

Partie I

1. Soit (C) la conique d'équation cartésienne $y^2 - \sqrt{3}xy - 2\sqrt{3}x + (4 - 3\sqrt{3})y + 6 - 6\sqrt{3} = 0$ dans le repère orthonormé $(O; i, j)$.

Soit O' le point de coordonnées $(-3, -2)$.

Un point M de coordonnées (x, y) relativement au repère $(O; i, j)$ a pour coordonnées (x', y') relativement

au repère $(O'; i', j')$. On a les formules de changement de repère : $x = -3 + x'$ et $y = -2 + y'$.

L'équation de (C) relativement au repère $(O'; i', j')$ est donc :

$$(-2 + y')^2 - \sqrt{3}(-3 + x')(-2 + y') - 2\sqrt{3}(-3 + x') + (4 - 3\sqrt{3})(-2 + y') + 6 - 6\sqrt{3} = 0, \text{ soit :}$$

$$y'^2 - 4y' + 4 - \sqrt{3}(6 - 3y' - 2x' + x'y') + 6\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x' - 8 + 6\sqrt{3} + (4 - 3\sqrt{3})y' + 6 - 6\sqrt{3} = 0, \text{ soit encore}$$

:

$$y'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0.$$

Conclusion : relativement au repère $(O'; i', j')$, (C) a pour équation : $y'^2 - \sqrt{3}x'y' + 2 = 0$.

2. Soit A la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & 1 \end{pmatrix}$. C'est la matrice de la forme quadratique $y^2 - \sqrt{3}xy$.

a) Valeurs propres de A .

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & \frac{-\sqrt{3}}{2} \\ \frac{-\sqrt{3}}{2} & 1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - \lambda - \frac{3}{4}$$

Le polynôme caractéristique de A est :

$$\lambda_1 = \frac{-1}{2} \text{ et } \lambda_2 = \frac{3}{2}.$$

dont les racines sont :

$$E_{\frac{-1}{2}} = \text{Ker}(A + \frac{1}{2}I) \text{ est défini par : } \frac{1}{2}x - \frac{\sqrt{3}}{2}y = 0, \text{ d'où } E_{\frac{-1}{2}} = \text{Vect} \left[\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix} \right].$$

$$u = \frac{\sqrt{3}}{2}i + \frac{1}{2}j.$$

On prendra donc par exemple :

La matrice A étant symétrique, elle est diagonalisable dans une base orthonormée directe.

Le vecteur $\vec{v} = \frac{-1}{2}\vec{i} + \frac{\sqrt{3}}{2}\vec{j}$ directement perpendiculaire à $\vec{u}$ est vecteur propre de A associé à la valeur propre $\frac{3}{2}$.

b) On passe du repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ au repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$ par l'isométrie, produit de la translation de vecteur $\vec{OO'} = -3\vec{i} - 2\vec{j}$ et de la rotation de centre O' et d'angle $\frac{\pi}{6}$.

C'est aussi le produit de la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{6}$ et de la translation de vecteur $\vec{OO'}$.

c) et d) Dans le repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$, l'équation de (C) est : $-\frac{1}{2}X^2 + \frac{3}{2}Y^2 + 2 = 0$.

$$\frac{X^2}{2^2} - \frac{Y^2}{\left(\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2} = 1$$

Cela fournit l'équation réduite d'une hyperbole :

3. Sommets de (C) dans le repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$.

Ce sont les points : $S_1(-2, 0)$ et $S_2(2, 0)$.

On traduit ce résultat sous forme vectorielle : $\vec{OS_1} = \vec{OO'} - 2\vec{u} = -3\vec{i} - 2\vec{j} - \sqrt{3}\vec{i} - \vec{j} = (-3 - \sqrt{3})\vec{i} + (-3)\vec{j}$

On a de même : $\vec{OS_2} = \vec{OO'} + 2\vec{u} = -3\vec{i} - 2\vec{j} + \sqrt{3}\vec{i} + \vec{j} = (-3 + \sqrt{3})\vec{i} + (-1)\vec{j}$

Conclusion : Relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$, les sommets de (C) sont les points de coordonnées : $S_1(-3 - \sqrt{3}, -3)$ et $S_2(-3 + \sqrt{3}, -1)$.

4. Dans le repère $(O'; \vec{u}, \vec{v})$ les asymptotes de (C) ont pour équations :

$$As_1 : Y = \frac{1}{\sqrt{3}}X \quad \text{et} \quad As_2 : Y = -\frac{1}{\sqrt{3}}X$$

Or les formules de changement de repère sont :
$$\begin{cases} x = -3 + \frac{\sqrt{3}}{2}X - \frac{1}{2}Y \\ y = -2 + \frac{1}{2}X + \frac{\sqrt{3}}{2}Y \end{cases} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} X = \frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+2) \\ Y = -\frac{1}{2}(x+3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y+2) \end{cases}$$

Les asymptotes de (C) dans le repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$ sont donc :

$$\begin{cases} As_1 : -\frac{1}{2}(x+3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y+2) = \frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+2) \right] \\ As_2 : -\frac{1}{2}(x+3) + \frac{\sqrt{3}}{2}(y+2) = -\frac{1}{\sqrt{3}} \left[\frac{\sqrt{3}}{2}(x+3) + \frac{1}{2}(y+2) \right] \end{cases} \text{ soit encore :}$$

$$\begin{cases} As_1 : -(x+3) + \frac{1}{\sqrt{3}}(y+2) = 0 \\ As_2 : \frac{2}{\sqrt{3}}(y+2) = 0 \end{cases} \text{ soit enfin : } \boxed{\begin{cases} As_1 : -\sqrt{3}x + y + 2 - 3\sqrt{3} = 0 \\ As_2 : y = -2 \end{cases}}$$

5. Sur le papier millimétré il sera facile de mettre en place les deux asymptotes (l'une est horizontale), les deux sommets et quelques points pour faire le tracé.

Pour obtenir ces points on utilisera la propriété suivante :

Une droite passant par exemple par S_1 et coupant les asymptotes As_1 en N_1 et As_2 en N_2 coupe

l'hyperbole en un point M tel que les segments S_1M et N_1N_2 ont le même milieu. Aussi, faire pivoter une droite autour de S_1 pour obtenir un certain nombre de points M de l'hyperbole. Je ne trace pas cette courbe avec maple.

Partie II

Soit la courbe d'équation polaire : $\rho(\theta) = \sqrt{\sin(2\theta)}$.

1. Domaine de définition de ρ .

Il faut et il suffit que $\sin(2\theta) \geq 0$, soit $2\theta \in [2k\pi, \pi + 2k\pi]$, $k \in \mathbb{Z}$, soit $\theta \in \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right]$, $k \in \mathbb{Z}$.

Conclusion : le domaine de définition de ρ est : $\boxed{\text{Def}(\rho) = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \left[k\pi, \frac{\pi}{2} + k\pi \right]}$.

2. ρ étant de période π , les points $M(\theta)$ et $M(\theta + \pi)$ sont symétriques par rapport à O .

Ainsi pour tracer toute la courbe il suffit de tracer la courbe sur un intervalle de longueur π et de compléter par la symétrie par rapport à O .

$$\theta \in \left[0, \frac{\pi}{2} \right].$$

On réduit donc, dans un premier temps, le tracé, pour

De plus, $\rho(\theta) = \rho\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ et par conséquent les points $M(\theta)$ et $M\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right)$ sont symétriques par rapport à la première bissectrice.

Ainsi, pour obtenir toute la courbe, on trace le morceau correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4} \right]$ et on complète en

effectuant la symétrie par rapport à la première bissectrice, suivie de la symétrie par rapport à O .

3. Variation de ρ . (bien que cela n'apporte pas grand chose au tracé de la courbe)

$$\rho'(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{\sin(2\theta)}} \text{ est positif ou nul sur } \left[0, \frac{\pi}{4}\right], \rho \text{ est donc croissant sur cet intervalle.}$$

4. On recherche donc les points de la courbe d'ordonnée nulle, donc tels que $\sqrt{\sin(2\theta)} \sin(\theta) = 0$.

Pour $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$, seule la valeur $\theta = 0$ convient et on obtient alors le point O .

Vu les remarques de symétrie, la courbe coupera aussi l'axe des abscisses pour les valeurs de θ suivantes :

$\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \pi$ et $\theta = \frac{3\pi}{2}$. Or on sait que pour une courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$, si on passe au pôle pour la valeur $\theta = \theta_0$ la tangente au pôle est dirigée par la droite d'angle polaire θ_0 .

Donc ici, la tangente à la courbe en O sera bien l'axe des abscisses pour les arcs correspondant à $\theta \in \left[0, \frac{\pi}{4}\right]$

et $\theta \in \left[\pi, \frac{5\pi}{4}\right]$, mais ce sera l'axe des ordonnées pour les arcs correspondant à $\theta \in \left[\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{2}\right]$ et $\theta \in \left[\frac{5\pi}{4}, \frac{3\pi}{2}\right]$.

5. Equation de la tangente dans le repère $(O; i, j)$.

La tangente au point $M(\theta)$ est dirigée par le vecteur :

$$\frac{dOM}{d\theta} = \rho'(\theta) u(\theta) + \rho(\theta) w(\theta) = \frac{\cos(2\theta)}{\sqrt{\sin(2\theta)}} u(\theta) + \sqrt{\sin(2\theta)} w(\theta)$$

où $u(\theta) = \cos(\theta) i + \sin(\theta) j$ et $w(\theta) = -\sin(\theta) i + \cos(\theta) j$. $\frac{dOM}{d\theta}$ est donc parallèle au vecteur $\cos(2\theta) u(\theta) + \sin(2\theta) w(\theta) = (\cos(2\theta)\cos(\theta) - \sin(2\theta)\sin(\theta)) i + (\cos(2\theta)\sin(\theta) + \sin(2\theta)\cos(\theta)) j$ c'est-à-dire au vecteur $\cos(3\theta) i + \sin(3\theta) j$.

La tangente en $M(\theta)$ est donc la droite passant par le point $(\sqrt{\sin(2\theta)} \cos(\theta), \sqrt{\sin(2\theta)} \sin(\theta))$ et

perpendiculaire au vecteur de composantes $\begin{pmatrix} -\sin(3\theta) \\ \cos(3\theta) \end{pmatrix}$. L'équation de cette tangente est donc :

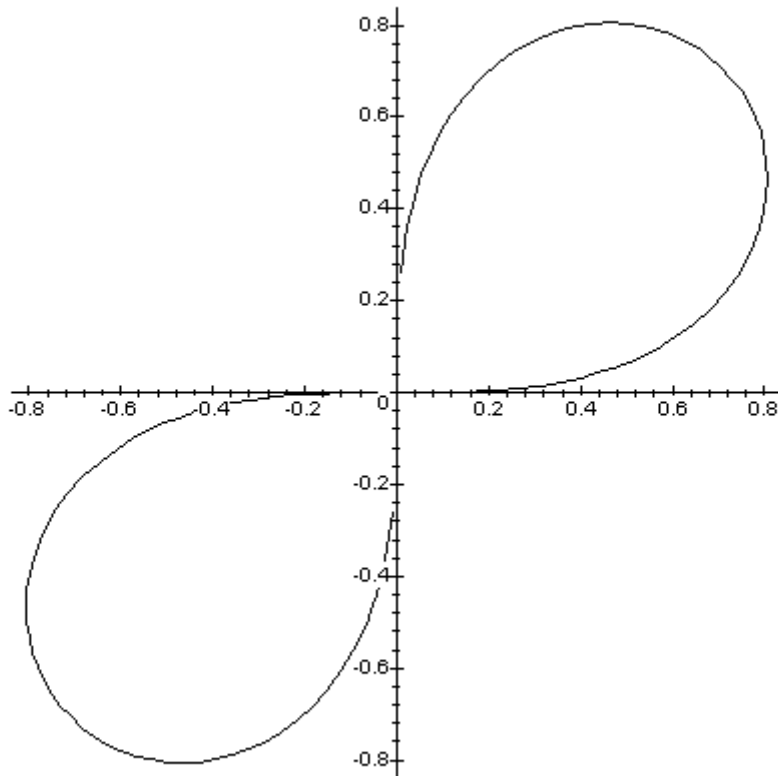
$$-\sin(3\theta) (x - \sqrt{\sin(2\theta)} \cos(\theta)) + \cos(3\theta) (y - \sqrt{\sin(2\theta)} \sin(\theta)) \text{ soit encore :}$$

$$-x \sin(3\theta) + y \cos(3\theta) + \sqrt{\sin(2\theta)} \sin(2\theta) = 0$$

Conclusion : l'équation de la tangente au point $M(\theta)$ est : $-x \sin(3\theta) + y \cos(3\theta) + \sqrt{\sin(2\theta)} \sin(2\theta) = 0$

6. Tracé de la Lemniscate de Bernoulli.

Il est sans difficulté, je donne un tracé obtenu avec maple.



```
> restart;
> with(plots):
> C1 :=
plot([sqrt(sin(2*t))*cos(t),s
qrt(sin(2*t))*sin(t), t =
0..Pi/2], color = black);
> C2 :=
plot([sqrt(sin(2*t))*cos(t),s
qrt(sin(2*t))*sin(t), t =
P..3*Pi/2], color = black);
> display({C1,C2});
```

Partie III

Soit Ω et R un réel strictement positif.

1. 1^{er} cas : Si $M = \Omega$, il n'existe pas de point du plan vérifiant les conditions imposées.

2^{ième} cas : Si $M \neq \Omega$, alors il existe un unique point M' du plan tel que

M , M' et Ω sont alignés et $\overline{\Omega M} \cdot \overline{\Omega M'} = R^2$. Ce point M' est situé sur la demi-droite ΩM et la

longueur $\overline{\Omega M'}$ vaut $\frac{R^2}{\overline{\Omega M}}$.

2. Il est clair que sur $\mathbf{P} \setminus \{\Omega\}$ on a $\phi \circ \phi = Id$. Ceci prouve que ϕ est bijective et que $\phi^{-1} = \phi$.

ϕ est appelée l'inversion de centre Ω et de puissance R^2 .

3. Les points du cercle de centre Ω et de rayon R sont invariants par la transformation ϕ .

L'image par ϕ de ce cercle est donc lui même.

4. Soit un cercle de centre Ω et de rayon $r \neq R$.

Si M appartient à un tel cercle, son image M' par ϕ est telle que : $r \cdot \Omega M' = R^2$ d'où : $\Omega M' = \frac{R^2}{r}$.

Le point M' décrit donc le cercle de centre Ω et de rayon $\frac{R^2}{r}$.

5. Soit D une droite passant par Ω , on ne peut envisager, vu la définition de ϕ , que l'image de $D \setminus \{\Omega\}$.

Or soit $M \in D \setminus \{\Omega\}$ et M' son image par ϕ , alors $M' \in D \setminus \{\Omega\}$ et réciproquement tout point de $D \setminus \{\Omega\}$

est l'image d'un point de $D \setminus \{\Omega\}$.

Conclusion : dit plus rapidement : $D \setminus \{\Omega\}$ est globalement invariante par ϕ

6. Soit M un point du plan d'affixe complexe z .

On note z_Ω l'affixe de Ω et z' l'affixe de M' .

a) Le fait que M , M' et Ω sont alignés prouve que l'on peut écrire $\overrightarrow{\Omega M'} = \lambda \overrightarrow{\Omega M}$.

Le fait que $\overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M'} = R^2$ assure que : $\lambda \overrightarrow{\Omega M} \cdot \overrightarrow{\Omega M} = R^2$ soit $\lambda = \frac{R^2}{\Omega M^2}$.

Conclusion : $\lambda = \frac{R^2}{\Omega M^2}$ et $\overrightarrow{\Omega M'} = \frac{R^2}{\Omega M^2} \overrightarrow{\Omega M}$

b) La relation vectorielle précédente se traduit au moyen des affixes par :

$$z' - z_\Omega = \frac{R^2}{(z - z_\Omega)(\overline{z - z_\Omega})} (z - z_\Omega) \quad \text{soit} \quad \boxed{z' = z_\Omega + \frac{R^2}{z - z_\Omega}}$$

7. On suppose que $z_\Omega = 1$ et $R = 1$.

a) $z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) = \frac{1}{2}[(1 + \cos(\theta)) + i \sin(\theta)] = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \left[\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) + i \sin\left(\frac{\theta}{2}\right) \right]$

On en déduit que :
$$\begin{cases} \text{si } \theta \in [-\pi + 4k\pi, \pi + 4k\pi] & k \in \mathbb{Z} & |z| = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et un argument de } z \text{ est } \frac{\theta}{2} \\ \text{si } \theta \in [\pi + 4k\pi, 3\pi + 4k\pi] & k \in \mathbb{Z} & |z| = -\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et un argument de } z \text{ est } \frac{\theta}{2} + \pi \end{cases}$$

$\cos\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$

NB : Dans le cas où $z = 0$ et on ne peut plus parler d'un l'argument de z .
Il aurait donc été préférable de prendre des intervalles ouverts dans ce qui précède.

b) Ensemble A des réels θ tels que $M(\theta) \neq \Omega$.

On cherche donc les θ tels que $\frac{1}{2}(1 + e^{i\theta}) \neq 1$, soit $e^{i\theta} \neq 1$.

On obtient que θ doit être différent de $2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$. Conclusion : $A = \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

c) Soit $\theta \in A$. L'affixe de l'image de $M(\theta)$ par ϕ est :

$$z' = 1 + \frac{1}{z-1} = \frac{\bar{z}}{z-1} = \frac{1+e^{-i\theta}}{-1+e^{-i\theta}} = \frac{e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}}{-e^{i\frac{\theta}{2}} + e^{-i\frac{\theta}{2}}} = \frac{2\cos\left(\frac{\theta}{2}\right)}{-2i\sin\left(\frac{\theta}{2}\right)} = i \cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right)$$
 $z' = i \cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right)$

On a donc la même discussion que précédemment :

$$\begin{cases} \text{si } \cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right) > 0 \text{ alors } |z'| = \cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et un argument de } z' \text{ est } \frac{\pi}{2} \\ \text{si } \cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right) < 0 \text{ alors } |z'| = -\cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right) \text{ et un argument de } z' \text{ est } -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Et si $\cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right) = 0$ soit $\theta = (2k+1)\pi$ $k \in \mathbb{Z}$ alors $|z'| = 0$ et on ne parle plus de l'argument.

d) Image par ϕ du cercle de diamètre $[O, \Omega]$ privé du point Ω .

Il s'agit du cercle centré au point d'affixe $\frac{1}{2}$ et de rayon $\frac{1}{2}$.

Les points de ce cercle ont pour affixe $z = \frac{1}{2}(1 + e^{i\theta})$.

L'image demandée est donc l'ensemble des points d'affixe $z' = i \cot \operatorname{an}\left(\frac{\theta}{2}\right)$ avec $\theta \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$.

On obtient l'axe des ordonnées $y'Oy$.

e) Le caractère involutif de ϕ permet de dire que l'image par ϕ de l'axe des ordonnées est le cercle de diamètre $[O, \Omega]$ privé du point Ω .

8. Soit (E) l'ellipse d'équation cartésienne, relativement au repère $(O; \vec{i}, \vec{j})$: $3x^2 + 4y^2 = 12$.

a) L'équation réduite est : $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{3} = 1$. On a donc avec les notations classiques :

$a = 2, b = \sqrt{3}, c = \sqrt{a^2 - b^2} = 1, e = \frac{c}{a} = \frac{1}{2}$.

L'excentricité de (E) vaut $\frac{1}{2}$.

Les foyers sont les points $F_1(-1,0)$ et $F_2(1,0)$.

b) On note finalement F le foyer de coordonnées $(1,0)$.

La directrice est une droite parallèle à l'axe des ordonnées d'équation $x = k$.

Cherchons $k > 0$ tel que (E) soit l'ensemble des points M tels que $\frac{MF}{MH} = \frac{1}{2}$, H étant la projection de M sur la directrice.

On cherche donc k pour que la relation $4MF^2 - MH^2 = 0$, soit : $4[(x-1)^2 + y^2] - (x-k)^2 = 0$ coïncide avec l'égalité $3x^2 + 4y^2 = 12$.

Le développement de $4[(x-1)^2 + y^2] - (x-k)^2 = 0$ donne : $3x^2 - (8-2k)x + 4 - k^2 + 4y^2 = 0$ et il faut donc choisir $k = 4$ pour avoir le résultat souhaité.

Remarque : pour les spécialistes des coniques, on sait que les directrices de l'ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ ont pour

équation $x = \pm \frac{a^2}{c}$ donc ici, celle qui nous intéresse a pour équation : $x = \frac{4}{1} = 4$.

Mais les élèves peuvent-ils retenir tous ces résultats très spécifiques.

(E) est donc l'ellipse de foyer F , de directrice la droite d'équation $x = 4$ et d'excentricité $\frac{1}{2}$.

Dans le repère $(F; \vec{i}, \vec{j})$, l'équation polaire de (E) est : $\rho = \frac{\varepsilon d}{1 + \varepsilon e \cos(\theta - \alpha)}$ où, si on note K la projection de F sur la directrice, on a : $FK = d(\cos(\alpha)\vec{i} + \sin(\alpha)\vec{j})$.

Ici, on peut prendre : $\varepsilon = 1, d = 3, \alpha = 0, e = \frac{1}{2}$.

$$\rho = \frac{\frac{3}{2}}{1 + \frac{1}{2}\cos(\theta)} \quad \text{soit} \quad \rho = \frac{3}{2 + \cos(\theta)}$$

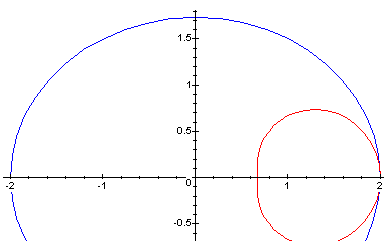
L'équation polaire de (E) est donc :

c) On suppose que $F = \Omega$, donc Ω est le même que dans la question 7, et que $R = 1$.

Soit $M'(\theta)$ l'image du point $M(\theta)$ de (E) . Notons $FM'(\theta) = f(\theta)u(\theta)$.

f doit vérifier : $\frac{3}{2 + \cos(\theta)} f(\theta) = 1$. L'équation polaire de l'image de (E) par ϕ est donc : $\rho = \frac{2 + \cos(\theta)}{3}$

Pour le plaisir faisons tracer par maple, l'ellipse (E) et son image par ϕ .



```
> restart : with(plots) :
> EI := plot([2*cos(t),sqrt(3)*sin(t),t = 0..2*Pi],color=blue);
> InvEI := plot([(1+(2+cos(t))/3)*cos(t),(2+cos(t))/3*sin(t), t =
0..2*Pi],color=red);
> display({EI,InvEI},scaling=constrained);
```

9. On suppose que $O = \Omega$ et que $R = \sqrt{2}$.

Soit (H) l'hyperbole d'équation cartésienne, relativement au repère $(O; i, j)$: $xy = 1$.

Son équation polaire est $\rho^2 \cos(\theta) \sin(\theta) = 1$ ou $\rho^2 \sin(2\theta) = 2$, soit $\rho = \frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\sqrt{\sin(2\theta)}}$ avec $\varepsilon = \pm 1$.

Soit $M'(\theta)$ l'image du point $M(\theta)$ de (H) . Notons $OM'(\theta) = g(\theta) u(\theta)$.

g doit vérifier : $\frac{\varepsilon\sqrt{2}}{\sqrt{\sin(2\theta)}} g(\theta) = 2$, soit $g = \varepsilon\sqrt{2}\sqrt{\sin(2\theta)}$. $\varepsilon = \pm 1$ peut être supprimé pour des questions de symétrie. L'équation polaire de l'image de (H) par ϕ est donc : $\rho = \sqrt{2}\sqrt{\sin(2\theta)}$.

Cette courbe est l'homothétique de celle étudiée au II, dans l'homothétie de centre O et de rapport $\sqrt{2}$.

Partie IV

Soit $(O; i, j, k)$ un repère orthonormé de l'espace affine euclidien de dimension 3.

Soit (E) l'ellipse d'équation : $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1 \\ z = 0 \end{cases}$. Soit enfin (C) un cône de sommet S et de base l'ellipse (E) .

Lorsque l'on coupe un cône de révolution par un plan et que l'intersection est une ellipse, le sommet du cône est situé dans le plan perpendiculaire au plan de coupe contenant le grand axe de l'ellipse. Ceci justifie donc le choix (rapidement justifié) indiqué pour les coordonnées du point S cherché. Cela étant, je remplace un peu une affirmation par une autre affirmation!

1. Des équations paramétriques de la droite passant par $S(x_0, 0, z_0)$ et $M(x_M, y_M, z_M)$ sont :

$$\begin{cases} x = x_0 + \lambda(x_M - x_0) \\ y = \lambda y_M \\ z = z_0 + \lambda(z_M - z_0) \end{cases}.$$

2. On traduit que M appartient à (C) en écrivant que cette droite perce le plan xOy en un point de (E) .

Il faut bien sûr supposer que $M \neq S$ pour pouvoir parler de la droite SM .

Autrement dit, les deux équations $\begin{cases} \frac{[x_0 + \lambda(x_M - x_0)]^2}{4} + (\lambda y_M)^2 = 1 \\ z_0 + \lambda(z_M - z_0) = 0 \end{cases}$ ont une racine commune en λ .

On doit donc avoir $\frac{1}{4} \left[x_0 - \frac{z_0}{z_M - z_0} (x_M - x_0) \right]^2 + \left[-\frac{z_0}{z_M - z_0} y_M \right]^2 = 1$, (on a bien $(z_M - z_0) \neq 0$ sinon la droite SM serait horizontale et ne percerait pas le plan xOy ce qui se voit aussi sur la deuxième équation qui n'aurait pas de solution si $(z_M - z_0) = 0$). La relation précédente s'écrit aussi :

$$\frac{[x_0(z_M - z_0) - z_0(x_M - x_0)]^2}{4} + z_0^2 y_M^2 - (z_M - z_0)^2 = 0$$

Mais alors, dans le repère $(S; \vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, l'équation du cône (C) est : $\frac{[x_0 Z - z_0 X]^2}{4} + z_0^2 Y^2 - Z^2 = 0$.

$$A = \begin{pmatrix} \frac{z_0^2}{4} & 0 & -\frac{x_0 z_0}{4} \\ 0 & z_0^2 & 0 \\ -\frac{x_0 z_0}{4} & 0 & \frac{x_0^2}{4} - 1 \end{pmatrix}$$

3. Soit . C'est la matrice de la forme quadratique constituée par le premier membre de l'équation de (C) .

a) Polynôme caractéristique de A .

$$\det(A - \lambda Id) = \begin{vmatrix} \frac{z_0^2}{4} - \lambda & 0 & -\frac{x_0 z_0}{4} \\ 0 & z_0^2 - \lambda & 0 \\ -\frac{x_0 z_0}{4} & 0 & \frac{x_0^2}{4} - 1 - \lambda \end{vmatrix} = (z_0^2 - \lambda) \left[\left(\frac{z_0^2}{4} - \lambda \right) \left(\frac{x_0^2}{4} - 1 - \lambda \right) - \frac{x_0^2 z_0^2}{16} \right]$$

, soit :

Conclusion :

$$\det(A - \lambda Id) = (z_0^2 - \lambda) \left[\lambda^2 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{4} - 1 \right) \lambda - \frac{z_0^2}{4} \right]$$

b) A est diagonalisable car elle est symétrique réelle.

On sait même qu'il existe une base orthonormée, constituée de vecteurs propres de A . Dans une telle base la matrice de la forme quadratique devient aussi diagonale, les formules concernant l'influence d'un changement de base sur la matrice d'un endomorphisme ou sur la matrice d'une forme quadratique étant les mêmes : Endomorphisme : $A' = P^{-1}AP$.

Forme quadratique : $A' = {}^t P A P$ mais $P^{-1} = {}^t P$ si P est orthogonale.

$$P(\lambda) = \lambda^2 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{4} - 1 \right) \lambda - \frac{z_0^2}{4}$$

c) Soit

$$\Delta = \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{4} - 1 \right)^2 + z_0^2 \geq z_0^2 > 0$$

P ne peut pas avoir de racine double car son discriminant

d) Pour que A ait une valeur propre double, il est donc nécessaire que la valeur propre z_0^2 soit aussi racine de P , auquel cas z_0^2 est valeur propre double de A .

4. Le cône (C) est de révolution si et seulement si, il existe un repère orthonormé $(S; \vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ relativement auquel l'équation du cône est : $\alpha(X^2 + Y^2) + \beta Z^2 = 0$, (le cône est alors de révolution autour de la droite passant par S et dirigée par $\vec{w}$) ce qui revient à dire que la matrice A admet une racine double α .

On est donc ramené à écrire que z_0^2 est racine de $\lambda^2 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{4} - 1\right)\lambda - \frac{z_0^2}{4}$, c'est-à-dire :

$$z_0^4 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{4} - 1\right)z_0^2 - \frac{z_0^2}{4} = 0, \text{ et comme } z_0 \neq 0, \text{ la relation précédente équivaut à :}$$

$$z_0^2 - \left(\frac{x_0^2 + z_0^2}{4} - 1\right) - \frac{1}{4} = 0, \text{ soit encore à : } 3z_0^2 - x_0^2 + 3 = 3 \text{ ou, sous forme réduite : } \frac{x_0^2}{3} - z_0^2 = 1.$$

Conclusion : Le point S doit être situé sur l'hyperbole d'équations :

privée des points $A(-\sqrt{3}, 0, 0)$ et $B(\sqrt{3}, 0, 0)$.

Fin