Le théorème de Rolle et ses conséquences

Le but de ce document est de démontrer le théorème suivant.

Théorème 1
Soit une fonction f dérivable sur un intervalle $I\subset R$.

$$\forall x\in I, f'(x) = 0 \Leftrightarrow f\ constante$$
$$\forall x\in I, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f\ croissante$$
$$\forall x\in I, f'(x) \leq 0 \Leftrightarrow f\ décroissante$$
$$\forall x\in I, f'(x) > 0 \Rightarrow f\ est\ strictement\ croissante$$
$$\forall x\in I, f'(x) < 0 \Rightarrow f\ est\ strictement\ décroissante$$

Pour démontrer ce théorème, nous allons démontrer plusieurs résultats successivement même si nous admettrons le théorème des bornes qui se démontre par des arguments topologiques (qui nous éloigneraient trop du programme de terminale).

Théorème des bornes
Soient $a, b\in R$ tels que $a < b$. Soit une fonction f: $[a; b]\rightarrow R$ continue sur $[a; b]$, alors f est bornée et atteint ses bornes. Autrement dit, il existe des réels $x_m, x_M \in [a; b]$ tels que

$$f\left(x_m\right) = m$$
$$f\left(x_M\right) = M$$
$$\forall x\in[a, b], m\leq f(x)\leq M$$

Proposition 1
Soit une fonction f dérivable sur un intervalle $I\subset R$ et soit x_0 un nombre intérieur à I. Si f admet un **extremum local en** x_0 (maximum ou minimum), alors

$$f'\left(x_0\right) = 0$$

Remarque
Un nombre x_0 est intérieur à I s'il existe un réel $\varepsilon > 0$ tel que $]x_0 - \varepsilon; x_0 + \varepsilon[\subset I$

Preuve
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que f admet un maximum local en x_0 donc il existe un intervalle $J\subset I$ dont x_0 est un nombre intérieur tel que

$$\forall x\in J, f(x) \leq f\left(x_0\right) \Leftrightarrow f(x) - f\left(x_0\right) \leq 0$$

Soit $x\in J\backslash\left\{x_0\right\}$,

$$x < x_0 \Leftrightarrow x - x_0 < 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \geq 0$$

Or, f est dérivable en x_0 donc, par passage à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\left(\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right) = f'\left(x_0\right) \geq 0$$

De la même façon,

$$x > x_0 \Leftrightarrow x - x_0 > 0 \Rightarrow \frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0} \leq 0$$

Or, f est dérivable en x_0 donc, par passage à la limite dans l'inégalité précédente,

$$\left(\frac{f(x)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}\right) = f'\left(x_0\right) \leq 0$$

On en déduit que, nécessairement,

$$f'\left(x_0\right) = 0$$

Proposition 2
Si une fonction f est constante sur un intervalle $I \subset R$, alors
$$\forall x \in I, f'(x) = 0$$

Preuve
Soient $x \in I$ et $h \in R$ tels que $x + h \in I$, f étant constante,
$$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = 0$$
Par ailleurs,
$$\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}\right) = f'(x)$$
Donc, nécessairement,
$$f'(x) = 0$$

Remarque
La réciproque sera démontrée un peu plus loin à l'aide du théorème des accroissement finis.

Théorème de Rolle
Soient $a, b \in R$ tels que $a < b$. Soit une fonction $f: [a; b] \to R$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ telle que
$$f(a) = f(b)$$
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que
$$f'(c) = 0$$

Preuve
D'après le théorème des bornes, f admet un minimum et un maximum globaux sur $[a; b]$, notés m et M respectivement.
Si $m = M$, alors f est constante sur $[a; b]$, donc f' est nulle sur tout $]a; b[$ d'où l'existence de c.
Si $m < M$, sachant que $f(a) = f(b)$, l'un au moins de ces deux extrema est atteint en un point c appartenant à l'intervalle ouvert $]a; b[$. Ainsi, c est un extremum local intérieur à $[a; b]$ donc $f'(c) = 0$ d'après la proposition 1.

Théorème des accroissements finis
Soient $a, b \in R$ tels que $a < b$. Soit une fonction $f: [a; b] \to R$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$
Alors il existe $c \in]a; b[$ tel que
$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

Preuve
Soit φ la fonction définie sur $[a; b]$ par
$$\varphi(x) = f(x) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(x - a)$$
φ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ en tant que produit et sommes de fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$. Par ailleurs,
$$\varphi(a) = f(a) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(a - a) = 0$$
$$\varphi(b) = f(b) - f(a) - \left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)(b - a) = f(b) - f(a) - (f(b) - f(a)) = 0$$
D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a; b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0 \ (1)$$
Or,
$$\forall x \in]a; b[, \varphi'(x) = f'(x) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$
Donc

$$(1) \Leftrightarrow f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{b-a} = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

On peut dès lors démontrer le théorème 1.

Preuve du théorème 1

- Montrons que

  $$\forall x \in I, f'(x) = 0 \Leftrightarrow f \text{ constante}$$

  Le sens indirect a été montré à la proposition 2. Montrons le sens direct et supposons que

  $$\forall x \in I, f'(x) = 0$$

  Soient $a, b \in I$ tels que $a \neq b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a, b[$ tel que

  $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

  Or, par hypothèse, $f'(c) = 0$ donc nécessairement

  $$f(b) - f(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = f(b)$$

  Donc f est constante.

- Montrons que

  $$\forall x \in I, f'(x) \geq 0 \Leftrightarrow f \text{ croissante}$$

  Sens direct

  Supposons que

  $$\forall x \in I, f'(x) \geq 0$$

  Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. D'après le théorème des accroissements finis, il existe $c \in]a; b[$ tel que

  $$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} = f'(c)$$

  Or, $f'(c) \geq 0$ et $b - a > 0$ donc nécessairement

  $$f(b) - f(a) \geq 0$$

  Donc f est croissante.

  Sens indirect

  Supposons que f soit croissante sur I. Soient $x \in I$ et $h \in R$ tels que $x + h \in I$,

  $$\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x} = \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

  Si $h < 0$, alors $x + h < x$ et par croissance de f,

  $$f(x + h) - f(x) < 0 \Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

  Si $h > 0$, alors $x + h > x$ et par croissance de f,

  $$f(x + h) - f(x) > 0 \Leftrightarrow \frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

  Dans tous les cas,

  $$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} \geq 0$$

  Par ailleurs,

  $$\left(\frac{f(x+h)-f(x)}{x+h-x}\right) = f'(x)$$

  Donc, nécessairement,

  $$f'(x) \geq 0$$

  Les autres cas du théorème se démontrent de la même manière.

Remarque

Une fonction peut être strictement croissante mais posséder une dérive qui s'annule. C'est le cas de la fonction cube qui est strictement croissante mais dont la dérivée s'annule en 0.
Pour obtenir l'équivalence, il faut que les racines de la dérivée soient isolées.

Pour aller plus loin
Le théorème de Rolle et le théorème des accroissements finis ont des prolongements très importants en analyse tels que l'inégalité des accroissements finis, le théorème des accroissement finis généralisés, la formule de Taylor-Lagrange, le théorème de Darboux…

Définition 1
La **borne supérieure** d'une partie d'un ensemble ordonné est le plus petit de ses majorants.
La **borne inférieure** d'une partie d'un ensemble ordonné est le plus grand de ses minorants.

Remarque
De telles bornes n'existent pas toujours mais elles sont uniques lorsqu'elles existent. Ces bornes sont notées respectivement sup et inf.

Inégalité des accroissements finis
Soient $a, b \in R$ tels que $a < b$. Soit une fonction $f : [a; b] \to R$ continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$. Si
$$k = |f'(c)| < +\infty$$
Alors
$$\forall x, y \in [a; b], |f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Preuve
Soient $x, y \in [a; b]$
Si $x = y$, l'inégalité est clairement vérifiée.
Si $x \neq y$, on peut appliquer le théorème des accroissements finis sur $[x; y]$. Il existe donc un réel $c \in]x; y[$ tel que
$$\frac{f(x)-f(y)}{x-y} = f'(c) \Leftrightarrow f(x) - f(y) = f'(c)(x - y) \Rightarrow |f(x) - f(y)| = |f'(c)||x - y|$$
Or,
$$|f'(c)| \leq k$$
Donc
$$|f(x) - f(y)| \leq k|x - y|$$

Théorème des accroissements finis généralisés
Soient $a, b \in R$ tels que $a < b$. Soit deux fonctions f et g définies et continues sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$.
Il existe $c \in]a; b[$ tel que
$$(f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Preuve
Considérons la fonction φ définie sur $[a; b]$ par
$$\varphi(x) = (f(b) - f(a))(g(x) - g(a)) - (g(b) - g(a))(f(x) - f(a))$$
La fonction φ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ en tant que somme et produit de fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$
$$\forall x \in]a; b[, \varphi'(x) = (f(b) - f(a))g'(x) - (g(b) - g(a))f'(x)$$
Par ailleurs,
$$\varphi(a) = \varphi(b) = 0$$
Donc, d'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que
$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow (f(b) - f(a))g'(c) - (g(b) - g(a))f'(c) = 0 \Leftrightarrow (f(b) - f(a))g'(c) = (g(b) - g(a))f'(c)$$

Règle de L'Hospital
Soient $a \in R$. Soit deux fonctions f et g définies et continues sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ telles que
- $f(a) = g(a) = 0$
- g' ne s'annule pas au voisinage de a sauf éventuellement en a

$Si \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$ *existe, alors* $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)$ *existe et ces deux limites sont égales.*

Preuve

Si g' ne s'annule pas au voisinage de a, g ne peut s'annuler au voisinage de a sauf en a en raison du théorème de Rolle donc il existe un intervalle $J \subset [a; b]$ non vide contenant a tel que

$$\forall x \in J \backslash \{a\}, g(x) \neq 0 \text{ et } g'(x) \neq 0$$

Soit $x \in J \backslash \{a\}$, d'après le théorème des accroissements généralisés, il existe $c \in]a; x[$ tel que

$$(f(x) - f(a))g'(c) = (g(x) - g(a))f'(c) \Leftrightarrow f(x)g'(c) = g(x)f'(c) \Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(c)}{g'(c)}$$

Lorsque x tend vers a, c tend nécessairement vers a
Donc

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \left(\frac{f'(x)}{g'(x)}\right)$$

Remarque
On a restreint le théorème à une limite à droite de a mais on pourrait avoir le même raisonnement à gauche de a

Théorème de Darboux
Si une fonction f est dérivable sur un intervalle $I \subset R$ alors $f'(I)$ est un intervalle.

Preuve
Soient $a, b \in I$ tels que $a < b$. Soit λ compris entre $f'(a)$ et $f'(b)$. Montrons qu'il existe $c \in I$ tel que $f'(c) = \lambda$
Quitte à remplacer f par $-f$, on peut supposer que

$$f'(a) > \lambda > f'(b)$$

En considérant la fonction $g: x \longmapsto f(x) - \lambda x$, on se ramène au cas où

$$g'(a) > 0 > g'(b)$$

Montrons qu'il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda$$

1er cas : $g(a) = g(b)$
D'après le théorème de Rolle, il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$g'(c) = 0$$

2e cas : $g(a) \neq g(b)$
Considérons les fonctions u et v définies sur $[a; b]$ par

$$u(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(a)}{x-a} & si\ x \in]a; b] \\ g'(a) & si\ x = a \end{cases} \text{ et } v(x) = \begin{cases} \frac{g(x)-g(b)}{x-b} & si\ x \in [a; b[\\ g'(b) & si\ x = b \end{cases}$$

Les fonctions u et v sont continues sur $[a, b]$ et

$$u(b) = v(a)$$

Remarquons que

$$u(a)u(b)v(a)v(b) = g'(a)u^2(b)g'(b) < 0$$

Donc $u(a)u(b) < 0$ ou $v(a)v(b) < 0$
Dans le premier cas, $u(a)$ et $u(b)$ ne sont pas de même signe ni égaux à 0 donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $y \in]a; b[$ tel que

$$u(y) = 0 \Leftrightarrow g(y) = g(a)$$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]a; y[\subset]a; b[$ tel que

$$g'(c) = 0$$

Dans le deuxième cas, $v(a)$ et $v(b)$ ne sont pas de même signe ni égaux à 0 donc, d'après le théorème des valeurs intermédiaires, il existe $z \in]a; b[$ tel que

$$v(z) = 0 \Leftrightarrow g(z) = g(b)$$

D'après le théorème de Rolle, il existe donc $c \in]z; b[\subset]a; b[$ tel que

$$g'(c) = 0$$

Dans tous les cas, il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$g'(c) = 0 \Leftrightarrow f'(c) = \lambda$$

Remarque
Il existe une autre démonstration (très courte) qui utilise des propriétés topologiques sur la connexité mais qui déborderait complètement du cours de terminale.

Formule de Taylor-Lagrange

Soient $a, b \in R$ tels que $a < b$. Soit $n \in N^*$. Soit une fonction $f : [a; b] \to R$ de classe C^n sur $[a; b]$ telle que $f^{(n+1)}$ existe sur $]a; b[$.
Il existe $c \in]a; b[$ tel que

$$f(b) = f(a) + (b - a)f'(a) + \frac{b-a}{2!}f''(a) + \ldots + \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) + \underbrace{\frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c)}_{reste\ de\ Lagrange}$$

Remarques

- $f^{(n)}$ désigne la dérivée énième de f : elle est obtenue en dérivant n fois la fonction f et ses dérivées successives.
- Une fonction est de **classe** C^n si elle est continue et dérivable n fois et si chacune de ses dérivées successives est continue.

Preuve

Considérons la fonction φ définie sur $[a; b]$ par

$$\varphi(x) = f(b) - f(x) - (b - x)f'(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f''(x) - \ldots - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n)}(x) - A\frac{(b-x)^{n+1}}{(n+1)!}$$

Remarquons que $\varphi(b) = 0$ et choisissons $A \in R$ tel que $\varphi(a) = 0$ (c'est possible car $a \neq b$)
La fonction φ est continue sur $[a; b]$ et dérivable sur $]a; b[$ en tant que somme de fonctions continues sur $[a; b]$ et dérivables sur $]a; b[$

$$\forall x \in]a; b[, \varphi'(x) = - f'(x) + f'(x) - (b - x)f''(x) + \frac{2(b-x)}{2!}f''(x) - \frac{(b-x)^2}{2!}f^{(3)}(x) + \ldots$$
$$\ldots + \frac{n(b-x)^{n-1}}{n!}f^{(n)}(x) - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + A\frac{(n+1)(b-x)^n}{(n+1)!}$$

Donc, en remarquant que tous les termes s'annulent sauf les deux derniers,

$$\varphi'(x) = - \frac{(b-x)^n}{n!}f^{(n+1)}(x) + A\frac{(b-x)^n}{n!}$$

D'après le théorème de Rolle, il existe un réel $c \in]a; b[$ tel que

$$\varphi'(c) = 0 \Leftrightarrow 0 = - \frac{(b-c)^n}{n!}f^{(n+1)}(c) + A\frac{(b-c)^n}{n!} \Leftrightarrow A = f^{(n+1)}(c)$$

Remarquons que

$\varphi(a) = 0 \Leftrightarrow 0 = f(b) - f(a) - (b - a)f'(x) - \frac{(b-a)^2}{2!}f''(a) - \ldots - \frac{(b-a)^n}{n!}f^{(n)}(a) - \frac{(b-a)^{n+1}}{(n+1)!}f^{(n+1)}(c) \Leftrightarrow f(b) = f(a) + (b$