

Γενικό Διαγώνισμα στις Ταλαντώσεις (NEO)

ΘΕΜΑ Α

A1.

Σε μια απλή αρμονική ταλάντωση, χωρίς αρχική φάση, με περίοδο T και πλάτος A , το διανυόμενο διάστημα σε χρόνο $\Delta t = 7T/4$ είναι:

- a) $3,5A$
- b) $7A$
- c) $14A$
- d) $17,5A$

Μονάδες 5

Λύση:

Η ταλάντωση δίνεται χωρίς αρχική φάση, άρα:

$$x(t) = A \cdot \eta\mu\omega t$$

Στην $t = 0$ το σώμα βρίσκεται στη θέση $x = 0$ και κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ($v > 0$).

Κάθε χρονικό διάστημα $T/4$ το σώμα διανύει απόσταση A .

Άρα σε χρόνο $7T/4$ θα διανύσει:

$$7 \times A = 7A$$

Σωστή απάντηση: b) $7A$.

A2.

Όταν η ταχύτητα και η επιτάχυνση σε μια απλή αρμονική ταλάντωση είναι αντίρροπες, τότε η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης:

- a) αυξάνεται
- b) μειώνεται
- c) παραμένει σταθερή
- d) αυξάνεται αν και μειώνεται αν

Μονάδες 5

Λύση:

Στην ΑΑΤ η επιτάχυνση έχει πάντα κατεύθυνση προς τη θέση ισορροπίας:

$$a = -\omega^2 x$$

Η ταχύτητα έχει κατεύθυνση προς τη φορά της κίνησης.

Για να είναι αντίρροπες, το σώμα πρέπει να κινείται προς ακραία θέση, δηλαδή η απόλυτη τιμή της θέσης $|x|$ αυξάνεται.

Η δυναμική ενέργεια της ταλάντωσης είναι:

$$U = \frac{1}{2} D x^2$$

Αν $|x|$ αυξάνεται, τότε U αυξάνεται.

Σωστή απάντηση: α) αυξάνεται.

A3.

Σώμα μάζας m εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση δεμένο στο άκρο οριζόντιου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k . Αν τετραπλασιάσουμε τη μάζα του σώματος τότε η συχνότητα της ταλάντωσης του:

- a) υποδιπλασιάζεται
- b) υποτετραπλασιάζεται
- c) διπλασιάζεται
- d) τετραπλασιάζεται

Μονάδες 5**Λύση:**

Η συχνότητα της ΑΑΤ με ελατήριο είναι:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Αν η μάζα τετραπλασιαστεί: $m' = 4m$, τότε:

$$f' = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{4m}} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{f}{2}$$

Άρα η συχνότητα υποδιπλασιάζεται.

Σωστή απάντηση: α) υποδιπλασιάζεται.

A4.

Σώμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης ανάλογη της

ταχύτητάς του. Το αρχικό πλάτος είναι A_0 , μετά την 1η περίοδο A_1 , μετά τη 2η A_2 και μετά την 3η A_3 . Η σχέση που συνδέει τα πλάτη είναι:

a) $A_1 = \sqrt{A_2 \cdot A_3}$

b) $A_3 = \sqrt{A_1/A_2}$

c) $A_2 = \sqrt{A_1 \cdot A_3}$

d) $A_3 = \sqrt{A_2 \cdot A_1}$

Μονάδες 5

Λύση:

Σε φθίνουσα ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης $F = -bv$, το πλάτος μειώνεται εκθετικά:

$$A(t) = A_0 e^{-bt/2m}$$

Για διαδοχικές περιόδους:

$$A_1 = A_0 e^{-bT/2m}, \quad A_2 = A_0 e^{-2bT/2m}, \quad A_3 = A_0 e^{-3bT/2m}$$

Άρα:

$$\frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_2} \Rightarrow A_2^2 = A_1 \cdot A_3$$

Σωστή απάντηση: γ) $A_2 = \sqrt{A_1 \cdot A_3}$.

A5.

Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος.

- a) Σε κάθε απλή αρμονική ταλάντωση η δυναμική ενέργεια γίνεται 5-πλάσια της κινητικής, 5 φορές σε κάθε περίοδο
- b) Σύστημα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων βρίσκεται σε συντονισμό. Αν αυξήσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης θα μειωθεί, ενώ αν μειώσουμε τη συχνότητα του διεγέρτη το πλάτος της ταλάντωσης θα αυξηθεί.
- c) Αυξάνοντας την σταθερά απόσβεσης σε ένα σύστημα εξαναγκασμένων ταλαντώσεων, η συχνότητα στην οποία παρατηρείται ο συντονισμός μειώνεται και το μέγιστο πλάτος κατά τον συντονισμό, επίσης μειώνεται.

- d) Δύο σώματα ίσων μαζών κρέμονται μαζί από κατακόρυφο ιδανικό ελατήριο σταθεράς k και εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση. Η σταθερά επαναφοράς του συστήματος των δύο σωμάτων είναι $D = k$.
- e) Σώμα εκτελεί φθίνουσα αρμονική ταλάντωση με δύναμη απόσβεσης της μορφής $F' = -bv$, όπου v η ταχύτητα του σώματος και b μια θετική σταθερά. Αν κάποια χρονική στιγμή μια θετική θέση είναι θέση ισορροπίας, τότε σε αυτή τη θέση το σώμα πρέπει να έχει αρνητική ταχύτητα.

Μονάδες 5

Λύση:

- α) Λάθος. Η σχέση $U = 5K$ συμβαίνει σε δύο θέσεις ανά περίοδο $\rightarrow$ συνολικά 4 φορές, όχι 5.
- β) Λάθος. Σε συντονισμό $f_{\text{διεγ}} = f_0$. Αν αυξήσουμε ή μειώσουμε τη συχνότητα, απομακρυνόμαστε από τον συντονισμό $\rightarrow$ το πλάτος μειώνεται και στις δύο περιπτώσεις.
- γ) Σωστό. Με μεγαλύτερη απόσβεση, η συχνότητα συντονισμού μειώνεται και το μέγιστο πλάτος επίσης μειώνεται.
- δ) Σωστό. Το σύστημα μάζες - ελατήριο έχει συνολική σταθερά επαναφοράς $D = k$.
- ε) Σωστό. Αν μια θετική θέση είναι θέση ισορροπίας, τότε η ταχύτητα πρέπει να είναι αρνητική ώστε το σώμα να επιστρέψει προς τη Θ.Ι. ($\Sigma F = 0 \rightarrow F_{\text{επαν}} + F_{\text{απόσβ}} = 0 \rightarrow -Dx - bv = 0 \rightarrow v = -(D/b)x$)

ΘΕΜΑ Β

B1.

Σώμα Σ , μάζας m , είναι δεμένο στο άνω άκρο κατακόρυφου ιδανικού ελατηρίου σταθεράς k . Στο πάνω μέρος του σώματος Σ δένουμε αβαρές και μη εκτατό νήμα, το οποίο –μέσω ιδανικής τροχαλίας– καταλήγει σε σώμα Σ_1 , μάζας $m_1 = m/2$ (βλέπε Σχήμα 1). Κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ ξεκινά κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους A_1 .

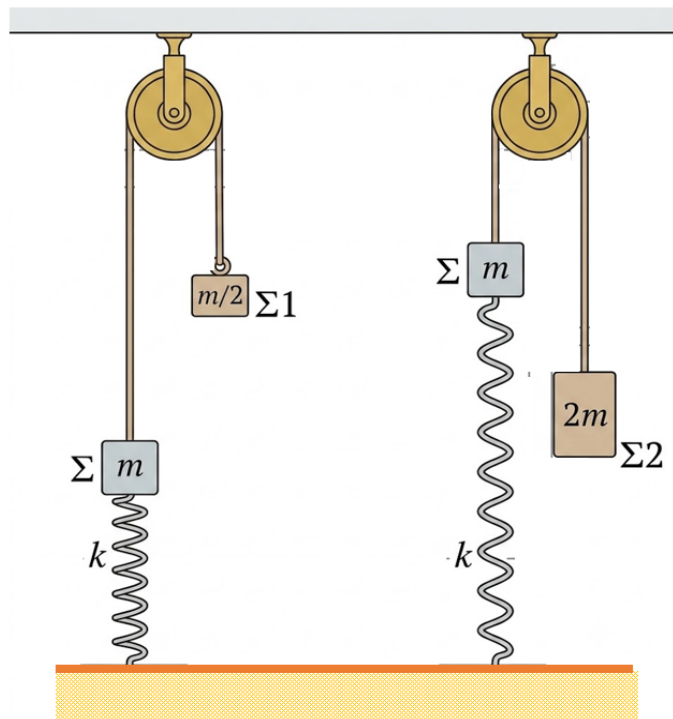
Σε δεύτερο πείραμα, το άκρο του νήματος καταλήγει –μέσω ιδανικής τροχαλίας– σε σώμα Σ_2 , μάζας $m_2 = 2m$. Κόβουμε το νήμα και το σώμα Σ ξεκινά κατακόρυφη απλή αρμονική ταλάντωση, πλάτους A_2 . Ο λόγος των πλάτων A_1/A_2 είναι:

- a) $1/2$

b) $1/4$

c) $1/8$

Μονάδες 2 + 6



Λύση:

Η διάταξη ισορροπεί πριν κοπεί το νήμα. Η θέση ισορροπίας του Σ είναι διαφορετική στις δύο περιπτώσεις, άρα όταν κόβεται το νήμα, το Σ ξεκινά την ΑΑΤ από διαφορετική ακραία θέση.

Βήμα 1: Ισορροπία με Σ_1 ($m_1 = m/2$)

Το Σ_1 είναι ελαφρύτερο από το Σ . Άρα το Σ βρίσκεται κάτω από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου (το ελατήριο είναι συσπειρωμένο).

$$k \cdot x_1 = m \cdot g - T_1$$

Από το αβαρές νήμα και την τροχαλία:

$$T_1 = m_1 \cdot g = \frac{m}{2} \cdot g$$

Άρα:

$$k \cdot x_1 = m \cdot g - \frac{m}{2} \cdot g = \frac{m}{2} \cdot g$$

$$x_1 = \frac{m \cdot g}{2k}$$

Βήμα 2: Ισορροπία με Σ_2 ($m_2 = 2m$)

$$T_2 = m_2 \cdot g = 2m \cdot g$$

$$k \cdot x_2 = T_2 - m \cdot g = 2m \cdot g - m \cdot g = m \cdot g$$

$$x_2 = \frac{m \cdot g}{k}$$

Βήμα 3: Τα πλάτη της ΑΑΤ

Όταν κόβεται το νήμα, το Σ ξεκινά από τη στατική θέση ισορροπίας με $v = 0$.

Η κοινή θέση ισορροπίας του συστήματος ελατηρίου– Σ είναι:

$$\Delta l = \frac{m \cdot g}{k}$$

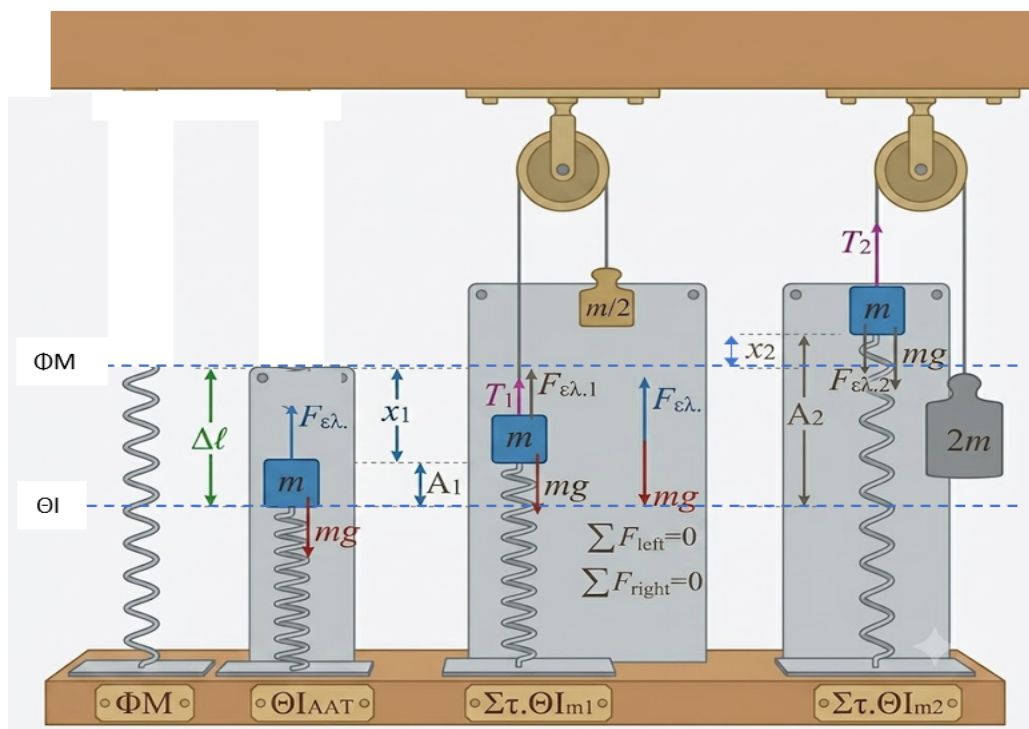
Άρα:

$$A_1 = |\Delta l - x_1| = \left| \frac{m \cdot g}{k} - \frac{m \cdot g}{2k} \right| = \frac{m \cdot g}{2k}$$

$$A_2 = |\Delta l + x_2| = \left| \frac{m \cdot g}{k} + \frac{m \cdot g}{k} \right| = \frac{2m \cdot g}{k}$$

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{1}{4}$$

Σωστή απάντηση: ii) 1/4.



B2.

Σώμα μάζας $m_1 = 2m$ είναι δεμένο στο άνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς k . Πάνω στο σώμα m_1 τοποθετείται σώμα μάζας $m_2 = m$ και το σύστημα ισορροπεί. Από ύψος h πάνω από το m_2 αφήνεται σώμα μάζας $m_3 = 3m$, το οποίο συγκρούεται ελαστικά και ακαριαία με το σύστημα $m_1 - m_2$. Μετά την κρούση, το m_3 απομακρύνεται και το σύστημα εκτελεί ΑΑΤ με $D = k$.

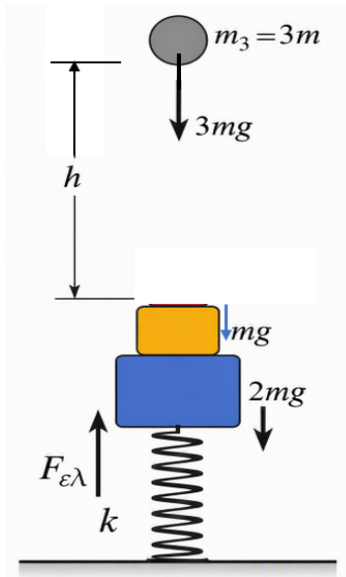
Να βρεθεί το μέγιστο ύψος h ώστε το m_2 να μην χάσει επαφή με το m_1 .

a) $h = \frac{3mg}{2k}$

b) $h = \frac{3mg}{k}$

c) $h = \frac{mg}{2k}$

Μονάδες 2 + 7



Λύση:

Βήμα 1: Ταχύτητα του m_3 πριν την κρούση

Το m_3 πέφτει από ύψος h :

$$v_3 = \sqrt{2gh}$$

Βήμα 2: Ελαστική κρούση

Οι μάζες:

$$m_3 = 3m, \quad m_1 + m_2 = 2m + m = 3m$$

Άρα οι μάζες είναι ίσες $\rightarrow$ στην ελαστική κρούση **ανταλλάσσουν ταχύτητες**.

Μετά την κρούση το σύστημα $m_1 + m_2$ αποκτά ταχύτητα:

$$V = \sqrt{2gh}$$

Βήμα 3: Η ταχύτητα αυτή είναι η μέγιστη ταχύτητα της ΑΑΤ

Το σύστημα βρισκόταν στη θέση ισορροπίας πριν την κρούση. Άρα μετά την κρούση, με $v = V$, ξεκινά ΑΑΤ με:

$$v_{max} = V = \sqrt{2gh}$$

Βήμα 4: Συνθήκη μη απώλειας επαφής

Το m_2 χάνει επαφή όταν η επιτάχυνση του συστήματος προς τα κάτω γίνει οριακά ίση με g .

Στη θέση όπου το m_2 τείνει να αποκολληθεί:

$$a = -\omega^2 x_{\alpha\pi} = -g$$

Άρα:

$$x_{\alpha\pi} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{(m_1+m_2)g}{k} = \frac{3mg}{k}$$

Βήμα 5: Το πλάτος της ΑΑΤ πρέπει να είναι $\leq x_{\alpha\pi}$

$$A = \frac{v_{\max}}{\omega} = \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{k/3m}}$$

$$A \leq x_{\alpha\pi} \Rightarrow \frac{\sqrt{2gh}}{\sqrt{k/3m}} \leq \frac{3mg}{k}$$

$$h \leq \frac{3mg}{2k}$$

Σωστή απάντηση: i) $h = \frac{3mg}{2k}$.

B3.

Στο Σχήμα 3 φαίνεται διάταξη συντονισμού. Ο διεγέρτης έχει συχνότητα f_δ που αυξάνεται σταδιακά. Παρατηρούμε ότι:

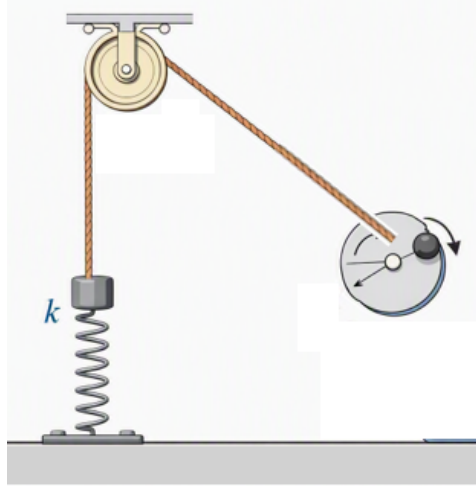
- Για f_1 και f_2 (με $f_2 > f_1$) το πλάτος είναι ίδιο: $A_1 = A_2$.
- Για f_3 και f_4 (με $f_4 > f_3$) το πλάτος είναι ίδιο: $A_3 = A_4$.
- Και $A_3 > A_1$.

Ποια σχέση ισχύει;

a) $f_2 - f_1 > f_4 - f_3$

b) $f_2 - f_1 = f_4 - f_3$

c) $f_2 - f_1 < f_4 - f_3$



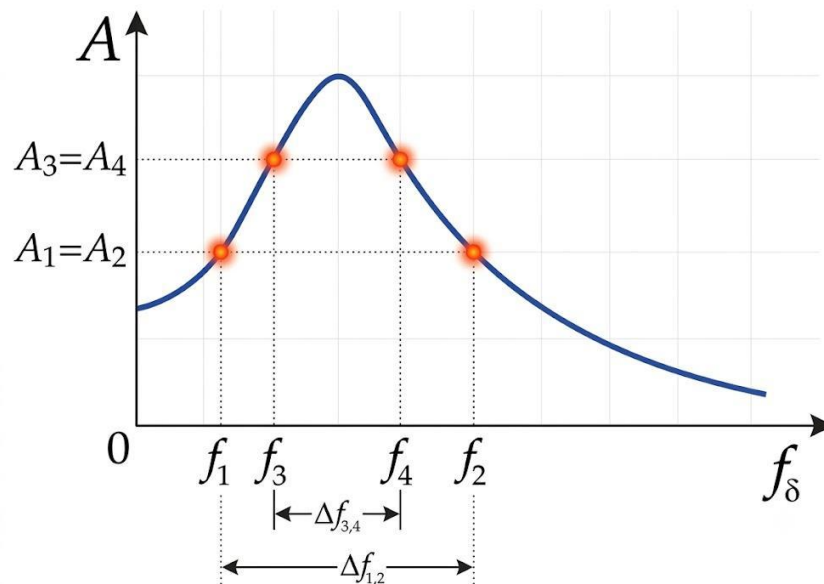
Μονάδες 2 + 6

Λύση:

Το διάγραμμα πλάτους–συχνότητας σε εξαναγκασμένη ταλάντωση έχει χαρακτηριστική μορφή:

- Το πλάτος αυξάνεται όσο πλησιάζουμε τη συχνότητα συντονισμού f_0 .
- Το μέγιστο πλάτος εμφανίζεται στο f_0 .
- Για ίσα πλάτη εκατέρωθεν του f_0 , οι συχνότητες είναι συμμετρικές ως προς f_0 .

Δεδομένα: $A_3 > A_1$



Άρα οι συχνότητες f_3 και f_4 βρίσκονται **ΠΙΟ ΚΟΝΤΑ** στο f_0 από ό,τι οι f_1 και f_2 .

Συνεπώς:

- Το διάστημα $f_4 - f_3$ είναι μικρότερο
- Το διάστημα $f_2 - f_1$ είναι μεγαλύτερο

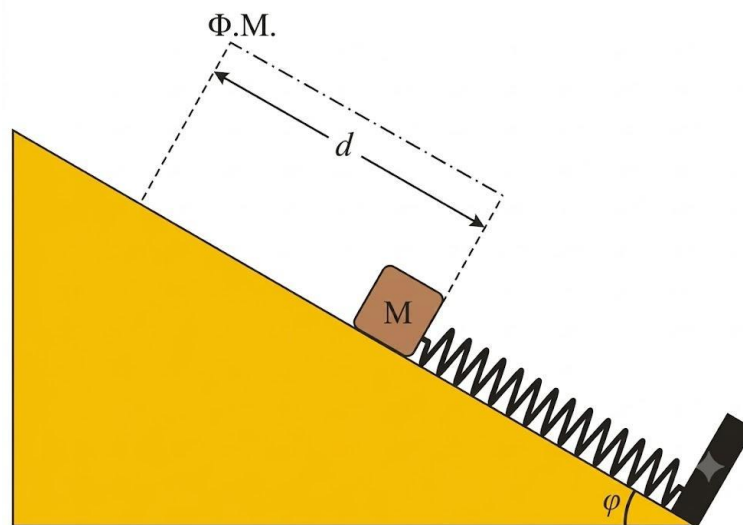
Άρα:

$$f_2 - f_1 > f_4 - f_3$$

Σωστή απάντηση: i) $f_2 - f_1 > f_4 - f_3$.

ΘΕΜΑ Γ

Γ1.

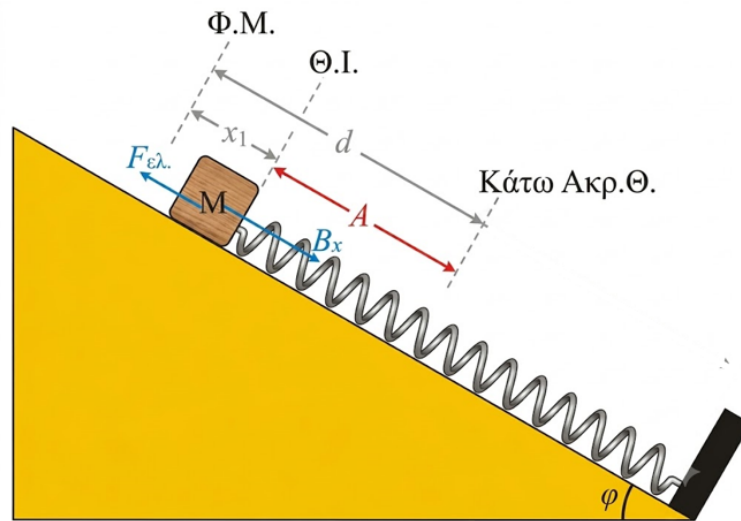


Σώμα μάζας $M = 2 \text{ kg}$ είναι δεμένο σε ιδανικό ελατήριο σταθεράς $k = 100 \text{ N/m}$, πάνω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο γωνίας $\phi = 30^\circ$. Το ελατήριο είναι αρχικά συσπειρωμένο κατά $d = 0,4 \text{ m}$ από το φυσικό του μήκος. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο και εκτελεί ΑΑΤ με $D = k$.

Να βρεθούν:

- το πλάτος της ταλάντωσης
- η ενέργεια της ταλάντωσης
- **Μονάδες 5**

Λύση:



Η αρχική θέση είναι η κάτω ακραία θέση όπως ΑΑΤ, γιατί το σώμα αφήνεται με $v = 0$.

Βήμα 1: Θέση ισορροπίας

Στη θέση ισορροπίας το ελατήριο ισορροπεί με τη συνιστώσα του βάρους κατά μήκος του κεκλιμένου:

$$k \cdot x_{eq} = M \cdot g \cdot \sin \phi$$

$$x_{eq} = \frac{M \cdot g \cdot \sin \phi}{k} = \frac{2 \cdot 10 \cdot 0.5}{100} = 0.1 \text{ m}$$

Βήμα 2: Πλάτος

Η αρχική θέση είναι απόσταση $d = 0.4 \text{ m}$ κάτω από το ΦΜ.

$$A = |d - x_{eq}| = |0.4 - 0.1| = 0.3 \text{ m}$$

Βήμα 3: Ενέργεια ταλάντωσης

$$E = \frac{1}{2} k A^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (0.3)^2 = 4.5 \text{ J}$$

Γ2.

Όταν το σώμα περνά για 1^η φορά από τη Θέση Ισορροπίας, να βρεθούν οι ρυθμοί μεταβολής:

- a) της κινητικής ενέργειας
- b) της δυναμικής ενέργειας της ταλάντωσης
- c) της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας

d) της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου

Μονάδες 6

Λύση:

Στη Θ.Ι. έχουμε $x = 0$ (ως όπως τη Θ.Ι.) και $v = v_{max}$.

$$v_{max} = \omega A = \sqrt{\frac{k}{M}} \cdot A = \sqrt{\frac{100}{2}} \cdot 0.3 = 5\sqrt{2} \cdot 0.3 = 1.5\sqrt{2} \text{ m/s}$$

i. Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma F \cdot v = (-D \cdot x) \cdot v = 0$$

ii. Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ταλάντωσης

$$U = \frac{1}{2} D x^2, \quad K + U = E = \text{σταθ.}$$

$$\frac{dU}{dt} = - \frac{dK}{dt} = 0$$

iii. Ρυθμός μεταβολής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας

$$\frac{dU_g}{dt} = M \cdot g \cdot v_y = M \cdot g \cdot v \cdot \sin \phi = 2 \cdot 10 \cdot 1.5\sqrt{2} \cdot 0.5 = 15\sqrt{2} \text{ J/s}$$

iv. Ρυθμός μεταβολής δυναμικής ενέργειας ελατηρίου

$$\frac{dU_{el}}{dt} = -k \cdot x \cdot v = -100 \cdot 0.1 \cdot 1.5\sqrt{2} = -15\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Γ3.

Όταν το σώμα περνά από το Φυσικό Μήκος του ελατηρίου, να βρεθεί η ταχύτητά του.

Μονάδες 4

Λύση:

Το ΦΜ απέχει από τη Θ.Ι. κατά $x_{eq} = 0.1 \text{ m}$.

Η δυναμική ενέργεια όπως ΑΑΤ στη θέση αυτή:

$$U = \frac{1}{2} k x_{eq}^2 = \frac{1}{2} \cdot 100 \cdot (0.1)^2 = 0.5 \text{ J}$$

Η συνολική ενέργεια είναι $E = 4.5 \text{ J}$.

Άρα:

$$K = E - U = 4.5 - 0.5 = 4 \text{ J}$$

$$v = \sqrt{\frac{2K}{M}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2 \text{ m/s}$$

Γ4.

Στη θέση ΦΜ το σώμα συγκρούεται πλαστικά με βλήμα μάζας m , που κινείται αντίρροπα με $v_2 = 4 \text{ m/s}$. Το συσσωμάτωμα ακινητοποιείται στιγμιαία. Να βρεθεί η μάζα m .

Μονάδες 4

Λύση:

Πριν την κρούση:

$$v_1 = 2 \text{ m/s (από το Γ3)}$$

Μετά την πλαστική κρούση:

$$(M + m) \cdot 0 = M \cdot v_1 + m \cdot (-v_2)$$

$$0 = 2 \cdot 2 - m \cdot 4$$

$$m = \frac{2 \cdot 2}{4} = 1 \text{ kg}$$

Γ5.

Το συσσωμάτωμα εκτελεί νέα ΑΑΤ με $D = k$. Να βρεθεί η συνάρτηση όπως ταχύτητας και η γραφική παράσταση για μία περίοδο.

Μονάδες 5

Λύση:

Η νέα μάζα είναι:

$$M' = M + m = 2 + 1 = 3 \text{ kg}$$

Η θέση αυτή, το ΦΜ (εκεί ακινητοποιήθηκε), είναι η πάνω ακραία όπως όπως ταλάντωσης. Λόγω αλλαγής όπως μάζας, αλλάζει και η Θέση Ισορροπίας. Στη Νέα Θέση Ισορροπίας:

$$k \cdot x_2 = (m + M) \cdot g \cdot \eta\mu\phi \rightarrow x_2 = 0.15 \text{ m}$$

Επομένως το πλάτος όπως όπως ταλάντωσης θα είναι $A' = x_2 = 0.15 \text{ m}$.

Νέα γωνιακή συχνότητα:

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{M}} = \sqrt{\frac{100}{3}} = \frac{10\sqrt{3}}{3} \text{ rad/s}$$

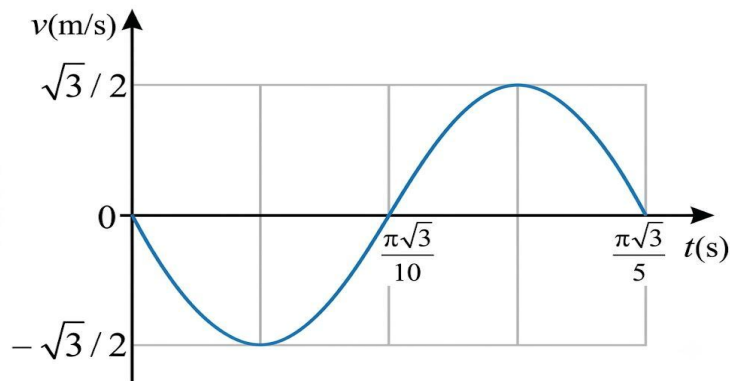
Η ταχύτητα ΑΑΤ:

$$v(t) = 0.15 \cdot \frac{10\sqrt{3}}{3} \cdot \cos\left(\omega' t + \frac{\pi}{2}\right)$$

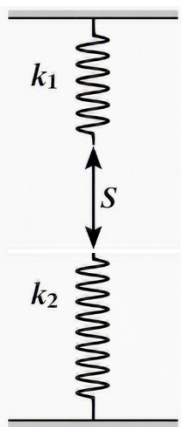
$$v(t) = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \cos\left(\omega' t + \frac{\pi}{2}\right) \text{ m/s} = -\frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \sin(\omega' t)$$

Η γραφική παράσταση είναι ένα αρνητικό ημίτονο με πλάτος $\frac{\sqrt{3}}{2}$ m/s και περίοδο:

$$T' = \frac{2\pi}{\omega'} = \frac{2\pi}{10\sqrt{3}/3} = \frac{\pi\sqrt{3}}{5} \text{ s}$$



ΘΕΜΑ Δ

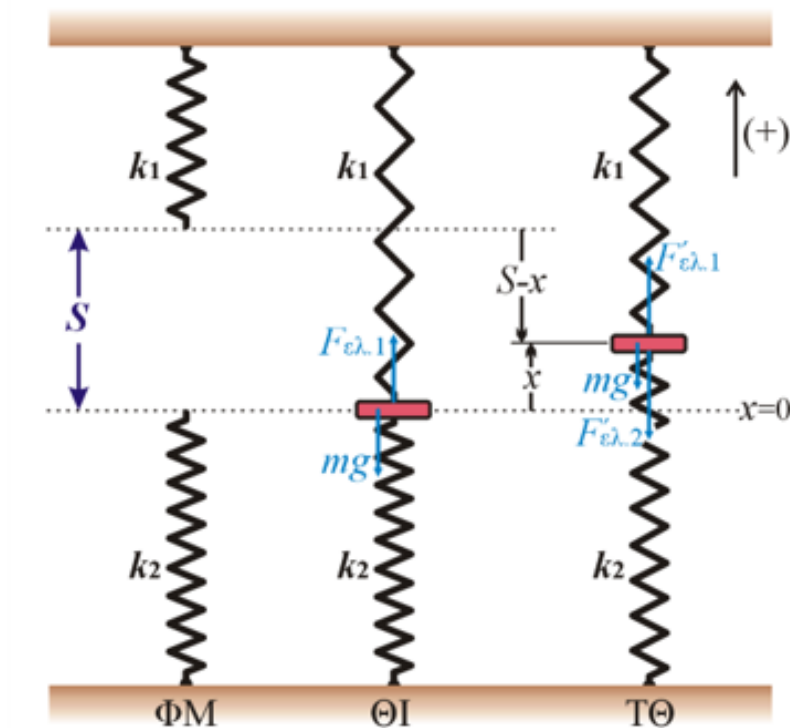


Δ1.

Δύο ιδανικά ελατήρια σταθερών $k_1 = 300 \text{ N/m}$ και $k_2 = 100 \text{ N/m}$ είναι στερεωμένα το ένα στο δάπεδο και το άλλο στην οροφή. Οι άξονές όπως συμπίπτουν στην ίδια κατακόρυφο. Τα ελεύθερα άκρα όπως απέχουν $S = 0.2 \text{ m}$ όταν έχουν το φυσικό όπως μήκος. Σε αυτά δένουμε σώμα μάζας $m = 6 \text{ kg}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Να αποδειχθεί ότι στη θέση ισορροπίας το ελατήριο k_2 δεν παραμορφώνεται.

Μονάδες 4

Λύση:



Το σώμα ισορροπεί όταν η συνισταμένη των δυνάμεων των δύο ελατηρίων ισούται με το βάρος.

Ας θεωρήσουμε ότι στερεώνουμε πρώτα το σώμα στο ελεύθερο κάτω άκρο του ελατηρίου με σταθερά k_1 . Στη θέση όπου το σώμα θα ισορροπήσει:

$$k_1 \cdot \Delta l_1 = m \cdot g$$

$$\Delta l_1 = \frac{m \cdot g}{k_1} = \frac{6 \cdot 10}{300} = 0.2 \text{ m}$$

Είναι φανερό ότι στη θέση αυτή το σώμα θα βρεθεί να ακουμπάει απλώς στο ελεύθερο άκρο του κάτω ελατηρίου χωρίς να το συμπιέζει.

Άρα το σώμα ισορροπεί στο ΦΜ του $k_2 \rightarrow$ το k_2 **δεν παραμορφώνεται**.

Δ2.

Από τη θέση ισορροπίας εκτρέπουμε το σώμα κατά $d = 0.2 \text{ m}$ προς τα πάνω και το αφήνουμε. Να αποδειχθεί ότι εκτελεί ΑΑΤ και να βρεθεί η συχνότητα.

Μονάδες 5

Λύση:

Στη θέση ισορροπίας ισχύει:

$$k_1 \cdot \Delta l_1 = m \cdot g$$

Σε μια τυχαία θέση, έστω κατά x πάνω από τη θέση ισορροπίας:

$$\Sigma F = k_1 \cdot (\Delta l_1 - x) - k_2 \cdot x - m \cdot g$$

$$\Sigma F = k_1 \cdot \Delta l_1 - k_1 \cdot x - k_2 \cdot x - k_1 \cdot \Delta l_1$$

$$\Sigma F = - (k_1 + k_2) \cdot x$$

Άρα η κίνηση είναι ΑΑΤ με:

$$D = k_1 + k_2 = 300 + 100 = 400 \text{ N/m}$$

και συχνότητα:

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{D}{m}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{400}{6}} = 1.30 \text{ Hz}$$

Δ3.

Να βρεθεί η εξίσωση της επιτάχυνσης και η γραφική παράσταση για t από 0 έως $2T$.

Μονάδες 5

Λύση:

Το σώμα αφήνεται από την άνω ακραία θέση:

$$A = d = 0.2 \text{ m}, \quad \phi_0 = \frac{\pi}{2}$$

$$\omega = \sqrt{\frac{D}{m}} = \sqrt{\frac{400}{6}} = 8.16 \text{ rad/s}$$

Η επιτάχυνση:

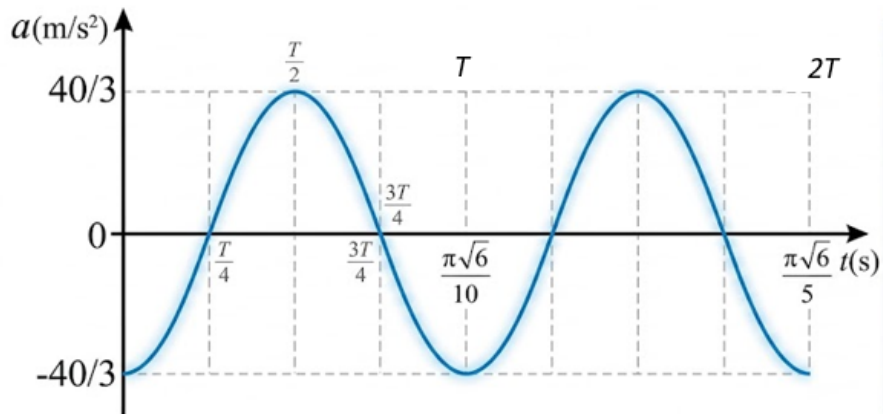
$$a(t) = -\omega^2 \cdot A \cdot \sin(\omega t + \pi/2)$$

$$a(t) = - (8.16)^2 \cdot 0.2 \cdot \cos(8.16t)$$

$$a(t) = -13.3 \cdot \cos(8.16t) \text{ m/s}^2$$

Η γραφική παράσταση είναι ένα αρνητικό συνημίτονο με πλάτος 13.3 m/s^2 και περίοδο:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 0.77 \text{ s}$$



Δ4.

Όταν το σώμα περνά από θέση με απομάκρυνση $x' = + 0.1 \text{ m}$ κινούμενο προς τα κάτω, να βρεθούν:

- a) η κινητική ενέργεια
- b) ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας
- c) ο ρυθμός μεταβολής της δυναμικής ενέργειας του ελατηρίου k_1

Μονάδες 7

Λύση:

i. Κινητική ενέργεια

$$E = \frac{1}{2}DA^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot (0.2)^2 = 8 \text{ J}$$

$$U = \frac{1}{2}D \cdot x'^2 = \frac{1}{2} \cdot 400 \cdot (0.1)^2 = 2 \text{ J}$$

$$K = E - U = 6 \text{ J}$$

ii. Ρυθμός μεταβολής κινητικής ενέργειας

$$\frac{dK}{dt} = F \cdot v = (-D \cdot x') \cdot v$$

Το σώμα κινείται προς τα κάτω $\rightarrow v < 0$.

$$K = \frac{1}{2}m \cdot v^2 \rightarrow 6 = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot v^2 \rightarrow v = -\sqrt{2} \text{ m/s}$$

$$\frac{dK}{dt} = -400 \cdot (+0.1) \cdot (-\sqrt{2}) = +40\sqrt{2} \text{ J/s}$$

iii. Ρυθμός μεταβολής U_1

Το k_1 έχει παραμόρφωση:

$$\Delta l_1 = 0.2 - 0.1 = 0.1 \text{ m}$$

η οποία (αφού το σώμα κινείται προς τα κάτω) θα γίνει πιο μεγάλη, συνεπώς η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου είναι σε φάση ανάπτυξης ($dU/dt > 0$).

Άρα:

$$\frac{dU_1}{dt} = k_1 \cdot \Delta l_1 \cdot v = 300 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ J/s}$$

$$\frac{dU_1}{dt} = k_1 \cdot \Delta l_1 \cdot v = 300 \cdot 0.1 \cdot \sqrt{2} = 30\sqrt{2} \text{ J/s}$$

Δ5.

Να βρεθεί η δύναμη του ελατηρίου k_2 ως συνάρτηση της απομάκρυνσης x και η γραφική παράσταση.

Μονάδες 4

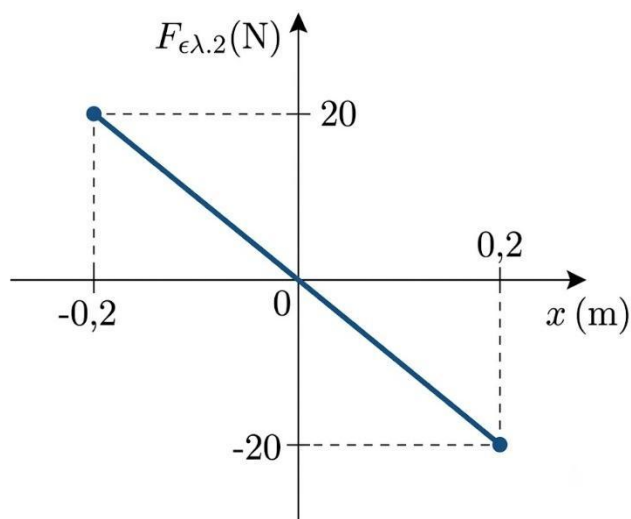
Λύση:

Το ΦΜ του k_2 είναι η Θ.Ι. της ΑΑΤ.

Άρα, σε τυχαία θέση απομάκρυνσης x θα είναι:

$$F_2 = -k_2 \cdot x = -100 \cdot x$$

Η γραφική παράσταση είναι ευθεία με αρνητική κλίση.



Επιμέλεια: Τάσος Τζανόπουλος | <https://httpmyphysics.blogspot.com/>