальна) сила;

Q_x, Q_y – поперечні (перерізуючі) сили;

M_x, M_y – згинальні моменти;

M_z – крутний момент, який іноді позначають як $M_{кр}$ чи M_k .

Поздовжня сила N_z – проекція головного вектора $\vec{R}$ внутрішніх сил пружності в перерізі на вісь, яка є нормаллю до перерізу.

Поперечні сили в перерізі Q_x та Q_y – проекції головного вектора $\vec{R}$ внутрішніх сил пружності в перерізі на головні центральні осі перерізу x та y відповідно.

Крутний момент M_z (або $M_{кр}$) – проекція вектора головного моменту $\vec{M}$ внутрішніх сил пружності в перерізі на нормаль z до перерізу.

Згинальні моменти в перерізі M_x та M_y – проекції вектора головного моменту $\vec{M}$ внутрішніх сил у перерізі на головні центральні осі перерізу x та y .

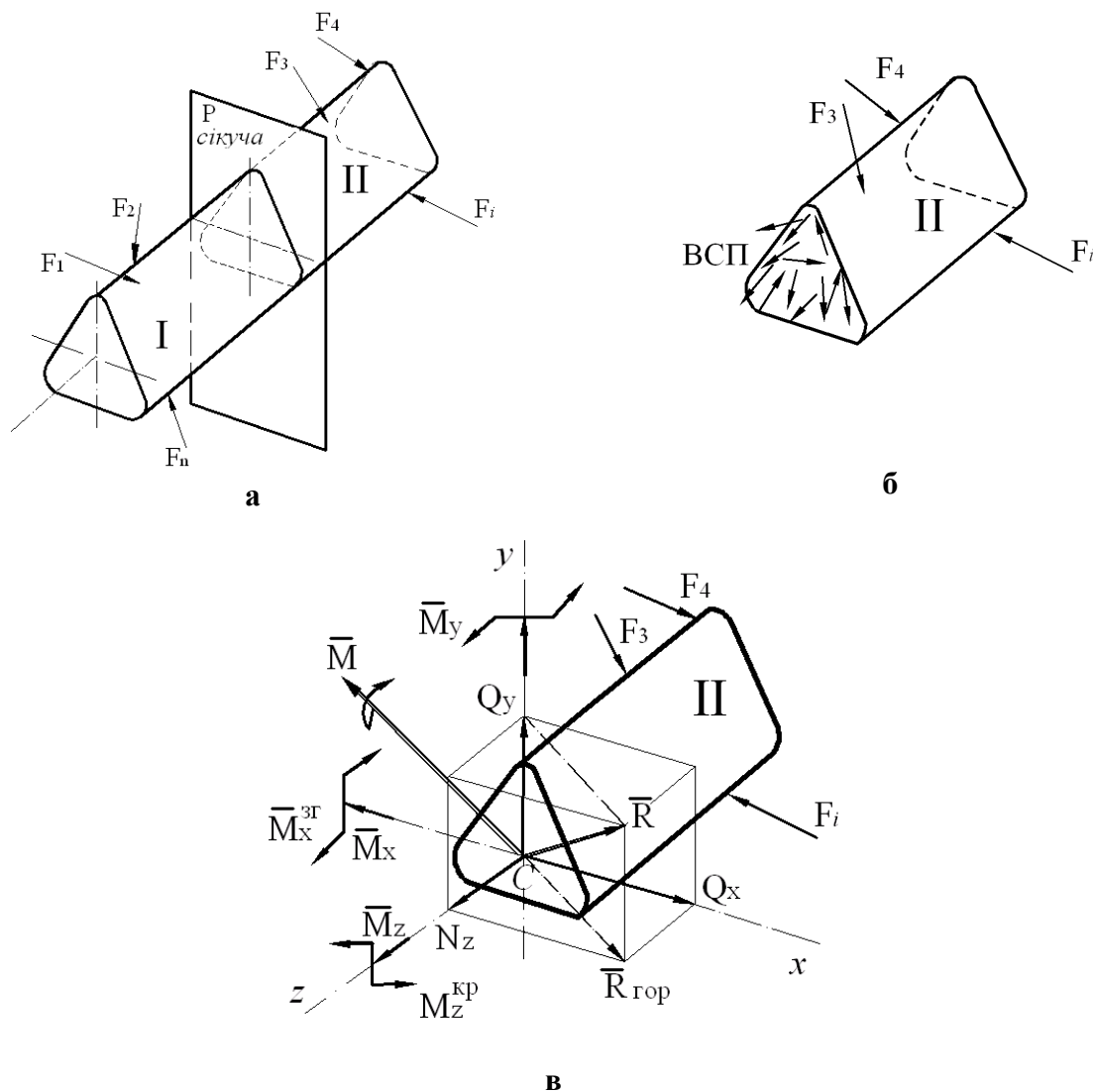


Рис.1.3. До визначення внутрішніх силових факторів

Внутрішні сили незалежно від того, як вони розподілені в перерізі, повинні задовольняти умовам рівноваги розглядуваної (в нашому випадку правої II частини). Таким чином, наступним етапом методу перерізів є складання рівнянь рівноваги для тієї частини тіла, яку залишили для розгляду:

$$\sum_{i=1}^n F_{ix} + Q_x = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n F_{iy} + Q_y = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n F_{iz} + N_z = 0 \quad ;$$

$$\sum_{i=1}^n M_{ix} + M_x = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n M_{iy} + M_y = 0 \quad ; \quad \sum_{i=1}^n M_{iz} + M_z = 0 \quad ,$$

де n – кількість зовнішніх сил по одну сторону від розглядуваного перерізу.

З цих шести рівнянь рівноваги однієї з відсічених частин тіла витікає, що будь-який внутрішній силовий фактор чисельно визначається як алгебраїчна сума проекцій на відповідну вісь перерізу (або моментів відносно цих осей) тільки тих зовнішніх сил (чи моментів), якими навантажена ця відсічена частина.

1.9. Види опору (деформацій)

У відповідності з внутрішніми силовими факторами, що виникають у перерізах стержня, розрізняють такі види простого опору:

1. Осьове розтягання, стискання – це вид опору, при якому в поперечних перерізах стержня виникає тільки поздовжня сила N_z .

2. Зріз (чистий зсув) – це вид опору, при якому в поперечних перерізах виникає тільки поперечна сила Q_y (чи Q_x).

3. Кручення – це вид опору, при якому в поперечних перерізах виникає тільки крутний момент $M_{кр}$.

4. Чисте згинання – це вид опору, при якому в поперечних перерізах виникає тільки згинальний момент M_x (чи M_y).

Можливі випадки, коли в поперечних перерізах виникає два і більше внутрішніх силових факторів одночасно, тоді має місце складний опір. Так, при згинанні зовнішніми силами в перерізах стержня найчастіше виникають як згинальний момент, так і поперечна сила. У цьому випадку має місце поперечний згин, як складний вид опору.

2. ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ ПРИ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ

2.1. Побудова епюр внутрішніх силових факторів

2.1.1. Вимоги до побудови епюр

Графік, що показує, як змінюється внутрішній силовий фактор вздовж осьової лінії стержня, називають епюрою.

Для побудови епюр внутрішніх силових факторів їх визначають лише в характерних перерізах стержня (бруса), а саме: на початку і в кінці кожної навантаженої ділянки, а також там, де внутрішні силові фактори – екстремальні.

1. Вісь (базу), на якій будується епюра, завжди вибирають так, щоб вона була паралельна з віссю стержня. Поряд з віссю епюри записують назву внутрішнього силового фактора і одиницю виміру в СІ, відокремлену комою.

2. Ординати епюри, тобто значення внутрішнього силового фактора, треба відкладати від осі по перпендикуляру в певному масштабі. В межах кожної ділянки нанесені точки з'єднують лініями відповідно до закону розподілу навантаження і функції внутрішнього силового фактора.

3. Епюра повинна бути замкнутою.

4. Зовні поля епюри проставляють абсолютні значення чисел, що показують значення характерних ординат, а в полі епюри в кружках ставлять їх знак.

5. Числа та літери необхідно писати чітко.

6. Небажано розривати або зміщувати графічну інформацію, тобто одну частину, наприклад, розрахункову схему розмістити на одному аркуші паперу, а епюри – на іншому, та розміщати їх зі зміщеннями на одному аркуші.

2.1.2. Побудова епюр поздовжніх сил

Поздовжня сила N_z в перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на нормаль до перерізу тільки тих зовнішніх сил, які прикладені по одну сторону від розглядуваного перерізу.

Правило знаків для N_z : умовимося вважати поздовжню силу в перерізі додатною, якщо зовнішня сила, прикладена до розглянутої відсіченої частини стержня, викликає розтягання (рис.2.2,а) та від'ємною – у протилежному випадку (рис.2.2,б).

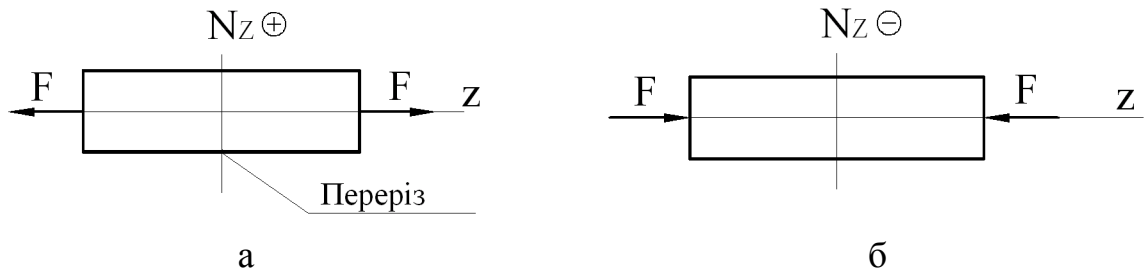


Рис.2.2. Правило знаків для обчислення N_z

Приклад 2.1. Побудувати епюру поздовжніх сил для жорстко затисненого лівим кінцем стержня (рис.2.3,а).

Вихідні дані: $F=14,5$ кН; $q=9$ кН/м.

Розв'язання.

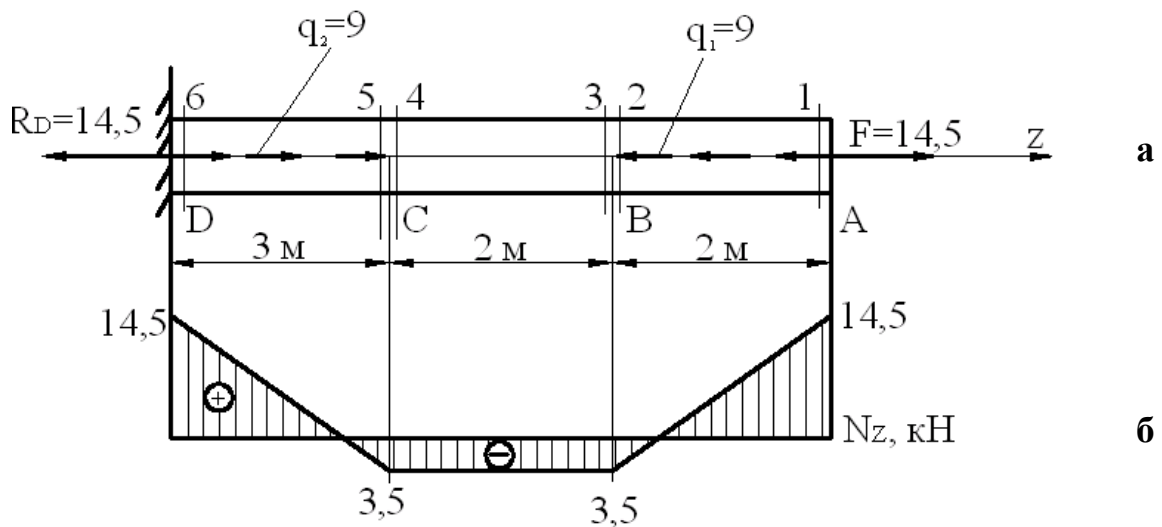


Рис.2.3. Зовнішні сили навантаження F , q (а) і епюра поздовжніх сил N_z (б)

Обчислюємо опорну реакцію

$$\sum F_z = 0; \quad -R_D + q_2 \cdot 2 - q_1 \cdot 9 + F = 0; \quad R_D = 14,5 \text{ кН.}$$

Зауваження. В даному випадку можна обійтись без обчислення реакції опори R_D , але тоді при обчисленні поздовжньої сили слід розглядати зовнішні сили тільки справа від розглядуваного перерізу. Обчислення в цьому випадку простіші.

Ділимо стержень на ділянки АВ, ВС та СД, де зовнішнє навантаження відсутнє або міняється за одним законом.

Вісь z спрямовуємо вздовж осі стержня.

Намічаємо характерні перерізи 1...6 – на початку і в кінці кожної ділянки стержня.

Обчислюємо поздовжню силу N_z в кожному характерному перерізі, починаючи з правого торцю бруса:

$$N_{z,1} = F = 14,5 \text{ кН};$$

$$N_{z,2} = F - q_1 \cdot 2 = 14,5 - 18 = -3,5 \text{ кН} = N_{z,3} = N_{z,4} = N_{z,5}.$$

Розглядаючи ліву відсічену частину бруса, маємо:

$$N_{z,6} = R_D = 14,5 \text{ кН};$$

$$N_{z,5} = R_D - q_2 \cdot 2 = 14,5 - 18 = -3,5 \text{ кН}.$$

Значення $N_{z,5} = -3,5 \text{ кН}$ ліворуч і праворуч від перерізу 5-го співпадають, що підтверджує правильність виконаних розрахунків.

За знайденими значеннями будуємо епюру N_z (рис.2.3,б).

Додатні значення відкладаються (в обраному масштабі) над віссю епюри, від'ємні – під віссю.

Приклад 2.2. Побудувати епюру N_z для східчастого стержня з урахуванням його власної ваги (рис.2.4,а).

Вихідні дані: $A=14 \text{ см}^2$; $a=4,8 \text{ м}$; $b=2,2 \text{ м}$; $\gamma=78 \text{ кН/м}^3$; $F=1,6 \text{ кН}$.

Розв'язання.

Запишемо рівняння рівноваги всього брус

$$\sum F_z = 0, \quad \gamma \cdot A \cdot a + F + \gamma \cdot 2A \cdot b - R_D = 0.$$

Обчислюємо опорну реакцію

$$R_D = 78 \cdot 14 \cdot 10^{-4} \cdot 4,8 + 1,6 + 78 \cdot 28 \cdot 10^{-4} \cdot 2,2 = 2,6 \text{ кН}.$$

Намічаємо характерні перерізи 1...4.

Обчислюємо поздовжню силу в кожному перерізі, починаючи з нижнього перерізу 1:

$$N_{z,1} = \gamma \cdot A \cdot 0 = 0$$

$$N_{z,2} = \gamma \cdot A \cdot a = 78 \cdot 14 \cdot 10^{-4} \cdot 4,8 = 0,52 \text{ кН};$$

$$N_{z,3} = N_{z,2} + F = 0,52 + 1,6 = 2,12 \text{ кН};$$

$$N_{z,4} = N_{z,3} + \gamma \cdot 2A \cdot b = 2,12 + 78 \cdot 28 \cdot 10^{-4} \cdot 2,2 = 2,6 \text{ кН}.$$

Розглядаючи верхню відсічену частину бруса на рівні перерізу 4, визначимо

$N_{z,4} = R_D = 2,6 \text{ кН}$ – розрахунки проведено без помилок, тобто обчислення вірні.

За знайденими значеннями будуємо епюру N_z (рис.2.4,б).

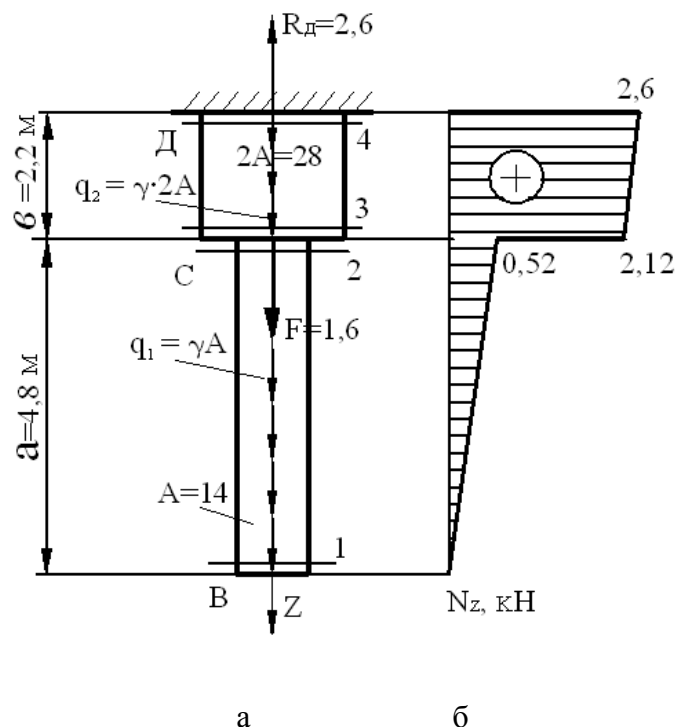


Рис.2.4. Зовнішні сили навантаження F, q (а) і епюра

поздовжніх сил N_z (б)

Зауваження. Епюри N_z (див. рис.2.3,б та рис.2.4,б) дають змогу зробити такі практичні висновки:

1. Проаналізувати, як змінюється значення поздовжньої сили N_z вздовж осової лінії стержня.

2. Вибрати переріз, в якому значення поздовжньої сили максимальне $N_{z\max}$.
Такий

переріз за умови $A=\text{const}$ по довжині стержня називають небезпечним перерізом. На епюрі (рис.2.3,б) перерізи А і Д – небезпечні ($N_{z,A} = N_z$, $D = N_{z\max} = 14,5 \text{ кН}$), а на епюрі (рис.2.4,б) переріз Д – небезпечний ($N_{z\max} = N_z$, $D = 2,6 \text{ кН}$).

Для небезпечного перерізу проводяться відповідні розрахунки на міцність, про які мова йтиме у подальших розділах цього посібника.

2.1.3. Побудова епюр крутних моментів

Крутний момент $M_{кр}$ у перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі зовнішніх моментів, прикладених по одну сторону від розглянутого перерізу, відносно нормалі.

Прийmemo схематично таке правило знаків для $M_{кр}$ (рис.2.5,а – крутний момент у перерізі додатний; рис.2.5,б – крутний момент у перерізі від'ємний).

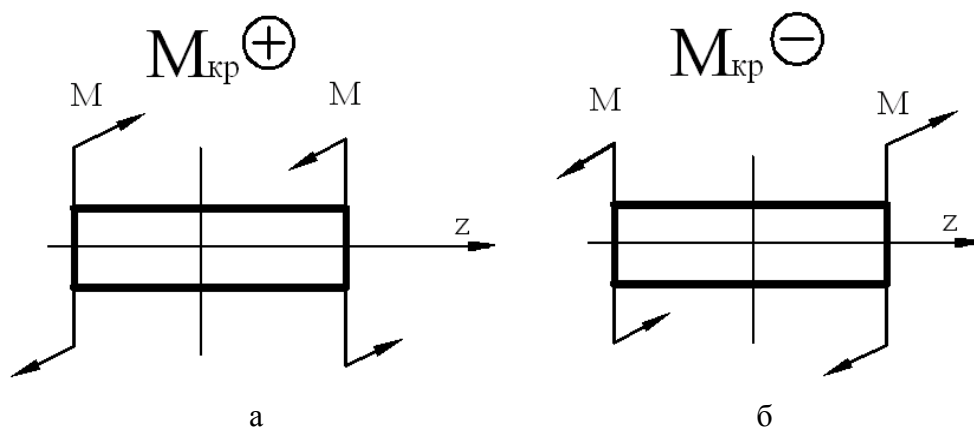


Рис.2.5. Правило знаків для обчислення $M_z = M_{кр}$

Приклад 2.3. Побудувати епюру крутних моментів для жорстко затисненого лівим кінцем стержня (рис.2.6,а).

Вихідні дані: $M = 14,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$; $m = 5 \text{ кН}\cdot\text{м/м}$.

Розв'язання.

Обчислюємо опорний момент M_D

$$\sum M_z = 0; \quad -3M + 2M - m \cdot 2 + M_D = 0; \quad M_D = 24,5 \text{ кН}\cdot\text{м}$$

Поділимо стержень на ділянки АВ, ВС та СД.

Намічаємо характерні перерізи 1...6.

Обчислюємо крутний момент у кожному перерізі:

• з правого боку:

$$M_{кр,1} = -3M = -43,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = M_{кр,2};$$

$$M_{кр,3} = M_{кр,2} + 2M = -43,5 + 29 = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м} = M_{кр,4};$$

$$M_{кр,4} = M_{кр,5} = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

• з лівого боку:

$$M_{кр,6} = -M_D = -24,5 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$M_{кр,5} = -M_D + m \cdot 2 = -24,5 + 10 = -14,5 \text{ кН}\cdot\text{м}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки в перерізі $M_{кр,5}$ що з лівого, що з правого боку однаковий.

За знайденими значеннями будуємо епюру $M_{кр}$ (рис.2.6,б).

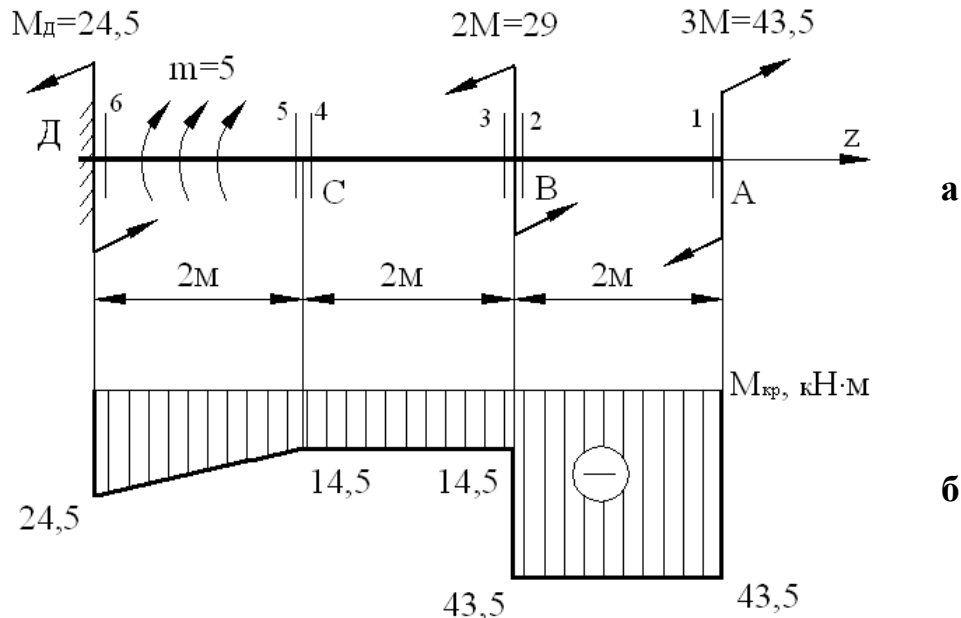


Рис.2.6. Зовнішні моменти M , m (а) і епюра внутрішніх (крутних) моментів $M_{кр}$ (б)

2.1.4. Правила контролю епюр поздовжніх сил та крутних моментів

Для епюр поздовжніх сил та крутних моментів характерні деякі закономірності, знання яких дозволяє оцінити правильність виконаних розрахунків і побудови епюр.

1. Епюри N_z і $M_{кр}$ завжди прямолінійні, якщо q та m постійні.
2. На ділянці, де немає розподільного навантаження, епюра N_z чи $M_{кр}$ – пряма, паралельна осі стержня, а на ділянці під розподіленим навантаженням – похила пряма.
3. У місці прикладення зосередженої сили на епюрі N_z має місце кінцевий розрив функції (так званий «стрибок») на величину цієї сили, аналогічно в місці прикладеного зосередженого момента на епюрі $M_{кр}$ буде стрибок на величину цього момента. Напрями стрибків на епюрах повинні узгоджуватися з вибраним правилом знаків.

2.1.5. Побудова епюр поперечних сил та згинальних моментів

Стержень, що зазнає згинання, називають **балкою**. В поперечних перерізах балки, навантаженої силами, виникають в загальному випадку навантаження два внутрішніх силових фактори – **поперечна сила** Q_y і **згинальний момент** M_x .

Поперечна сила в перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі проекцій на поперечну вісь тільки тих зовнішніх сил, що прикладені по одну сторону від розглядуваного перерізу.

Правило знаків для Q_y : умовимося вважати поперечну силу в перерізі додатною, якщо зовнішнє навантаження, прикладене до розглянутої відсіченої частини, прагне повернути даний переріз за ходом годинникової стрілки (рис.2.8,а) і від'ємною – у протилежному

напрямі (рис.2.8,б).

Схематично це правило знаків можна уявити так:

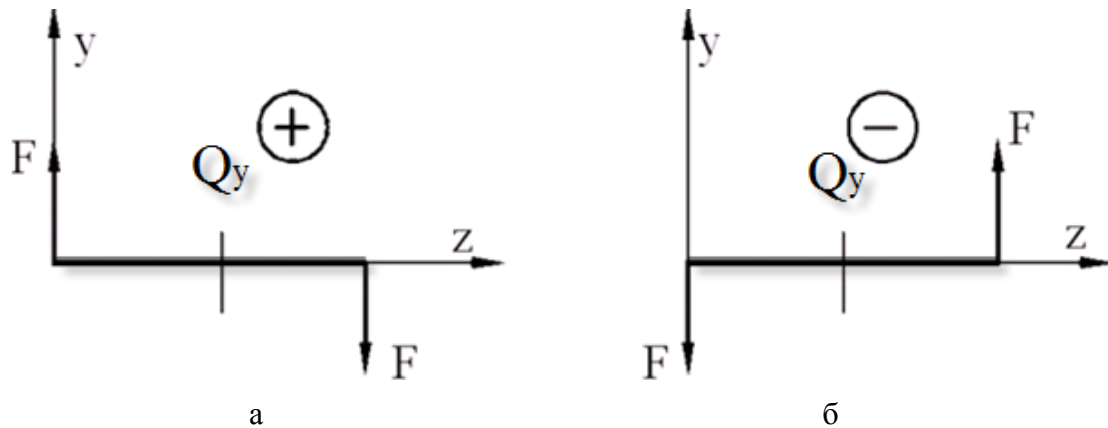


Рис.2.8. Правило знаків для обчислення Q_y

Згинальний момент у перерізі чисельно дорівнює алгебраїчній сумі моментів відносно поперечної вісі тільки тих зовнішніх сил, що прикладені по одну сторону від розглядуваного перерізу.

Правило знаків для M_x : умовимося вважати згинальний момент у перерізі додатним, якщо зовнішнє навантаження, прикладене до правої розглянутої відсіченої частини, повертає її проти ходу годинникової стрілки (рис.2.9,а) і від'ємним – у протилежних випадках (рис.2.9,б).

Схематично це правило знаків можна подати у вигляді:

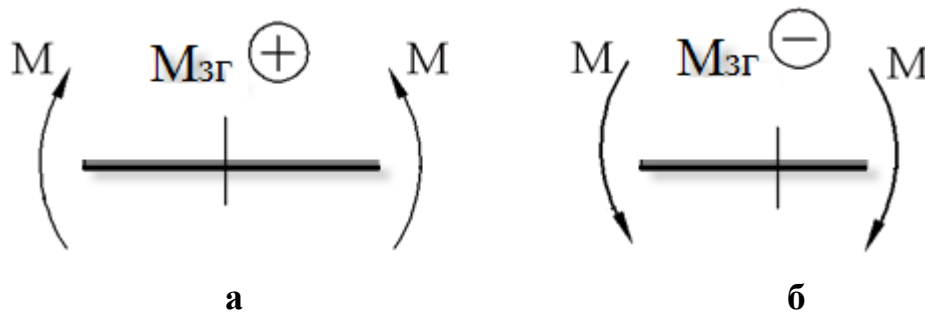


Рис.2.9. Правило знаків для обчислення $M_{zг}$

Слід зазначити, що при такому правилі знаків епюра M_x завжди виявляється побудованою з боку стиснутих волокон.

Розглянемо побудови епюр для найхарактерніших випадків навантажування балок.

- Навантаження зосередженою силою F (рис.2.10,а).

Визначимо Q_y та M_x в довільному перерізі з абсцисою z

$$Q_y(z) = F; \quad M_x(z) = -F \cdot z; \quad 0 \leq z \leq l.$$

З рівнянь видно, що поперечна сила однакова в усіх перерізах балки, тому $Q_y(z) = \text{const}$. Функція $M_x(z)$ – лінійна. Для її побудови досить знайти дві ординати – на початку та в кінці ділянки:

$$\text{при } z = 0 \text{ (переріз B)} \quad M_{x,B} = 0;$$

при $z = \ell$ (переріз А) $M_{x,A} = -F \ell$.

Будуємо епюри Q_y (рис.2.10,б) і M_x (рис.2.10,в).

- Рівномірно розподілене навантаження інтенсивністю q (рис.2.11,а).

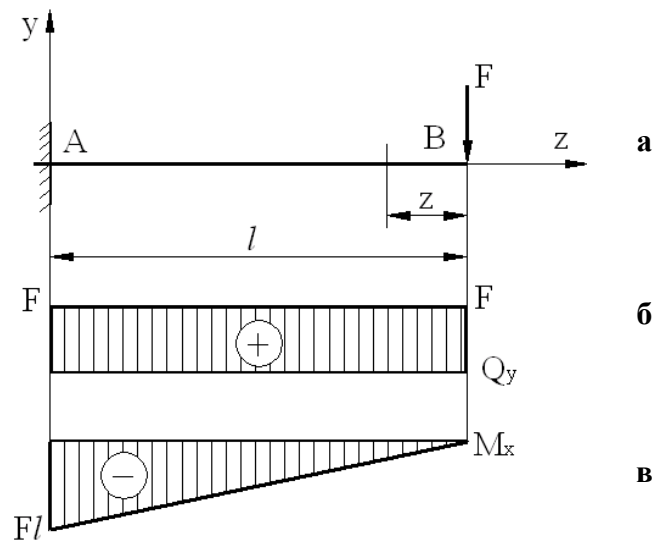


Рис.2.10. Зовнішнє навантаження балки зосередженою силою F (а) та епюри поперечних сил Q_y (б) і згинальних моментів M_x (в)

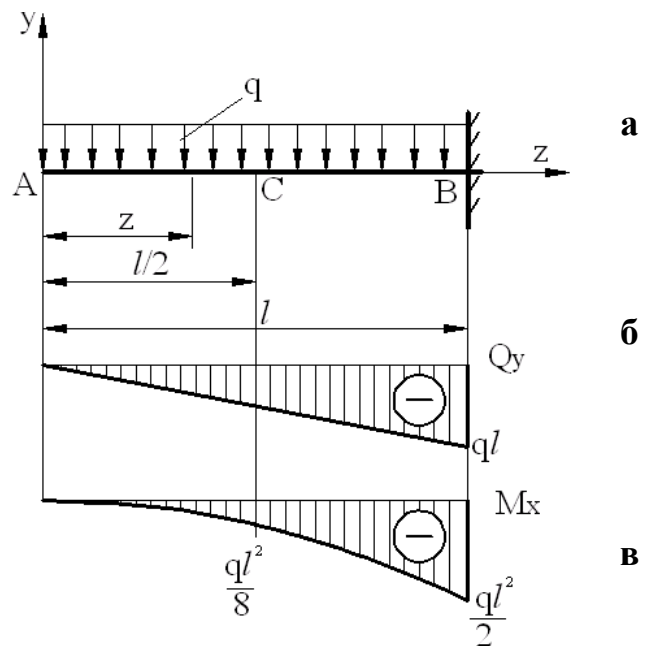


Рис.2.11. Рівномірно розподілене навантаження q (а), епюри поперечних сил Q_y (б) та згинальних моментів M_x (в)

Визначаємо Q_y та M_x в довільному перерізі з абсцисою z :

$$Q_y(z) = -q \cdot z ; \quad M_x(z) = -q \cdot z \cdot \frac{z}{2} = -\frac{qz^2}{2} ; \quad 0 \leq z \leq l .$$

Отже, поперечна сила $Q_y(z)$ змінюється за *прямолінійним законом*, а згинальний момент $M_x(z)$ – за *параболічним законом*. Для побудови епюри Q_y визначаємо ординати в

двох перерізах:

$$\text{при } z = 0 \text{ (переріз } A) \quad Q_{y,A} = 0 ;$$

$$\text{при } z = \ell \text{ (переріз } B) \quad Q_{y,B} = -q\ell$$

і проводимо пряму лінію (рис.2.11,б). Враховуючи, що епюра $M_x(z)$ криволінійна, для її побудови знаходимо ординати в трьох перерізах:

$$\text{при } z = 0 \text{ (переріз } A) \quad M_{x,A} = 0 ;$$

$$\text{при } z = \frac{\ell}{2} \text{ (посередині балки, переріз } C) \quad M_{x,C} = -q \cdot \frac{\ell}{2} \cdot \frac{\ell}{4} = -\frac{q\ell^2}{8} ;$$

$$\text{при } z = \ell \text{ (переріз } B) \quad M_{x,B} = -q \cdot \ell \cdot \frac{\ell}{2} = -\frac{q\ell^2}{2}$$

і проводимо через три точки криву лінію.

Приклад 2.4. Побудувати епюри поперечних сил Q_y і згинальних моментів M_x для балки з довільним навантаженням (рис.2.12,а).

Вихідні дані: $F = 10 \text{ кН}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $M = 7 \text{ кН}\cdot\text{м}$.

Розв'язання.

Обчислюємо реакції опори консольної балки

$$\sum M_B = 0; \quad -M + q \cdot 2,4 \cdot 4,8 - F \cdot 3,6 - M_B = 0; \quad M_B = 72,2 \text{ кН}\cdot\text{м};$$

$$\sum F_y = 0; \quad -q \cdot 2,4 + F + R_B = 0; \quad R_B = 14 \text{ кН}$$

Намічаємо характерні перерізи 1...4 на початку і в кінці кожної ділянки навантаження.

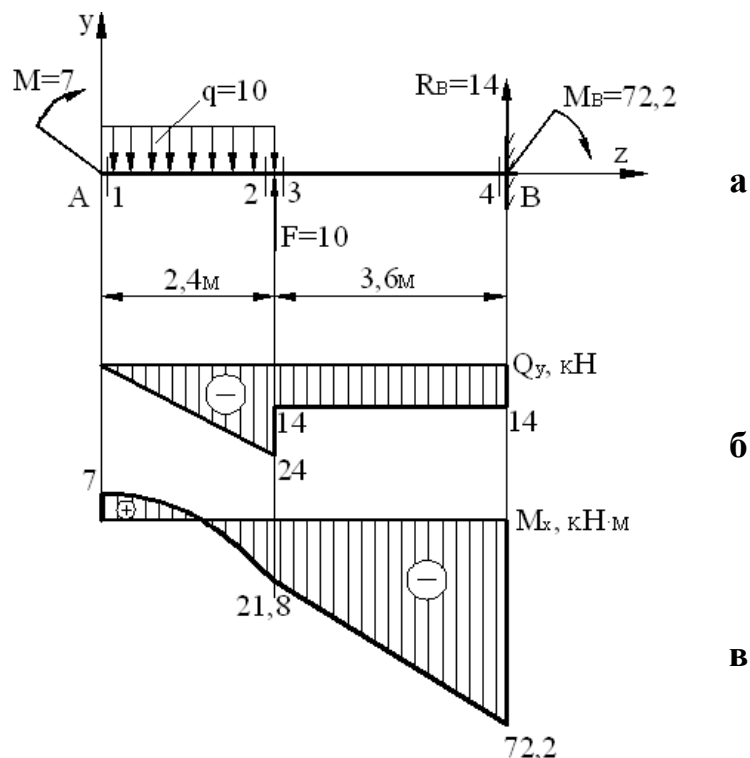


Рис.2.12. Навантаження консольної балки (а) і епюри поперечних сил Q_y (б) та згинальних моментів M_x (в)

Визначаємо поперечні сили в цих перерізах з урахуванням правила знаків для Q_y (див. рис.2.8,а, б):

$$Q_{y,1} = -q \cdot 0 = 0;$$

$$Q_{y,2} = -q \cdot 2,4 = -10 \cdot 2,4 = -24 \text{ кН};$$

$$Q_{y,3} = Q_{y,2} + F = -24 + 10 = -14 \text{ кН};$$

$$Q_{y,4} = -R_B = -14 \text{ кН} = Q_{y,3}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки в 3-му перерізі $Q_{y,3}$ що зліва, що зправа однакові.

За знайденими значеннями будуємо епюру Q_y (рис.2.12,б).

Визначаємо згинальні моменти в характерних перерізах з урахуванням правила знаків для M_x (див. рис.2.9,а, б).

$$M_{x,1} = M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,2} = M - q \cdot \frac{2,4^2}{2} = 7 - 10 \cdot \frac{2,4^2}{2} = -21,8 \text{ кН} \cdot \text{м} = M_{x,3};$$

$$M_{x,4} = -M_B = -72,2 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,3} = -M_B + R_B \cdot 3,6 = -72,2 + 14 \cdot 3,6 = -21,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки $M_{x,3}$ обчислені зліва і зправа – однакові.

За знайденими значеннями будуємо епюру M_x (рис.2.12,в). Аналіз епюри M_x показує, що переріз B – небезпечний: $M_{x \max} = 72,2 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Приклад 2.5. Побудувати епюри Q_y , M_x для балки з шарнірними опорами (рис.2.13,а). Вихідні дані: $F = 10 \text{ кН}$; $q = 10 \text{ кН/м}$; $M = 7 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

Розв'язання.

Обчислюємо реакції опор

$$\sum M_B = 0; \quad M - q \cdot 4,8 \cdot 3,6 + R_C \cdot 3,6 + F \cdot 6 = 0; \quad R_C = 29,4 \text{ кН}.$$

$$\sum M_C = 0; \quad M - R_A \cdot 3,6 + q \cdot \frac{2,4^2}{2} - q \cdot \frac{2,4^2}{2} + F \cdot 2,4 = 0; \quad R_A = 8,6 \text{ кН}.$$

Перевірка обчислення реакцій

$$\sum F_y = 0; \quad R_A - q \cdot 4,8 + R_C + F = 8,6 - 10 \cdot 4,8 + 29,4 + 10 = 0.$$

Намічаємо характерні перерізи 1...6 на початку і в кінці кожної ділянки навантаження.

Обчислюємо поперечні сили в цих перерізах, розглядаючи спочатку ліву:

$$Q_{y,1} = R_A = 8,6 \text{ кН} = Q_{y,2} = Q_{y,3};$$

$$Q_{y,4} = R_A - q \cdot 2,4 = 8,6 - 10 \cdot 2,4 = -15,4 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = Q_{y,4} + R_c = -15,4 + 29,4 = 14,0 \text{ кН},$$

а потім праву відсічені частини балки:

$$Q_{y,6} = -F = -10 \text{ кН};$$

$$Q_{y,5} = -F + q \cdot 2,4 = -10 + 10 \cdot 2,4 = 14,0 \text{ кН}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки $Q_{y,5}$ що з лівого, що з правого боку однакові.

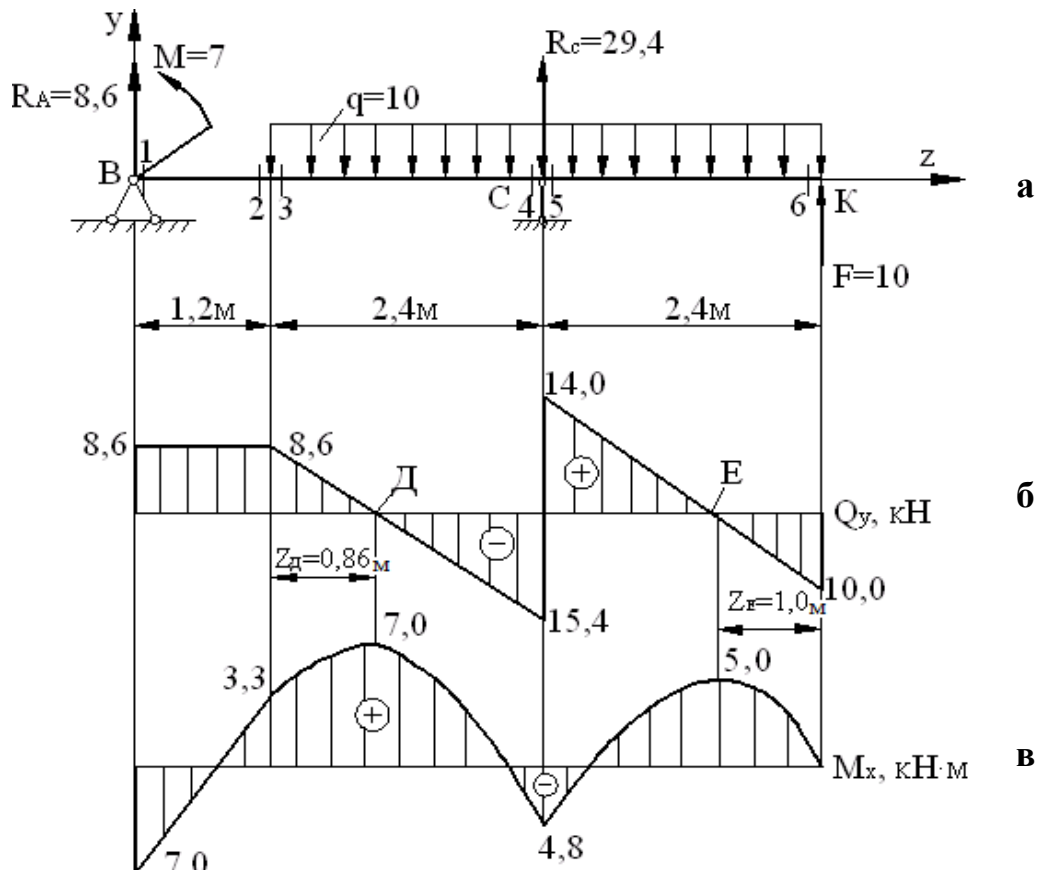


Рис.2.13. Балка з шарнірними опорами (а) і епюри поперечних сил Q_y (б) та згинальних моментів M_x (в)

За знайденими значеннями будуємо епюру Q_y (рис.2.13,б).

Епюра Q_y перетинає вісь в точках Д і Е. Це свідчить про те, що у цих перерізах момент M_x буде мати екстремальні значення. Для визначення положення цих перерізів необхідно записати функцію $Q_y(z) = 0$ для ділянок, де діє q :

$$Q_{y,E} = -F + q \cdot Z_E = 0, \quad Z_E = \frac{F}{q} = \frac{10}{10} = 1,0 \text{ м},$$

приймаючи до уваги праву відсічену частину балки;

$$Q_{y,D} = R_A - qZ_D = 0, \quad Z_D = \frac{8,6}{10} = 0,86 \text{ м},$$

приймаючи до уваги ліву відсічену частину балки.

Обчислюємо згинальні моменти в характерних перерізах, розглядаючи ліву відсічену

частину балки:

$$M_{x,1} = -M = -7,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{x,2} = -M + R_A \cdot 1,2 = -7 + 8,6 \cdot 1,2 = 3,3 \text{ кН} \cdot \text{м} = M_{x,3};$$

$$M_{x,extr} = M_{x,D} = R_A \cdot 2,06 - M - q \frac{0,86^2}{2} = 8,6 \cdot 2,06 - 7 - 3,7 = 7,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z,4} = -M + R_A \cdot 3,6 - q \frac{2,4^2}{2} = -7 + 8,6 \cdot 3,6 - 10 \frac{2,4^2}{2} = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z,5} = M_{z,4} = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

розглядаючи тепер праву відсічену частину:

$$M_{z,6} = 0; \quad M_{x,extr} = M_{z,E} = F \cdot 1,0 - q \frac{1,0^2}{2} = 10 \cdot 1,0 - 10 \cdot 0,5 = 5,0 \text{ кН} \cdot \text{м};$$

$$M_{z,5} = F \cdot 2,4 - q \frac{2,4^2}{2} = 10 \cdot 2,4 - 10 \frac{2,4^2}{2} = -4,8 \text{ кН} \cdot \text{м}.$$

Обчислення виконані вірно, оскільки $M_{z,5}$ що з лівого, що з правого боку однакові.

За знайденими значеннями будуємо епюру M_x (рис.2.13,в). Аналіз показує, що перерізи В і Д – небезпечні: $M_{x, \max} = 7,0 \text{ кН} \cdot \text{м}$.

При побудові та перевірці епюр Q_y та M_x використовуються диференціальні залежності між q , Q_y і M_x .

2.1.6. Диференціальні залежності при згинанні

Визначимо деякі характерні особливості епюр поперечних сил Q_y та згинальних моментів M_x , знання яких полегшує побудову епюр і дає змогу певною мірою контролювати їх правильність.

Розглянемо балку з довільним навантаженням (рис.2.14,а).

Двома перерізами виділимо малий елемент O_1O_2 довжиною dz . Оскільки в загальному випадку навантаження значення Q_y і M_x змінюються вздовж осі балки, то в перерізі O_1 маємо Q_y і M_x , а в перерізі O_2 маємо $Q_y + dQ_y$ і $M_x + dM_x$.

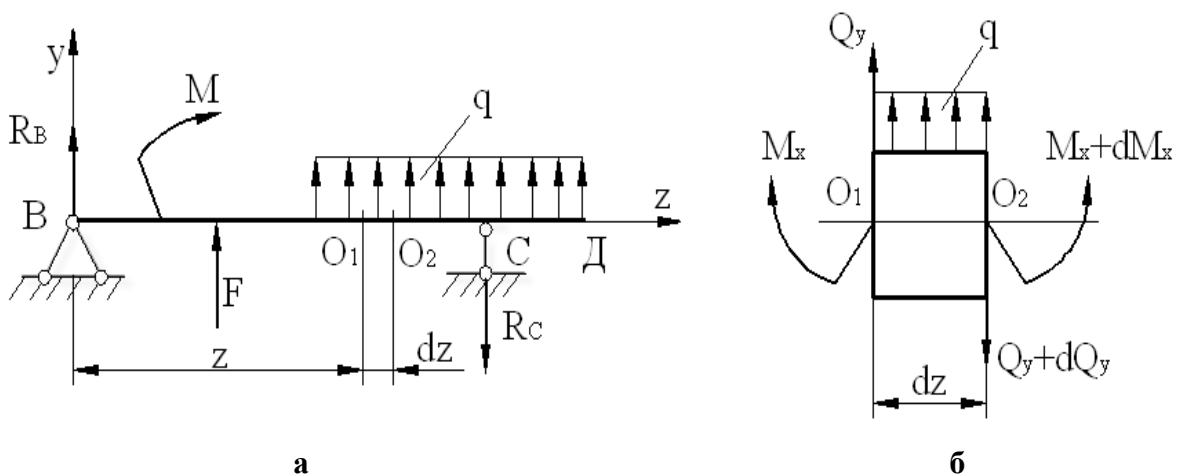


Рис. 2.14. До диференціальних залежностей між q , Q_y , M_x

Елемент O_1O_2 (рис.2.14,б) перебуває в рівновазі під дією зовнішнього навантаження, поперечних сил та згинальних моментів у перерізах O_1 і O_2 . З умови рівноваги виділеної елементарної ділянки балки завдовжки dz одержуємо

$$\sum F_y = 0 ; \quad Q_y + qdz - (Q_y + dQ_y) = 0;$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = q ; \quad (2.1)$$

$$\sum M_{O_2} = 0 ; \quad -M_x - Q_y \cdot dz - q \frac{dz^2}{2} + (M_x + dM_x) = 0.$$

Нехтуючи членом другого порядку малості $q \frac{dz^2}{2}$, одержуємо

$$\frac{dM_x}{dz} = Q_y . \quad (2.2)$$

Взявши похідну від рівняння (2.2) і враховуючи (2.1), знайдемо

$$\frac{d^2 M_x}{dz^2} = q . \quad (2.3)$$

Співвідношення (2.1)...(2.3) і є диференціальними залежностями при згинанні.

Аналіз прикладів 2.4 і 2.5 і залежності (2.1)...(2.3) дають змогу встановити особливості епюр поперечних сил та згинальних моментів.

2.1.7. Деякі особливості епюр Q_y і M_x

1. На ділянках, де немає розподіленого навантаження q , епюра Q_y окреслюється прямими, паралельними базі (рис.2.10,б), а епюра M_x в загальному випадку – похилими прямими (рис.2.10,в).

2. На ділянках, де до балок прикладене рівномірно розподілене навантаження q , епюра Q_y є похилою прямою (рис.2.11,б), а епюра M_x — квадратичною параболою (рис.2.11,в), причому опуклість кривої звернена назустріч навантаженню q .

3. Якщо на ділянці під рівномірно розподіленим навантаженням епюра Q_y перетинає базу ($Q_y = 0$) (рис.2.13,б: точки D і E), то в цьому перерізі має місце екстремум M_{extr} (див. рис.2.13,в: перерізи D і E).

4. На ділянках з поперечною силою Q_y одного знака епюра M_x має однакову монотонність. Так, при $Q_y > 0$ $M_x(z)$ зростає зліва направо; при $Q_y < 0$ зменшується.

5. Порядок лінії на епюрі M_x завжди на одиницю вищий ніж на епюрі Q_y . Наприклад, якщо епюра $Q_y(z)$ – похила пряма, то епюра $M_x(z)$ – квадратична парабола; якщо Q_y на ділянці – пряма, паралельна осі стержня, то M_x – похила пряма; на ділянці, де $Q_y = 0$, $M_x = \text{const}$.

6. Під перерізом, де діє зосереджена сила (реакція), на епюрі Q_y обов'язково повинен бути стрибок на величину цієї сили (див., наприклад, на рис.2.13,б в перерізах B , C , K). Аналогічно, під перерізом, де діє зосереджений момент, на епюрі M_x обов'язковий стрибок на величину цього момента (див. рис.2.13,в, переріз B).

На рис.2.15 наведено алгоритм побудови епюр Q_y та M_x .

2.2. Напруження в точках перерізу

Як уже зазначалось, для виявлення, а потім і визначення внутрішніх силових факторів в опорі матеріалів широко застосовують **метод перерізів**. Щоб характеризувати небезпечність дії внутрішніх силових факторів у перерізі, необхідно ввести міру їх інтенсивності. За таку міру приймають **напруження**.

Розглянемо нескінченно малий елемент dA перерізу (рис.2.16) відсіченої частини пружного тіла.

Рівнодіючу $\vec{dR}$ внутрішніх сил пружності на елементарній площі dA вважаємо прикладеною до центра ваги елемента.

Проекціями $\vec{dR}$ на осі x, y, z будуть елементарна поздовжня dN_z та елементарні поперечні сили dQ_x і dQ_y .

Оскільки елемент площі dA нескінченно малий, то зусилля на цьому елементі можна вважати розподіленими рівномірно. Поділивши dN_z, dQ_x та dQ_y на площу dA , дістанемо інтенсивність поздовжніх та поперечних сил, які припадають на одиницю площі:

$$\sigma_z = \frac{dN_z}{dA}; \quad \tau_{zy} = \frac{dQ_y}{dA}; \quad \tau_{zx} = \frac{dQ_x}{dA}. \quad (2.4)$$

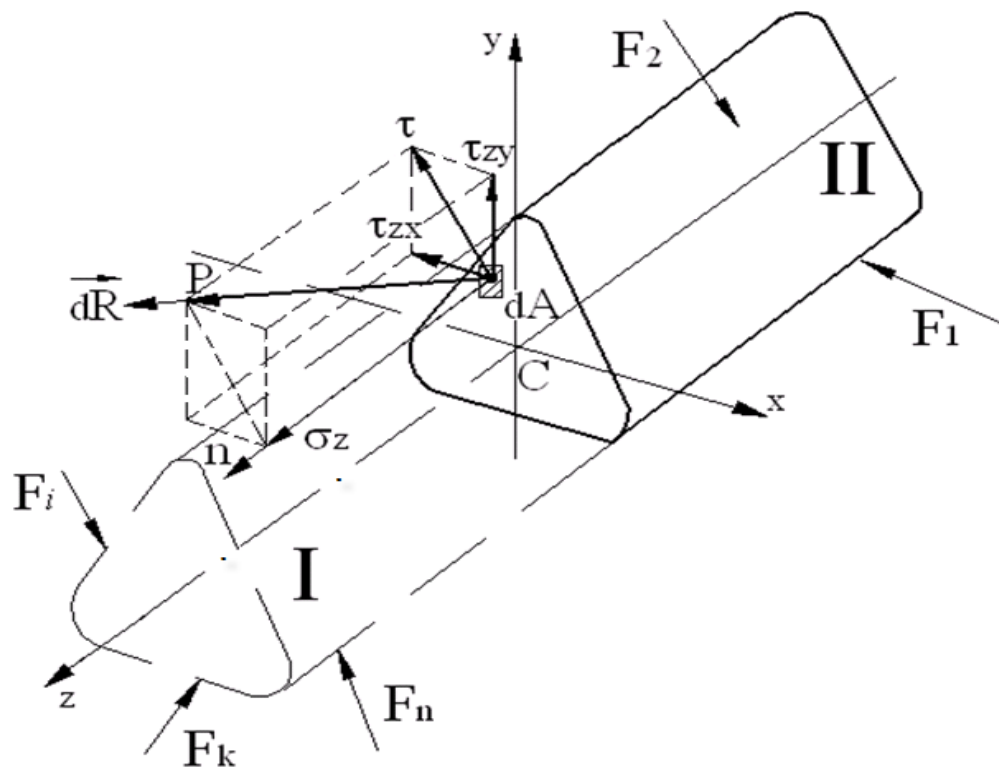


Рис.2.16. Напруження в точці перерізу

Ці величини **називають напруженнями в точці проведеного перерізу** тіла (стержня), причому

σ – нормальне напруження;

τ – дотичне напруження.

Індекси z, zy, zx вказують напрямки напружень відповідно по нормалі до поперечного перерізу, і дотичних до поперечного перерізу паралельно осям y та x .

Із формул (2.4) очевидно, що напруження має таку одиницю виміру:

$$\dim \sigma, \tau = \frac{\text{сила}}{\text{площа}} (\text{Па}, \text{кПа}, \text{МПа}).$$

Напруження – це інтенсивність внутрішніх сил в довкіллі точки.

Повне напруження в точці перерізу

$$p = \frac{dR}{dA}.$$

Напруження p – вектор і як всякий вектор його можна зобразити нормальною (по відношенню до перерізу) і дотичними складовими (див. рис.2.16).

Повне дотичне напруження

$$\tau = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

Очевидно, що повне напруження

$$p = \sqrt{\sigma_z^2 + \tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}.$$

Поняття „напруження” відіграє дуже важливу роль у розрахунках на міцність. Тому значна частина курсу опору матеріалів приділяється визначенню напружень σ та τ .

2.3. Інтегральні залежності між напруженнями та внутрішніми силовими факторами

Неважко визначити загальні залежності між σ та τ , з одного боку, та N_z , Q_x , Q_y , M_x , M_y та $M_{кр}$ – з іншого. Виходячи з означень зусиль та моментів і враховуючи формули (2.4), маємо:

$$N_z = \int_A dN_z = \int_A \sigma_z dA ; \quad (2.5)$$

$$Q_y = \int_A dQ_y = \int_A \tau_{zy} dA ; \quad (2.6)$$

$$Q_x = \int_A dQ_x = \int_A \tau_{zx} dA ; \quad (2.7)$$

$$M_x = \int_A y dN_z = \int_A \sigma_z y dA ; \quad (2.8)$$

$$M_y = \int_A x dN_z = \int_A \sigma_z x dA ; \quad (2.9)$$

$$M_{кр} = \int_A \rho \tau dA , \quad (2.10)$$

де x , y , ρ – координати центра ваги елемента dA .

В формулі (2.10) τ є повним дотичним напруженням в точці перерізу

$$\tau = \sqrt{\tau_{zy}^2 + \tau_{zx}^2}$$

2.4. Розрахунок статично невизначуваних систем при розтяганні-стисканні

2.4.1. Основні положення розрахунків на міцність при розтяганні-стисканні

Досліди, спостереження та розрахунки ствердили *гіпотезу плоских перерізів* при розтяганні – стисканні призматичних брусів, що їх перерізи не депланують (не викривляються) при навантаженні поздовжніми силами. Завдяки цьому внутрішні сили пружності, що виникають в перерізах бруса, розподілені рівномірно. *Міра їх інтенсивності (“густина”), що припадає на одиницю площі поперечного перерізу, називається нормальним напруженням* і визначається співвідношенням $\sigma_z = N_z/A$. Індеси z вказують напрямки нормальної сили і напружень – по нормалі до поперечного перерізу.

В опорі матеріалів розрізняють три види нормальних (і дотичних) напружень: **робочі, граничні і допустимі**.

Робочі (фактичні) напруження – це ті, що дійсно мають місце в елементі конструкції і визначаються розрахунками чи експериментально.

Граничні напруження – ті, при яких матеріал руйнується, або в ньому виникають помітні залишкові деформації.

Найбільше напруження, яке може витримати матеріал до початку руйнування, називають **границею міцності** і позначають $\sigma_{nc} (\sigma_s), \tau_{nc} (\tau_s)$.

Для пластичних матеріалів вважають граничним ще одне напруження, а саме – **границю текучості** $\sigma_T (\tau_T)$, коли мають місце значні деформації без помітного збільшення поздовжньої сили під час випробувань. Справа в тому, що виникнення значних залишкових деформацій в деталях не допустиме в багатьох випадках і розглядається як порушення їх міцності та надійності в експлуатації. Наприклад, подовження лопаток турбіни на величину більшу, ніж зазор до корпусу, приведе до їх руйнування.

Очевидно, що для забезпечення міцності елементів конструкції треба, щоб виникаючі в них робочі напруження були менші за граничні. Але якщо робочі напруження дуже близькі до граничних (хоч і менші за них), то міцність деталі гарантувати не можна. Тому при розрахунках на міцність робочі напруження порівнюють не з граничними, а з допустимими.

Допустимі напруження – це такі, при яких гарантована безпечна робота деталі. Позначають їх $[\sigma]$ і визначають як деяку частину від граничних напружень:

$$[\sigma] = \frac{\sigma_{gr}}{[n]},$$

де $[n]$ – **нормативний коефіцієнт запасу міцності**, який вибирають за відповідними довідниками в кожній галузі промисловості.

Фізичний зміст **умови міцності** елемента конструкції полягає в тому, що робочі (фактичні) напруження не повинні бути більші, ніж допустимі:

$$\max \sigma = \frac{\max N_z}{A} \leq [\sigma]$$

Найбільше значення нормальної сили слід брати з епюр N_z .

Залежно від того, що відомо (задано) і що необхідно визначати, розрізняють **три типи розрахунків на міцність**: перевірний, проектний і розрахунок допустимого навантаження.

При **перевірному розрахунку** вважаються відомими навантаження, матеріал з граничними та допустимими напруженнями і розміри елемента конструкції. Перевірка умови міцності здійснюється безпосередньо за формулою, поданою вище.

Проектний розрахунок означає пошук необхідних за умови міцності розмірів поперечного перерізу елемента, зокрема, його площі:

$$A \geq \frac{\max N_z}{[\sigma]}.$$

Величину **найбільшої допустимої нормальної сили** визначають за відомими розмірами поперечного перерізу бруса та допустимим напруженням так:

$$[\max N_z] \leq A \cdot [\sigma].$$

Розрахунок же допустимого зовнішнього навантаження ведуть у відповідності з епюрою нормальних сил чи іншими їх залежностями від зовнішнього навантаження.

2.4.2. Пружні переміщення та деформації, умови жорсткості елементів конструкцій

При навантаженні пружного тіла водночас з появою в ньому напружень воно деформується, а його уявні точки отримують переміщення. При деформуванні стержнів доцільно розглядати переміщення не окремих точок, а поперечних перерізів, які у відповідності з **гіпотезою плоских перерізів** *приймаються як абсолютно жорсткі диски, що отримують лінійні та кутові переміщення*.

Абсолютне лінійне переміщення торцевого перерізу бруса, або ж його подовження, можна визначити за законом Гука:

$$W_z = \Delta l = \frac{N_z \cdot l}{E \cdot A},$$

де N_z – нормальна сила в перерізах даної ділянки бруса довжиною l ;

E – модуль поздовжньої пружності матеріалу;

A – площа поперечного перерізу на даній ділянці бруса.

Добуток “ $E \cdot A$ ”, що являє собою пружно–геометричну характеристику поперечного перерізу бруса, називають *поздовжньою жорсткістю*.

Відносну величину подовження, що характеризує інтенсивність деформування, називають **поздовжньою деформацією**:

$$\varepsilon = \frac{\Delta l}{l} = \frac{N \cdot l}{E \cdot A \cdot l} = \frac{\sigma}{E}.$$

Для забезпечення надійних умов експлуатації цілого ряду конструкцій необхідно обмежувати величину пружних переміщень перерізів, тобто виконувати *умову жорсткості*. Так, при розтяганні важливо, щоб найбільше переміщення перерізів бруса (чи то його деформація) не перевищувало допустимої, регламентованої нормами, величини.

2.4.3. Статично невизначувані системи та особливості їх розрахунків

Пружна система (конструкція) є **статично невизначуваною**, якщо зусилля в її елементах не можуть бути знайдені тільки із рівнянь статички. Такі конструкції найбільш широко розповсюджені як більш жорсткі, надійні та економічні в порівнянні зі статично визначуваними. У багатьох випадках статично невизначувані системи є єдино можливими варіантами реалізації самої конструкції.

Ступінь статичної невизначуваності системи визначається надлишком загального числа невідомих реакцій зовнішніх в'язей і внутрішніх зусиль по відношенню до числа незалежних рівнянь рівноваги, які можна скласти для даної системи. Ступінь статичної невизначуваності системи встановлюється за формулою

$$m = R - S,$$

де R – кількість невідомих зусиль (у тому числі реакції в'язей);

S – число незалежних рівнянь статички, які можна скласти для розглядуваної системи сил.

Визначення всіх невідомих сил, тобто розкриття статичної невизначуваності, можливе тільки шляхом складання рівнянь, що доповнюють число рівнянь статички до числа невідомих. Ці додаткові рівняння відображають особливості геометричних в'язей, накладених на деформовану систему, і можуть бути складені за допомогою уявлення картини переміщень в конструкції при її деформуванні. Тому їх називають **рівняннями сумісності переміщень**. Методи розрахунку статично невизначуваних систем підрозділяються в залежності від того, що приймається при розв'язанні задачі за основні невідомі.

У разі, коли основними шуканими є зусилля системи (в розумінні забезпечення рівноваги системи і її геометричної незмінності), тобто зайві невідомі X_i ($i=1,2,\dots,m$), метод носить назву **метода сил**. Якщо основними невідомими є деформації або переміщення в системі, то розрахунок ведуть за так званим **методом переміщень**. Існує досить великий різновид цих основних і змішаних методів.

Розрахунок статично невизначуваної системи за методом сил починається з вибору *основної системи*. Для отримання основної системи необхідно усунути “зайві” в'язі так, щоб задана стержнева система виявилася *статично визначуваною, залишаючись геометрично незмінною і нерухомою*. Усувають також і зовнішнє навантаження. Одній і тій же статично невизначуваній конструкції може відповідати багато варіантів основної системи. Вдалий вибір основної системи дозволяє різко скоротити об'єм обчислювальної роботи.

Далі із основної системи формують *еквівалентну систему*, для чого замість відкинутих “зайвих” в'язей прикладають невідомі відповідні зусилля X_i і відновлюють зовнішнє навантаження. *Еквівалентна система деформується так, як і задана*.

Для еквівалентної системи складають рівняння сумісності переміщень з урахуванням особливостей відкинутих “зайвих” в'язей. *Так, якщо в заданій системі переміщення будь-якого перерізу є неможливим, то і в еквівалентній системі таке переміщення неможливе*. **Число рівнянь сумісності переміщень повинно дорівнювати ступеню статичної невизначуваності системи.**

Розв'язуючи рівняння переміщень сумісно з рівняннями статички, можна визначити невідомі зусилля X_i в елементах системи. Причому, якщо система з жорсткими в'язями, то рівняння сумісності переміщень утворюють самостійну систему, а її розв'язання дає значення зайвих невідомих. Якщо система має пружні в'язі, то необхідно розв'язувати сумісно рівняння переміщень і статички.

3. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК ЗА УМОВАМИ МІЦНОСТІ І ЖОРСТКОСТІ

3.1. Чисте плоске згинання

Згинання – це такий вид опору, коли в поперечних перерізах певної ділянки стержня виникають тільки згинальний момент і (можливо) ще й поперечна сила. Найчастіше такий вид опору зазнають балки.

Розглянемо випадок чистого згинання балки (рис.3.1,а). Поперечна сила в цьому випадку відсутня ($Q_y = 0$), а значення згинального моменту постійні ($M_x = M = \text{const}$) в межах довжини l балки (рис.3.1,б). Згинання буде плоским тоді, коли площина дії сил і моментів збігається з головною віссю перерізу.

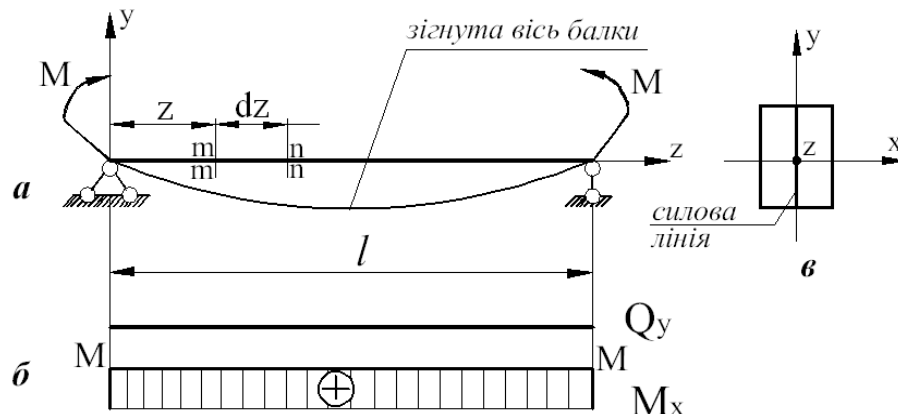


Рис.3.1. Чисте плоске згинання балки

Таким чином, **чисте плоске згинання** характеризується наявністю в поперечному перерізі балки тільки одного внутрішнього силового фактора: згинального моменту M_x (чи M_y), площина дії якого збігається з головною центральною віссю x чи y перерізу. Так, чисте плоске згинання зазнає балка, якщо до неї прикладені два рівних за величиною та протилежних за напрямком зовнішні моменти M , розташовані в одній площині, що утримує поздовжню вісь z балки і збігається з однією з головних осей перерізів (рис.3.1,а, в).

Площини, утворені поздовжньою віссю балки z та центральною головною віссю x (чи y) поперечного перерізу, називають **головними площинами**.

Лінію перетину силової площини з поперечним перерізом балки називають **силовою лінією**. При **чистому плоскому згинанні** силова лінія збігається з однією із головних центральних осей поперечного перерізу (рис.3.1,в).

3.2. Нормальне напруження в поперечному перерізі балки при чистому плоскому згинанні

Для визначення напружень при чистому плоскому згинанні приймають такі гіпотези і припущення:

1. Поперечні перерізи балки плоскі до навантаження залишаються плоскими і під час згинання, повертаючись так, що залишаються перпендикулярними до зігнутої осі балки (рис.3.2,а). Тобто, гіпотеза плоских перерізів Бернуллі при чистому згинанні прямих стержнів є прийнятною.

2. Умовні поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, тобто контактні напруження між ними відсутні.

Неважко уявити, що при згинанні балки (рис.3.2,а) одні (нижні) прошарки волокон зазнають розтягання і подовжуються, а інші (верхні) – стиснуті і укорочуються. Завдяки нерозривності деформацій є шар волокон, які не змінюють свою початкову довжину. Такий

шар волокон називають **нейтральним**. Лінію перетину **нейтрального шару** з площиною поперечного перерізу балки назвали **нейтральною лінією**, або віссю, бо навколо неї і повертаються перерізи (рис.3.2,б).

Очевидно, що **нейтральна лінія** перпендикулярна до силової площини і проходить через центр перерізу. Неважко довести, що нейтральна лінія збігається з головною віссю перерізу, перпендикулярною до силової лінії.

3. По ширині поперечного перерізу (на одному рівні) нормальні напруження однакові, оскільки волокна одного шару деформуються однаково.

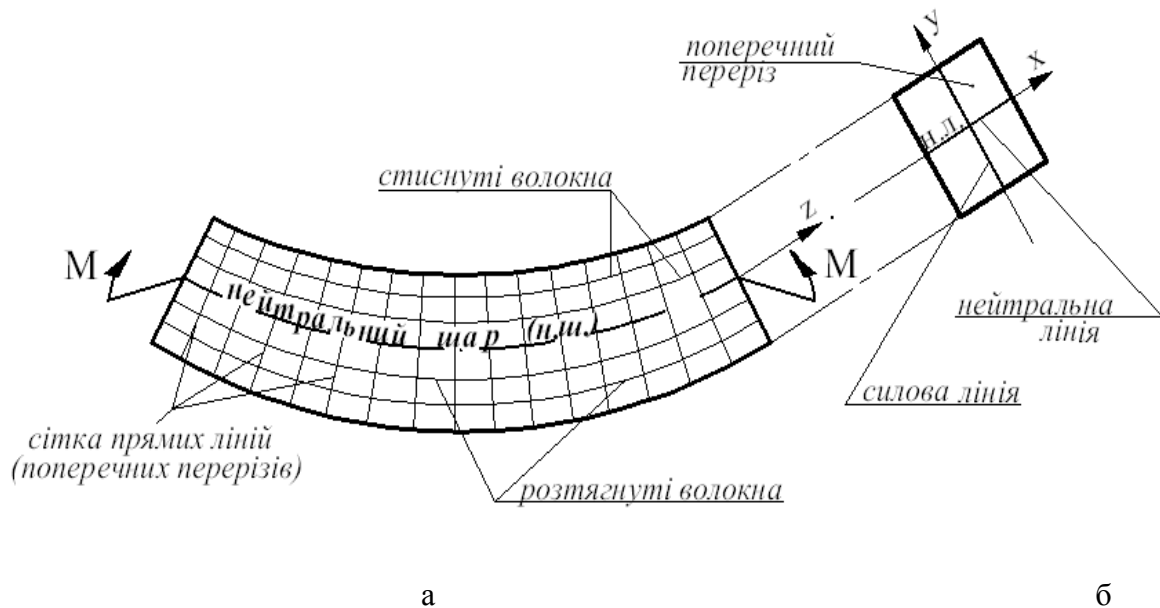


Рис.3.2. Схема згинання балки

2. Умовні поздовжні волокна не тиснуть одне на одне, тобто контактні напруження між ними відсутні.

Неважко уявити, що при згинанні балки (рис.3.2,а) одні (нижні) прошарки волокон зазнають розтягання і подовжуються, а інші (верхні) – стиснуті і укорочуються. Завдяки нерозривності деформацій є шар волокон, які не змінюють свою початкову довжину. Такий шар волокон називають **нейтральним**. Лінію перетину **нейтрального шару** з площиною поперечного перерізу балки назвали **нейтральною лінією**, або віссю, бо навколо неї і повертаються перерізи (рис.3.2,б).

Очевидно, що **нейтральна лінія** перпендикулярна до силової площини і проходить через центр перерізу. Неважко довести, що нейтральна лінія збігається з головною віссю перерізу, перпендикулярною до силової лінії.

4. По ширині поперечного перерізу (на одному рівні) нормальні напруження однакові, оскільки волокна одного шару деформуються однаково.

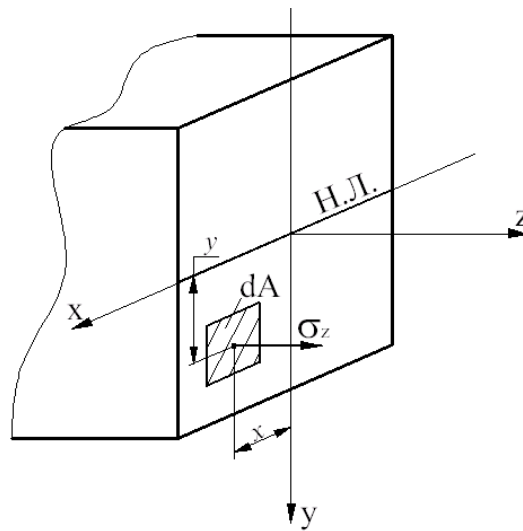


Рис.3.3. «Реалізація» згинального моменту в перерізі елементарними « $\sigma_z \cdot y \cdot dA$ »

$$M_x = \int_A \sigma_z \cdot y \cdot dA, \quad (3.1)$$

де y – віддалення від елементарної сили « $\sigma_z \cdot dA$ » до нейтральної лінії (рис.3.3);
 dA – нескінченно малий елемент площі, координати якого x та y .

Визначити σ_z безпосередньо з виразу (3.1) неможливо, поки невідома функція $\sigma_z = f(y)$. Таким чином, задача є статично невизначуваною і для її розв'язання необхідно записати рівняння сумісності переміщень з розгляду схеми деформування волокон при згинанні балки.

Двома поперечними перерізами $m-m$ та $n-n$, які розташовані один від одного на нескінченно малій відстані dz (рис.3.1, а), виділимо елемент балки (на рис.3.4 показаний пунктиром) при згинанні і розглянемо схему його деформування.

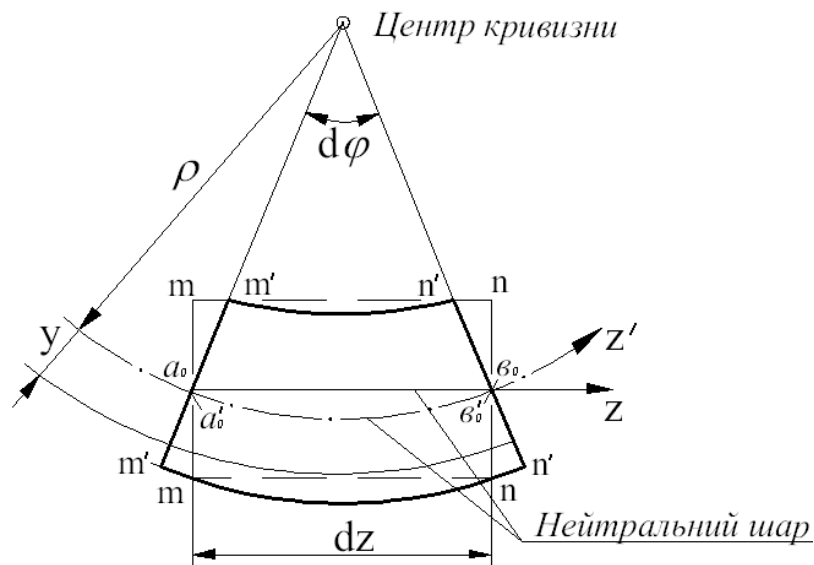


Рис.3.4. Схема деформування елемента балки при чистому згинанні

Утворення деформацій при чистому згинанні можна розглядати як результат повороту плоских поперечних перерізів $m-m$ та $n-n$ під дією згинального моменту один

відносно другого на деякий кут $d\varphi$. Елемент a_0b_0 нейтрального шару вигинається в дугу $a_0^1b_0^1$ з радіусом кривизни ρ , причому довжина цього елемента залишається незмінною, тобто $a_0b_0 = a_0^1b_0^1 = dz = \rho dy$. Волокна, які знаходяться з опуклого боку балки (в нашому випадку – нижче нейтрального шару), розтягуються.

Відносне подовження волокна, розташованого на відстані y від нейтрального шару

$$\varepsilon_z = \frac{(\rho + y)d\varphi - \rho d\varphi}{\rho d\varphi} = \frac{y}{\rho} \quad (3.2)$$

Відповідне нормальне напруження в цьому випадку згідно закону Гука при розтяганні

$$\sigma_z = E \cdot \varepsilon_z = E \frac{y}{\rho} \quad (3.3)$$

Таким чином, при чистому згинанні балки **нормальні напруження**, як і деформації, по висоті поперечного перерізу змінюються за **лінійним законом**.

Розв'язуючи тепер сумісно рівняння (3.3) і (3.1), та враховуючи те, що E і ρ не залежать від положення елемента dA в перерізі, одержимо

$$\frac{E}{\rho} \int_A y^2 dA = M_x \quad (3.4)$$

$$I_x = \int_A y^2 dA$$

Оскільки I_x – це момент інерції поперечного перерізу, то із залежності (3.4) можна отримати вираз для кривизни нейтрального шару

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M_x}{EI_x}, \quad (3.5)$$

де: EI_x – це жорсткість балки при згинанні;

$\frac{1}{\rho}$ – кривизна поздовжньої вісі зігнутої балки, яка є мірою її деформування при згинанні.

Підставивши вираз (3.5) в закон Гука (3.3), можна одержати формулу для визначення нормальних напружень в будь-якій точці поперечного перерізу балки при її чистому згинанні:

$$\sigma_z = \frac{M_x}{I_x} y \quad (3.6)$$

де M_x – згинальний момент в розглядуваному перерізі;

I_x – головний момент інерції перерізу відносно його нейтральної лінії;

y – віддалення від нейтральної лінії до точки перерізу, в якій обчислюється нормальне напруження.

Епюра нормальних напружень $\sigma_z = f(y)$ згідно функції (3.6) – лінійна (рис.3.5,б).

Із рис.3.5,б видно, що максимальні нормальні напруження виникають в точках, найбільш віддалених від нейтральної лінії:

$$\sigma_{z\max} = \frac{M_x}{I_x} y_{\max} = \frac{M_x}{W_x}, \quad (3.7)$$

де $W_x = \frac{I_x}{y_{\max}}$ – осьовий момент опору перерізу при згинанні.

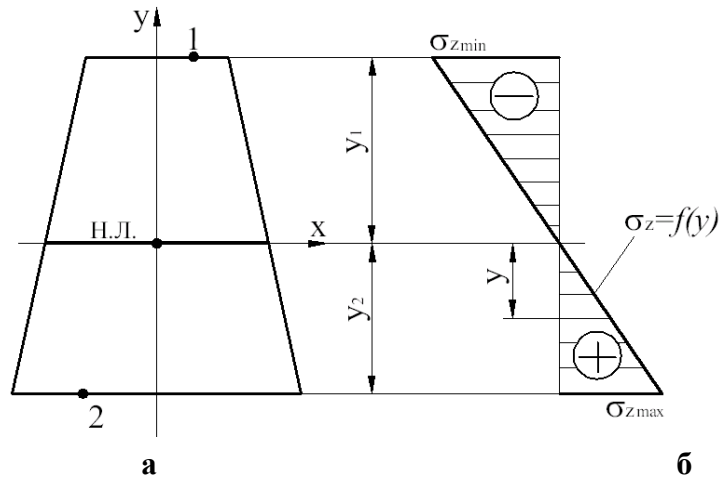


Рис.3.5. Розподіл нормальних напружень σ_z (б) в перерізі балки (а) при чистому згинанні

Для стандартних профілів (двотавр, швелер) значення осьових моментів опору W_x , W_y наведені в сортаменті (для двотавра – ГОСТ 8239–89, для швелера – ГОСТ 8240–89, див. додатки 3,4).

Для нестандартних профілів моменти опору визначають з простих формул. Наприклад, для перерізу прямокутної форми

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{(bh^3/12)}{h/2} = \frac{bh^2}{6}; \quad W_y = \frac{hb^2}{6}, \quad (3.8)$$

тут b, h – відповідно ширина і висота поперечного перерізу;

- для перерізу квадратної форми

$$W_x = W_y = \frac{a^3}{6}, \quad (3.9)$$

де a – розмір сторони квадратного перерізу;

- для круглого перерізу

$$W_x = \frac{I_x}{y_{\max}} = \frac{(\pi d^4/64)}{(d/2)} = \frac{\pi d^3}{32}; \quad \text{причому } W_x = W_y, \quad (3.10)$$

тут d – діаметр суцільного круглого перерізу.

Для кільцевого перерізу величина W_x являє собою різницю моментів інерції зовнішнього кола діаметром d і внутрішнього отвору діаметром d_0 , поділену на $y_{\max} = d/2$, тобто

$$W_x = \frac{\left(\frac{\pi d^4}{64} - \frac{\pi d_6^4}{64} \right)}{(d/2)} = \frac{\pi d^3}{32} (1 - c^4) \quad (3.11)$$

тут $c = d_6/d$ – коефіцієнт.

3.3. Умова міцності при чистому плоскому згинанні

Згідно з формулою (3.7) умова міцності має вигляд

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{x \max}}{W_{\max}} \leq [\sigma] \quad (3.12)$$

де $M_{x \max}$ – абсолютне значення найбільшого згинального моменту в небезпечному перерізі, чисельне значення якого беруть із епюри M_x ;

$[\sigma]$ – допустиме напруження при розтяганні чи стисканні.

3.4. Напруження при поперечному згинанні

Розглянемо приклад навантаження балки зосередженими силами F (рис.3.6,а).

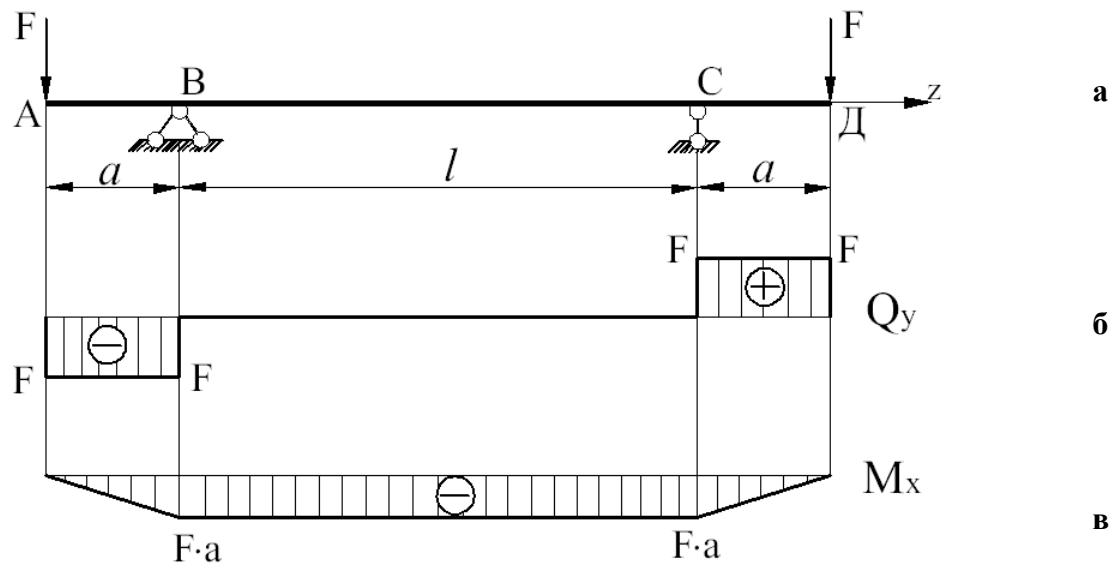


Рис.3.6. Приклад чистого і поперечного згинання балки

Із рис.3.6 видно, що на ділянці BC має місце чисте згинання, яке ми розглядали в п.п.3.1...3.3. На ділянках же AB і CD згинання характеризується наявністю в поперечних перерізах двох внутрішніх силових факторів: поперечної сили Q_y (рис.3.6,б) та згинального моменту M_x (рис.3.6,в). Такий вид опору є **поперечним згинанням**. При **поперечному згинанні** в перерізах **виникають не тільки нормальні σ_z , але й дотичні τ_{zy} напруження**

3.4.1. Нормальні напруження при поперечному згинанні

При поперечному згинанні виникають дотичні напруження в поперечному і поздовжньому перерізах, які депланують поперечні перерізи.

Якщо поперечні сили постійні в перерізах певної ділянки балки, то депланація всіх перерізів однакова і поздовжні деформації волокон будуть такими ж, як і при повороті плоских перерізів. В цьому разі формула (3.6) для визначення нормальних напружень буде вірною.

Якщо ж $Q_y = f(z)$, то ступінь депланації сусідніх поперечних перерізів буде різною. В цьому випадку формула (3.6) не буде точною, і похибка буде такої ж величини, що і відношення $\frac{h}{l}$ в порівнянні з одиницею (h – товщина балки, l – її довжина).

3.4.2. Дотичні напруження при поперечному згинанні

Щодо характеру розподілу дотичних напружень в поперечному перерізі балки приймають припущення, що по ширині поперечного перерізу (на одному рівні) дотичні напруження розподілені рівномірно, тобто τ_{zy} постійні по ширині.

Формула Д.І.Журавського для визначення дотичних напружень при поперечному згинанні має такий вигляд:

$$\tau_{zy} = \frac{Q_y \cdot S_x(y)}{b(y) \cdot I_x}, \quad (3.13)$$

де τ_{zy} – дотичне напруження в розглядуваній точці поперечного перерізу;

Q_y – абсолютне значення поперечної сили в розглядуваному перерізі;

S_x – абсолютне значення статичного моменту частини перерізу, відсіченої на рівні розглядуваної точки;

$b(y)$ – ширина перерізу балки на рівні, де визначають дотичні напруження;

I_x – головний момент інерції всього перерізу відносно його центральної вісі x .

Абсолютне значення статичного моменту відсіченої частини перерізу обчислюється за формулою

$$S_x(y) = A^{widc} \cdot y^*,$$

тут A^{widc} та y^* – відповідно площа відсіченої частини перерізу і віддалення її центра ваги c_s відносно центральної вісі x (рис.3.7,а)

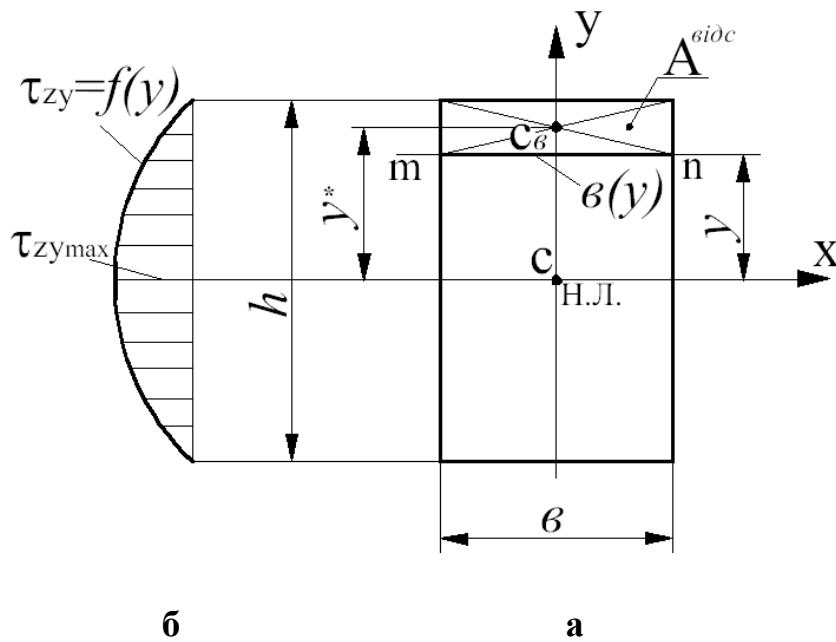


Рис.3.7. Прямокутний переріз (а) та епюра розподілу дотичних τ_{zy} (б) напружень при поперечному згинанні

Для поперечного перерізу значення Q_y та I_x є сталі величини; в залежності від форми перерізу ширина $b(y)$ перерізу може бути, взагалі, змінною величиною (при наявності форми перерізу функція $b(y)$ – відома). На відміну від Q_y та I_x значення статичного моменту $S_x(y)$ відсіченої частини перерізу має змінну величину, яка залежить від y^* . Так, для балки прямокутного перерізу зі сторонами b і h (рис.3.7,а):

- площа частини перерізу, відсіченої на рівні розглядуваного шару волокон mn :

$$A^{\text{відс}} = b\left(\frac{h}{2} - y\right);$$

- статичний момент цієї площі

$$S_x(y) = S_{x_C}^{\text{відс}} = A^{\text{відс}} \cdot y^* = b\left(\frac{h}{2} - y\right) \cdot \left[y + \frac{1}{2}\left(\frac{h}{2} - y\right)\right] = \frac{b}{2}\left(\frac{h^2}{4} - y^2\right).$$

Отже, **епюра дотичних напружень** по висоті прямокутного перерізу окреслюється **квадратичною параболою** (рис.3.7,б). Найбільші дотичні напруження виникають при $y=0$

$$\tau_{zy} = \tau_{zy \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{bh} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_y}{A}.$$

У найвіддаленіших від нейтральної лінії точках перерізу дотичні напруження відсутні, оскільки $S_x^{\text{відс}} = 0$.

Слід зауважити, що практичне застосування формули (3.13) для визначення дотичних напружень в прямокутних перерізах справедливо при $h \gg b$.

Із рис.3.7 можна зробити висновок, що максимальні нормальні і дотичні напруження виникають в різних точках поперечного перерізу: для дотичних напружень небезпечні точки належать нейтральній лінії, для нормальних напружень небезпечні точки – найбільш віддалені від нейтральної лінії.

Зробимо аналіз абсолютних значень максимальних нормальних $\sigma_{z \max}$ і максимальних дотичних $\tau_{zy \max}$ напружень, які виникають в поперечних прямокутних перерізах консольної балки (рис.3.8).
Переріз C – небезпечний:

$$Q_{y \max} = F; \quad M_{x \max} = Fl;$$

$$W_x = \frac{bh^2}{6}; \quad A = bh;$$

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} = \frac{6Fl}{bh^2}; \quad \tau_{zy \max} = \frac{3}{2} \cdot \frac{Q_{y \max}}{A} = \frac{3}{2} \cdot \frac{F}{bh}.$$

Звідси
$$\frac{\tau_{zy \max}}{\sigma_{z \max}} = \frac{h}{4l}.$$

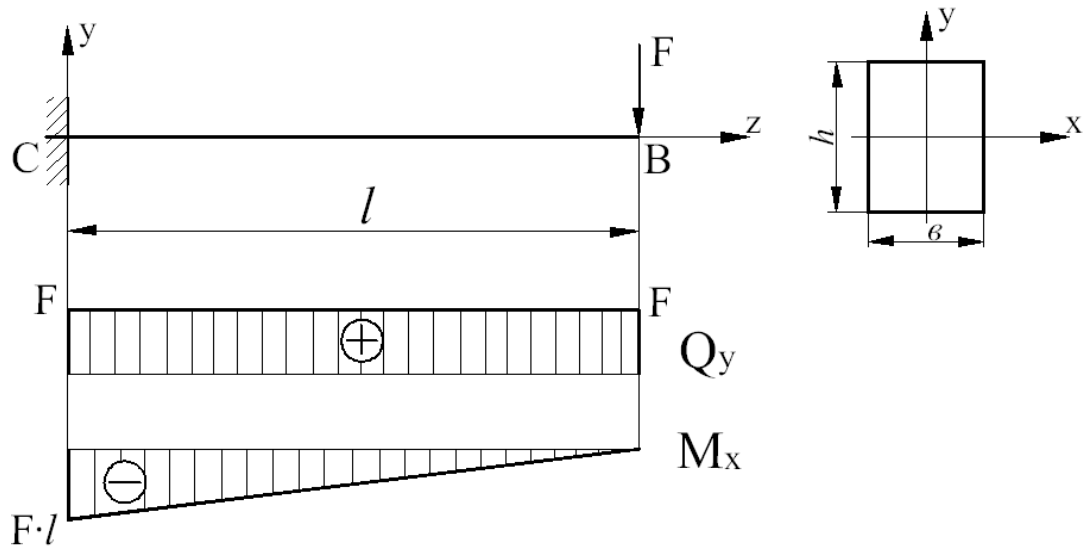


Рис.3.8. До порівняння найбільших дотичних τ_{zy} і нормальних σ_z напружень при поперечному згинанні

Це свідчить про те, що максимальні дотичні напруження при поперечному згинанні значно менші нормальних напружень ($h \ll 4l$).

У випадку плоского поперечного згинання умови міцності можуть бути записані у вигляді:

$$\sigma_{z \max} = \frac{M_{x \max}}{W_x} \leq [\sigma];$$

$$\tau_{zy \max} = \frac{Q_{y \max} \cdot S_x(y)_{\max}}{b(y)I_x} \leq [\tau],$$

(3.14)

де $[\sigma]$, $[\tau]$ – допустиме нормальне та дотичне напруження.

У зв'язку з незначною величиною $\tau_{zy \max}$ в довгих нетовстих балках розрахунок на міцність елементів конструкцій із пластичних матеріалів при поперечному згинанні

проводять тільки за нормальними напруженнями. Однак, для коротких товстих балок (особливо з легко сколюваних матеріалів – дерево, волокнисті пластики тощо) τ можуть бути небезпечними і необхідно перевіряти міцність по дотичним напруженням.

3.5. Переміщення при плоскому поперечному згинанні

Стержні, які застосовуються в інженерних спорудах і зазнають деформацію згинання, повинні мати не тільки відповідну міцність, але й достатню жорсткість. Під дією зовнішніх навантажень переміщення їх перерізів не повинні перевищувати встановлених нормами допустимих значень.

Тому на практиці виникає часто потреба проводити розрахунок стержнів при згинанні не тільки на міцність, але й на жорсткість. Для виконання розрахунку на жорсткість треба вміти обчислювати відповідні переміщення перерізів.

Розглянемо переміщення перерізів при згинанні консольної балки (рис.3.10).

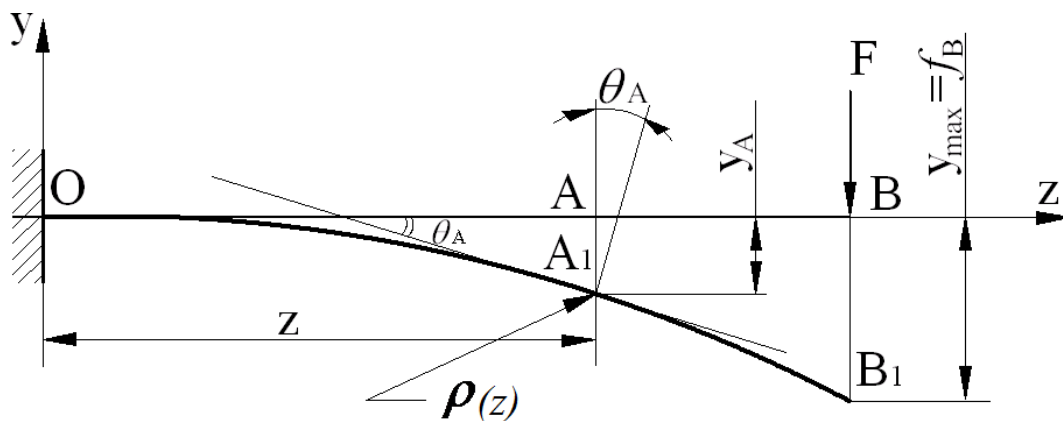


Рис.3.10. Переміщення при згинанні балки: OB – недеформована вісь балки; OB_1 – зігнута вісь балки; θ_A – кутове переміщення перерізу A ; y_A – лінійне переміщення перерізу; ρ_z – радіус кривизни вісі балки

При плоскому поперечному згинанні **зігнута вісь** балки лежить в силувій площині і збігається з головною площиною. Викривлену вісь балки називають **зігнутою віссю** або **пружною лінією**.

Положення поперечного перерізу балки при згинанні визначається двома переміщеннями (див. рис.3.10):

1. $y_A = y(z)$ – **лінійне переміщення** центра ваги перерізу в напрямі, перпендикулярному до недеформованої осі балки, яке називають **прогином**;

2. $\theta_A = \theta(z)$ – **кутове переміщення**, а саме: кут повороту перерізу навколо нейтральної вісі перерізу відносно його початкового положення.

Вважають, що довжина зігнутої поздовжньої осі, що належить нейтральному шару, при викривленні балки не змінюється.

Найбільший прогин $y_{\max}$ позначають літерою f (на рис.3.10 $y_{\max} = f_B$).

При пружних деформаціях кут повороту дуже малий ($\theta < 1^\circ$), тому можна вважати, що $\operatorname{tg} \theta(z) \approx \theta(z)$. Оскільки тангенс кута повороту є похідною від функції прогинів

$$\operatorname{tg} \theta(z) = \frac{dy}{dz},$$

то можна записати

$$\theta(z) = \frac{dy}{dz} = y'(z). \quad (3.15)$$

Таким чином, прогин і кути поворотів балки на будь-якій відстані z від початку координат можуть бути визначені, якщо відоме рівняння зігнутої осі балки.

3.6. Диференціальне рівняння зігнутої осі балки

Між кривизною $1/\rho$ зігнутої осі балки (пружної лінії), згинальним моментом M_x , який зумовлює цю кривизну, та жорсткістю балки при згинанні EI_x має місце така аналітична залежність (див. формулу (3.5)):

$$\frac{1}{\rho(z)} = \frac{M_x(z)}{EI_x}, \quad (3.16)$$

тут $\rho(z)$ – радіус кривизни пружної лінії балки в площині на відстані z від початку координат;

$M_x(z)$ – згинальний момент в тому ж перерізі балки.

З курсу вищої математики відомо, що в системі координат YZ кривизна плоскої кривої

$$\frac{1}{\rho(z)} = \pm \frac{y''(z)}{[1 + y'(z)^2]^{3/2}}. \quad (3.17)$$

Прирівнюючи праві частини співвідношень (3.16) і (3.17), матимемо точне диференціальне рівняння зігнутої вісі балки

$$EI_x \frac{y''(z)}{[1 + y'(z)^2]^{3/2}} = \pm M_x. \quad (3.18)$$

Враховуючи, що кути повороту перерізів балки малі, то величиною $y'(z)^2$ порівняно з одиницею можна знехтувати. Тоді із виразу (3.18) можна записати приближене диференціальне рівняння пружної лінії балки

$$EI_x \cdot y''(z) = \pm M_x. \quad (3.19)$$

Для вибраного напрямку осі y (вгору) в правій частині рівняння потрібно брати знак плюс. В подальшому ми будемо направляти вісь y вгору, записуючи рівняння (3.19) у вигляді

$$EI_x \cdot y''(z) = M_x. \quad (3.20)$$

Інтегруючи його двічі чи один раз, можна визначити лінійні $y(z)$ та кутові $\theta(z)$ переміщення перерізів балки за будь-яких умов навантаження.

Приклад 3.1. Знайти прогини і кути повороту перерізів балки, зображеної на рис.3.11.

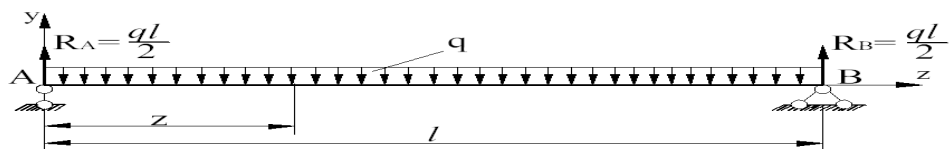


Рис.3.11. До визначення кутових і лінійних переміщень перерізів балки

Розв'язання.

Визначаємо реакції опор, скориставшись симетрією системи

$$R_A = R_B = \frac{ql}{2}$$

Записуємо вираз для згинального моменту у перерізі на відстані z від початку координат

$$M_x = R_A \cdot z - \frac{qz^2}{2} = \frac{ql}{2}z - \frac{qz^2}{2}$$

Підставляємо вираз для M_x в рівняння (3.20), маємо

$$y''(z) = \frac{ql}{2EI_x}z - \frac{qz^2}{2EI_x}$$

Інтегруємо двічі:

$$y'(z) = \theta(z) = \frac{ql}{4EI_x}z^2 - \frac{qz^3}{6EI_x} + C; \quad (3.21)$$

$$y(z) = \frac{ql}{12EI_x}z^3 - \frac{qz^4}{24EI_x} + C \cdot z + D \quad (3.22)$$

Значення сталих C та D визначимо з умов закріплення балки:

при $z = 0$ прогин $y(0) = 0$;

при $z = l$ прогин $y(l) = 0$.

З першої умови маємо

$$y(0) = D = 0.$$

Друга умова дає

$$y(l) = \frac{ql^4}{12EI_x} - \frac{ql^4}{24EI_x} + C \cdot l = 0$$

$$C = -\frac{ql^3}{24EI_x}$$

значення

Підставляючи значення C і D в рівняння (3.21) та (3.22), одержуємо відповідно кут повороту

$$y'(z) = \theta(z) = \frac{ql}{4EI_x}z^2 - \frac{qz^3}{6EI_x} - \frac{ql^3}{24EI_x}$$

та прогин будь-якого перерізу балки

$$y(z) = \theta(z) = \frac{ql}{12EI_x} z^3 - \frac{qz^4}{24EI_x} - \frac{ql^3}{24EI_x} z$$

У розглянутому випадку балка має одну вантажну ділянку AB і для визначення прогинів та кутів повороту потрібно було визначати дві сталі. В загальному випадку навантаження балка може мати багато ділянок. Кількість сталих інтегрування зростає вдвічі порівняно з кількістю ділянок. Виникають певні труднощі визначення сталих.

Однак, якщо при складанні диференціальних рівнянь пружної лінії балки та при їх інтегруванні дотримуватись певних правил, то число сталих інтегрування при будь-якій кількості ділянок можна звести до відшукування всього двох сталих: прогину y_0 та кута повороту θ_0 на початку координат, так званих **початкових параметрів**.

3.7. Визначення переміщень у балках за методом початкових параметрів. Універсальне рівняння пружної лінії балки

Метод початкових параметрів дає можливість записати всього одне рівняння прогинів або кутів поворотів перерізів, яке є придатним для всіх ділянок балки. Тому таке рівняння називають **універсальним рівнянням пружної лінії**, яке враховує всі види навантажень: зосереджену силу F , зосереджений момент M , розподілене навантаження $q(z)$. Для балки (рис.3.12) при вибраній системі координат осей y і z та різних видах навантаження універсальне рівняння пружної лінії може мати такий вигляд:

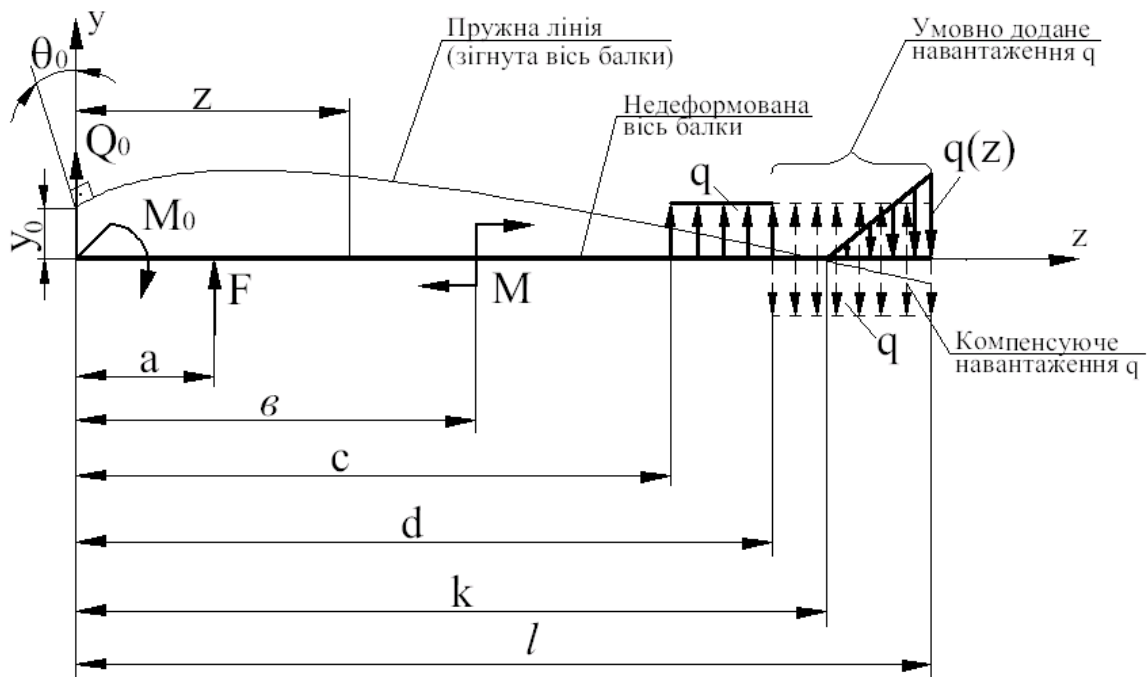


Рис.3.12. До запису універсального рівняння пружної лінії балки

$$y(z) = y_0 + \theta_0 \cdot z + \frac{1}{EI_x} \left(M_0 \frac{z^2}{2!} + Q_0 \frac{z^3}{3!} + \left| F \frac{(z-a)^3}{3!} + \left| M \frac{(z-b)^2}{2!} + \right. \right. \right. \\ \left. \left. \left. + \left| q \frac{(z-c)^4}{4!} - \left| q \frac{(z-d)^4}{4!} - \left| q(z) \frac{(z-k)^5}{5!} \right. \right. \right. \right) \right. \quad (3.23)$$

де: y_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 – початкові параметри, відповідно: прогин, кут повороту поперечного перерізу, згинальний момент і поперечна сила на початку координат;

a , b , c , d , k – відстань від початку координат до місця прикладення відповідно зосередженої сили F , зосередженого момента M чи початку дії рівномірно розподіленого навантаження q і початку дії трикутного навантаження $q(z)$;

E – модуль поздовжньої пружності матеріалу балки;

I_x – момент інерції поперечного перерізу балки відносно осі x (нейтральної лінії);

EI_x – жорсткість балки при згинанні.

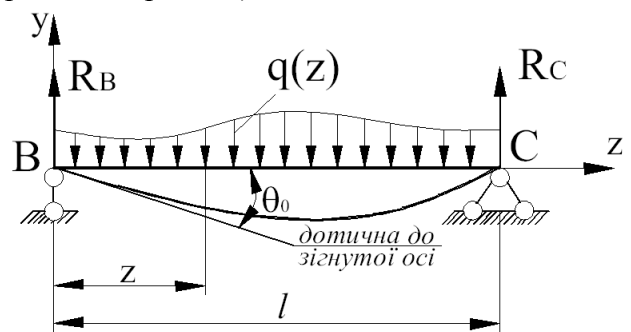
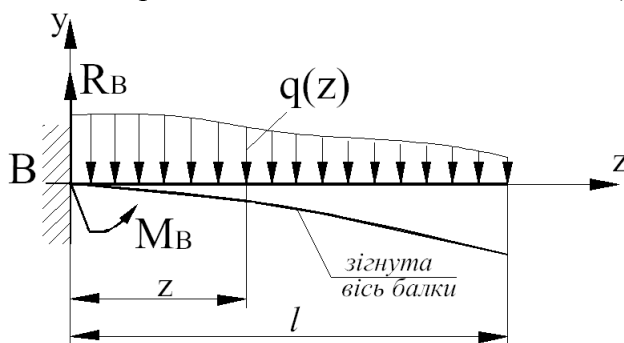
Лінія $z > a$ – переривник (одинична розривна функція) означає, що враховується лише відповідне навантаження, яке діє тільки ліворуч від розглядуваного перерізу, тобто при $z < a$.

Прогин y_0 та кут повороту θ_0 – геометричні початкові параметри; згинальний момент M_0 та поперечна сила Q_0 в перерізі, який збігається з початком координат, – статичні початкові параметри.

Прогин y_0 і кут повороту θ_0 початкового (лівого кінцевого) перерізу балки визначають із умов закріплення балки (рис.3.13,а, б, в), M_0 і Q_0 – з епюр M_x і Q_y .

Початкові параметри y_0 , θ_0 , M_0 , Q_0 можуть бути додатними, від’ємними або дорівнювати нулю (див. рис.3.13,а, б, в).

Знаки доданків визначаються знаками відповідних зовнішніх силових факторів: сила і розподілене навантаження спрямовані вгору – додатні, додатний і зосереджений момент, спрямований за ходом годинникової стрілки. Тобто правила знаків такі ж, які були прийняті для поперечних сил і згинальних моментів (див. рис.2.8 та рис.2.9).



$$y_0 = 0; \theta_0 \neq 0;$$

$$M_0 = 0; Q_0 = R_B.$$

$$y_0 = 0; \theta_0 = 0;$$

$$M_0 = -M_B; Q_0 = R_B.$$

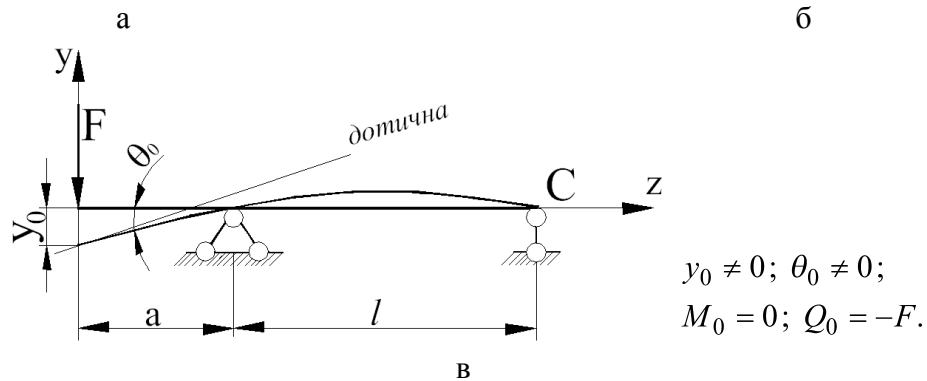


Рис.3.13. Залежність початкових параметрів від умов закріплення балки

При складанні рівнянь пружної лінії балки потрібно дотримуватися ще й таких правил:

1. Початок координат слід вибирати в крайній лівій точці розглядуваної балки та зберігати його загальним для всіх ділянок.
2. У рівняння підставляють тільки ті навантаження, які прикладені ліворуч від розглядуваного перерізу, на що і вказують вертикальні лінії (переривники).
3. Якщо розподілене навантаження $q(z)$ обривається на одній із ділянок балки, то його умовно продовжують до правого кінця балки, одночасно вводячи компенсуюче навантаження тієї ж інтенсивності, але зворотного напрямку (див. рис.3.12).

3.8. Умова жорсткості при згинанні

Переміщення перерізів балки під дією зовнішніх навантажень не повинно перевищувати встановлених нормами значень для даної конструкції.

Розрахунок балок на жорсткість здійснюється за максимальним прогином $y(z)_{\max}$, і умова жорсткості має вигляд

$$y(z)_{\max} \leq [f],$$

(3.24)

де $[f]$ – допустимий прогин, який визначають на підставі експериментальних та експлуатаційних даних згідно нормативів.

Для визначення максимального прогину $y(z)_{\max}$ можна скористатися універсальним рівнянням пружної лінії (3.23) балки. Визначивши переміщення характерних перерізів балки, будують епюру прогинів. На побудованій епюрі виявляють найбільший прогин.

Список літератури

1. Горик О.В. Основи розрахунку інженерних конструкцій: Навч. посібник – Полтава: ПДТУ. 2000. – 286 с.
2. Дяченко С.С. Фізичні основи міцності та пластичності металів: Навч. посібник – Харків: Видавництво ХНАДУ, 2003. – 226 с.
3. Корнілов О.А. Опір матеріалів. – Київ: Лотос. 2000. – 551 с.
4. Опір матеріалів з основами теорії пружності й пластичності / за заг. ред. В.Т. Піскунова. У 2-х частинах, 5-ти книгах. – К.: Вища школа. 1994, 1995.
5. Писаренко Г.С., Квітка О.Л., Уманський Е.С. Опір матеріалів. – К.: Вища школа. 2004. – 655с.
6. Посацький С.Л. Опір матеріалів. Підручник. Львів: Вид-во Львівського університету. 1973. – 404 с.
7. Тимошенко С.П. Гере Дж. Механика материалов. Издво «Мир» (перевод с английского). 1976. – 670 с.
8. Соппротивление материалов. Лабораторные работы. Цурпал И.А., Барабан Н.П., Швайко В.М. – К.: Вища школа. 1978. – 192 с.
9. Опір матеріалів. Розрахункові роботи. Ковтун В.В., Павлов В.С., Дорофєєв О.А. //Навчальний посібник. – Львів: «Афіша». 2002. – 280 с.
10. Мороз Л.С. Механика и физика деформаций и разрушения материалов. – Л.: Машиностроение, 1984. – 224 с.
11. Ольховий І.М., Стасюк Б.М., Станкевич В.З. Короткий курс опору матеріалів: Навчальний посібник.-Серія "Дистанційне навчання".-Львів: Вид-во «Національний університет "Львівська політехніка", 2004.-196 с.

ЗМІСТ

Передмова	3
Розділ 1. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ І АКсіОМИ СТАТИКИ	4
Розділ 2. ПОБУДОВА ЕПЮР ВНУТРІШНІХ СИЛОВИХ ФАКТОРІВ. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО НЕВИЗНАЧУВАНИХ СИСТЕМ ПРИ РОЗТЯГАННІ-СТИСКАННІ	9
Розділ 3. РОЗРАХУНОК СТАТИЧНО ВИЗНАЧУВАНИХ БАЛОК ЗА УМОВАМИ МІЦНОСТІ І ЖОРСТКОСТІ	25
Список використаних джерел	