

BÖLÜM I

Dersin Adı	Matematik	Tarih	10-14 Şubat 2025
Sınıf	10	Süre	6 ders saati
Alt Öğrenme Alanı	İKİNCİ DERECEDEKİ DENKLEMLER		
Konu	İkinci Dereceden Bir Bilinmeyenli Denklem Kavramı		

BÖLÜM II

Kazanım	10.4.1.1. İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem kavramını açıklar.
Değerler	VATANSEVERLİK - Toplum Bilinci
Yöntem ve Teknikler	Düz anlatım, soru-cevap, problem çözme, örnek olay, beyin fırtınası, kavram haritası
Kullanılan Araç-Gereçler	Ders kitabı, yazı tahtası, etkileşimli tahta, z-kitap, internet, fotoğraf, pergel, cetvel

BÖLÜM III

Öğrenme-Öğretme Süreci

İKİNCİ DERECEDEKİ BİR BİLİNMEYENLİ DENKLEM KAVRAMI

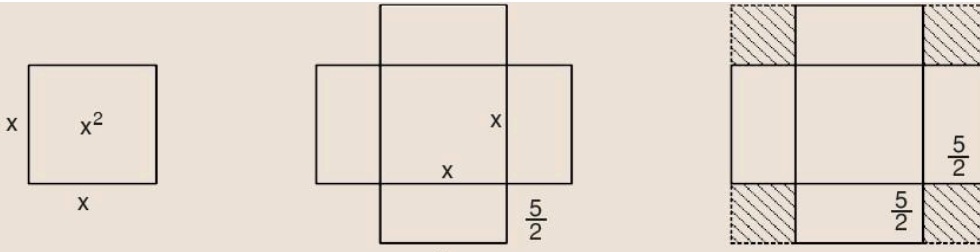
Geçmişten günümüze insanoğlu bilinmeyenlerin çözümü konusunda pek çok girişimde bulunmuştur. Bilimin bugünkü seviyesine ulaşması geçmişteki bu sabırlı çalışmaların birikiminin sonucudur. Bu bölümde ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklemlerin tarihsel gelişim sürecine ve bu süreçte rol alan Brahmagupta, Harezmi ve Abdulhamid İbn Türk'ün çalışmalarına yer verilecektir.

Harezmi (780-850)



Matematik biliminin bugünkü seviyesine gelmesinde tarihsel süreçteki bilimsel çalışmaların önemli katkısı vardır. Bu katkıyı sağlayanlardan biri de ünlü İslam matematikçisi Harezmi'dir. Harezmi, El-Kitâbü'l-Muhtasar fî Hisâb el-gabr ve'l-mukâbele (Tamamlama ve Denkleştirme ile Hesaplamanın Özet Kitabı) adlı eserinde önce aritmetiksel sayı tanımını verir ve bu sayının konumlu ve on tabanlı sistemde nasıl ifade edildiğini kısaca açıklar. Cebir terimini ilk kullanan kişidir. Cebirsel sayı tanımından sonra kendisinin geliştirdiği cebir ve mukabele sisteminde bu sayının x , x^2 ve c şeklindeki üç türünü anlatır. Daha sonra bu üç cebirsel niceliğin birbiriyle olan ilişkisinden ortaya çıkan altı durumu ele alır. Bu altı ilişkiden üçü $ax^2 = bx$, $ax^2 = c$, $bx = c$ şeklinde basit; diğer üçü $ax^2 + bx = c$, $ax^2 + c = bx$, $bx + c = ax^2$ şeklinde katışıktır. Harezmi önce bu denklemlerin analitik çözümlerini verir, daha sonra katışık denklemlerin geometrik ispatını yapar. $x^2 + 21 = 10x$ denkleminin iki farklı kökünü vermiştir. $x^2 - 2x - 5x - 6 = 0$ iyileştirme ile negatif terimleri diğer tarafa atmayı ifade ederek denklemi $x^2 = 5x + 2x + 6$

şekline dönüştürür. Sadeleştirme ile de benzer terimlerin birleştirilmesini ifade eder ve bu durumda son denklem $x^2 = 7x + 6$ şekline dönüşür. Harezmi özel olarak $x^2 + 10x = 39$ denkleminin çözümünü geometrik olarak aşağıdaki gibi bulmuştur.



$$\text{Alan} = x^2$$

$$\text{Alan} = x^2 + \left(\frac{5}{2} \cdot x\right) \cdot 4 = x^2 + 10x = 39$$

$$\text{Taralı alan} = \left(\frac{5}{2} \cdot \frac{5}{2}\right) \cdot 4 = 25$$

$$\text{Tüm alan} = (\text{Alan}) + (\text{Taralı alan})$$

$$\text{Tüm alan} = 39 + 25 = 64$$

$$64, \text{ bir kenarı } \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + x$$

olan karenin alanıdır.

$$8 = \frac{5}{2} + \frac{5}{2} + x \Rightarrow x = 3 \text{ olur.}$$

Abdulhamid İbn Türk



Cebrin kurucularından olduğu kabul edilen İslam matematikçisidir. Doğum tarihi belli değildir. Doğduğu veya yaşadığı şehir de kesinlikle bilinmemekte, bu yerin Hazar denizinin güneyindeki Gılân yahut Çin Türkistanı'nın batısındaki Huttal olduğu sanılmaktadır. Biri Kitâbü'l-Câmi fi'l-Hisâb, diğeri Kitâbü'l-Muâmelât adını taşıyan iki kitabının bulunduğu kayıtlıdır. Bazı kaynaklarda hesap ilminde çok bilgili ve maharet sahibi olduğu, bu ilmin mensuplarının daima ondan bahsettikleri söylenmektedir. Bu iki eserinden başka Kitâbü Nevâdiri'l-Hisâb ve Havâssü'l-Adâd adlı iki kitabının daha varlığı bildirilmektedir. Ancak bu iki adın bir tek esere ait olması da mümkündür. Harezmi ile aynı dönemde yaşamıştır. Bu nedenle cebirin kurucusunun Harezmi mi Abdulhamid ibn Türk mü olduğu konusu tartışmalıdır. Üç tip ikinci derece denklemini sistemli bir yaklaşımla ve geniş açıklamalar yaparak ayrıntılı biçimde çözmektedir. Çözüm için seçtiği metot geometrik yoldur ve Mezopotamya geleneğini devam ettirmekte, formül kullanmadan sözlü anlatımla sonuca varmaktadır. Denklemleri incelemesi, kendinden önce gelenlerden biraz farklı ve sonrakilere yol gösterecek şekildedir.

Brahmagupta (Bırahmagupta) (598-670)



7. yüzyılda yaşamış Hintli matematik ve astronomi bilginidir. Döneminde Hindistan'ın önde gelen matematik merkezlerinden biri olan Ujjain'deki (Uycen) gözlemevinin başına geçti. Bu gözlemevi önemli bir matematik astronomi okulu hâline geldi. En önemli eseri Brahmasphuta-siddhanta'dır (Bırahmasfutissidanta) (Brahma Sisteminin Düzeltilmiş Hâli) ve 628 yılında yazmıştır. 25 bölümden oluşan bu eserin 12. ve 18. bölümleri matematik ile ilgilidir. Brahmagupta, eserinde sayı sistemlerini, döneminin diğer matematikçilerinden farklı bir anlayışla ele almıştır. Aynı iki sayının birbirinden çıkarılmasının sonucunun "sıfır" olduğunu tanımlamış, aynı zamanda "sıfır" ile ilgili bazı özellikleri de belirlemiştir. Buna göre bir sayıya "sıfır" eklendiğinde veya bir sayıdan "sıfır" çıkarıldığında sayı değişmeden kalır ve "sıfır" ile çarpılan bir sayı "sıfır" olur. Brahmagupta daha sonra "sıfır"a bölmeyi de içerecek şekilde aritmetiği genişletmeye çalışmıştır. Ayrıca pozitif sayılar ve negatif sayılar açısından bazı aritmetik kurallar da vermiştir. Brahmagupta'nın bu eserde sunduğu bir başka aritmetik sonuç, karekök hesaplama algoritmasıdır. Ayrıca ilk n doğal sayısının karelerinin ve küplerinin toplamı olan aşağıdaki

formülleri bulmuştur.

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{n \cdot (n+1) \cdot (2n+1)}{6} \text{ ve } 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left[\frac{n \cdot (n+1)}{2} \right]^2$$

Bazı cebirsel gösterimi geliştirmiş ve ikinci dereceden denklemleri çözmek için yöntemler sunmuştur. Ayrıca belirsiz denklemlerin çözümü konusunda da yöntemler ortaya koymuştur.

- $ax + c = by$ formundaki denklemlerin bilinmeyenleri x , y nin bulunması için çözüm metodu sunmuştur.
- $ax^2 + c = y^2$ ve $ax^2 - c = y^2$ formundaki ikinci derece denklemlerinin bilinmeyenleri olan x ve y nin bulunması yöntemini vermiştir.

Örneğin $8x^2 + 1 = y^2$ denkleminin çözümlerinin

$(x, y) = \{(1, 3), (6, 17), (35, 99), (204, 577), (1189, 3363), \dots\}$ olduğunu buldu.

Brahmagupta, Brahmasphutasiddhanta'da dikdörtgenlerin alanıyla ilgili görüşlerine de yer vermiştir. Brahmagupta'nın ikinci eseri ise Khandakhadyaka (Kinkik) adını taşır. Bu kitabı 665 yılında yazmıştır. Sekiz bölümden oluşan bu eseri ilk eserinin bir tekrarı niteliğindedir. Brahmagupta, bu ikinci eserinde matematikle ilgili olarak sinüs değerlerini hesaplamak için interpolasyon (tahmin yoluyla çözme) formülünü vermiştir. Ayrıca bir yılın 365 gün, 6 saat, 5 dakika, 19 saniye olduğunu da hesapladı (Cajori, 2015, s. 90, 105-108, 113-115, 119, 121; <http://www-history.mcs.st-and.ac.uk/Biographies/Brahmagupta.html>).



Bilgi

- $a \neq 0$, $a, b, c \in \mathbb{R}$ olmak üzere $ax^2 + bx + c = 0$ biçimindeki denklemlere **ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem**; a, b, c gerçekte sayılarına ise bu **denklemin katsayıları** denir.
- Denklemi sağlayan x sayılarına **denklemin kökleri**, köklerin oluşturduğu küme ise **denklemin çözüm kümesi** denir.



Örnek 1

Aşağıda verilen denklemlerden hangisi ya da hangilerinin ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirttiğini bulunuz.

a) $3x^3 + x^2 + 4 = 0$

b) $-5x + 3 - \frac{1}{5}x^2 = 0$



Çözüm

- a) $3x^3 + x^2 + 4 = 0$ denkleminde $3x^3$ terimi olduğu için ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtmez. Üçüncü dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.
- b) $-5x + 3 - \frac{1}{5}x^2 = 0$ denkleminde en büyük dereceli terim $-\frac{1}{5}x^2$ olduğundan ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem belirtir.



Örnek 2

$(a-1)x^3 + x^{2b-4} + (a+b)x + a \cdot b = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğuna göre a ve b değerlerini bulunuz.



Çözüm

$(a-1)x^3 + x^{2b-4} + (a+b)x + a \cdot b = 0$ ikinci dereceden bir bilinmeyenli denklem olduğundan x^3 lü terimin katsayısı sıfır, x^{2b-4} lü terimin üssünün 2 olması gerekir. Dolayısıyla $a-1=0 \Rightarrow a=1$ ve $2b-4=2 \Rightarrow b=3$ olur.



Örnek 3

Hâle kardeşi Duru'dan 5 yaş küçüktür. Bu iki kardeşin yaşları çarpımı 24 olduğuna göre Duru'nun bugünkü yaşını veren bir denklem yazınız.



Çözüm

Duru'nun bugünkü yaşına x denilirse Hale'nin yaşı x cinsinden $x-5$ olur.

Yaşları çarpımı ise 24 olduğundan istenilen denklem,

$$x \cdot (x-5) = 24$$

$$x^2 - 5x = 24$$

$$x^2 - 5x - 24 = 0 \text{ olur.}$$

BÖLÜM IV

Ölçme ve Değerlendirme

1. İkinci dereceden bir bilinmeyenli denklem nedir?
2. Denklemin çözüm kümesi nedir?
3. Harezmi'nin matematiğe yaptığı katkılar hakkında bilgi veriniz.

4. Abdulhamid İbn Türk'ün matematiğe yaptığı katkılar hakkında bilgi veriniz.

5. Brahmagupta'nın matematiğe yaptığı katkılar hakkında bilgi veriniz.

Dersin Diğer Derslerle İlişkisi

BÖLÜM IV

Planın Uygulanmasına İlişkin
Açıklamalar

Konu öngörülen ders saatinde işlenmiş olup gerekli değerlendirmeler yapılarak amacına ulaşmıştır.

.....
.....
Matematik Öğretmeni

.../.../2025
UYGUNDUR
Okul Müdürü
.....