

Phần I: Trắc nghiệm (2,0 điểm). Hãy chọn phương án trả lời đúng và viết chữ cái đứng trước phương án đó vào bài làm.

Câu 1. Điều kiện để biểu thức $2020\sqrt{3-x}$ có nghĩa là

A. $x \geq 3$.

B. $x \neq 3$.

C. $x \leq 3$.

D. $x < 3$.

Câu 2. Hàm số nào sau đây đồng biến trên $\mathbb{R}$?

A. $y = -5x + 3$.

B. $y = 5$.

C. $y = 5x - 1$.

D. $y = -5$.

Câu 3. Hệ phương trình $\begin{cases} 5x - 2y = 5 \\ 2x + y = 11 \end{cases}$ có nghiệm $(x; y)$ là

A. $(3; 5)$.

B. $(5; 3)$.

C. $(-5; 3)$.

D. $(3; -5)$.

Câu 4. Tìm a , biết đồ thị của hàm số $y = 2x - a$ đi qua điểm $(0; 1)$.

A. $a = 2$.

B. $a = -1$.

C. $a = 1$.

D. $a = -2$.

Câu 5. Trong các phương trình sau, phương trình nào có nghiệm kép?

A. $x^2 + 8x + 7 = 0$.

B. $x^2 - 9 = 0$.

C. $x^2 - 7x + 4 = 0$.

D. $x^2 - 6x + 9 = 0$.

Câu 6. Cho tam giác ABC vuông tại B, biết $AC = 10$ cm, góc A bằng 60° . Độ dài đoạn AB là

A. $5\sqrt{3}$ cm.

B. $10\sqrt{3}$ cm.

C. 5 cm.

D. $\frac{10\sqrt{3}}{3}$ cm.

Câu 7. Cho đường tròn $(O; 5$ cm) và đường tròn $(O'; 7$ cm), biết $OO' = 2$ cm. Vị trí tương đối của hai đường tròn đó là

A. cắt nhau.

B. tiếp xúc trong.

C. tiếp xúc ngoài.

D. đựng nhau.

Câu 8. Diện tích xung quanh hình trụ có bán kính đáy 5 cm, chiều cao 2 cm là

A. 20π cm².

B. 10π cm².

C. 20 cm².

D. 10 cm².

Phần II: Tự luận (8,0 điểm)

Bài 1. (1,5 điểm)

1) Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} - \sqrt{5} + \sqrt{20} = 4$.

2) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2}{x-2\sqrt{x}}$ (với $x > 0; x \neq 4$).

Bài 2. (1,5 điểm) Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$ (với m là tham số).

1) Giải phương trình khi $m = 4$.

2) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m . Tìm m để $x_1; x_2$

thỏa mãn: $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 = -17$.

Bài 3. (1,0 điểm) Giải hệ phương trình: $\begin{cases} 2(x-2)^2 + \frac{1}{\sqrt{y+5}} = 3 \\ (x-2)^2 - \frac{2}{\sqrt{y+5}} = -1 \end{cases}$

Bài 4. (3,0 điểm) Cho tam giác nhọn ABC nội tiếp đường tròn (O, R) . Hai đường cao BD, CE của tam giác ABC cắt nhau tại H . Các tia BD, CE cắt đường tròn (O, R) lần lượt tại điểm thứ hai là P, Q .

1) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp và cung AP bằng cung AQ .

2) Chứng minh E là trung điểm của HQ và $OA \perp DE$.

3) Cho góc CAB bằng 60° , $R = 6$ cm. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp tam giác AED .

Bài 5. (1,0 điểm)

1) Giải phương trình: $\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{4x - 1} + 2x^2 + 3x - 3 = 0$.

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh: $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq 1$.

---HẾT---

Đáp án tham khảo:

Phần I. Trắc nghiệm (2 điểm):

1. C	2. C	3. A	4. B	5. D	6. C	7. B	8. A
------	------	------	------	------	------	------	------

Phần II. Tự luận (8 điểm):

Bài 1 (1,5 điểm):

Cách giải:

1) Chứng minh đẳng thức: $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} - \sqrt{5} + \sqrt{20} = 4$.

Ta có:

$$\begin{aligned} & \sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} - \sqrt{5} + \sqrt{20} \\ &= |\sqrt{5}-4| - \sqrt{5} + \sqrt{2^2 \cdot 5} \\ &= 4 - \sqrt{5} - \sqrt{5} + 2\sqrt{5} \\ &= 4. \end{aligned}$$

Vậy $\sqrt{(\sqrt{5}-4)^2} - \sqrt{5} + \sqrt{20} = 4$.

2) Rút gọn biểu thức: $P = \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2}{x-2\sqrt{x}}$ với $x > 0, x \neq 4$.

Điều kiện: $x > 0, x \neq 4$.

$$\begin{aligned} P &= \left(\frac{1}{\sqrt{x}+2} + \frac{1}{\sqrt{x}-2} \right) : \frac{2}{x-2\sqrt{x}} \\ &= \frac{\sqrt{x}-2+\sqrt{x}+2}{(\sqrt{x}-2)(\sqrt{x}+2)} \cdot \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}-2)}{2} \\ &= \frac{2\sqrt{x}}{\sqrt{x}+2} \cdot \frac{\sqrt{x}}{2} \\ &= \frac{x}{\sqrt{x}+2}. \end{aligned}$$

Vậy với $x > 0, x \neq 4$ thì $P = \frac{x}{\sqrt{x}+2}$.

Bài 2 (1,5 điểm):

Cách giải:

Cho phương trình: $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$ (với m là tham số).

1) Giải phương trình khi $m = 4$.

Khi $m = 4$ ta có phương trình:

$$x^2 - (2.4 + 1)x + 4^2 + 4 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 9x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x^2 - 5x - 4x + 20 = 0$$

$$\Leftrightarrow x(x-5) - 4(x-5) = 0$$

$$\Leftrightarrow (x-5)(x-4) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x-5=0 \\ x-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=5 \\ x=4 \end{cases}$$

Vậy với $m = 4$ thì phương trình có tập nghiệm $S = \{4; 5\}$.

2) Chứng minh rằng phương trình luôn có hai nghiệm phân biệt $x_1; x_2$ với mọi m . Tìm m để x_1, x_2 thỏa mãn $x_1^2 + x_2^2 - 5x_1x_2 = -17$.

Xét phương trình $x^2 - (2m+1)x + m^2 + m = 0$ có:

$$\Delta = (2m+1)^2 - 4(m^2 + m)$$

$$= 4m^2 + 4m + 1 - 4m^2 - 4m$$

$$= 1 > 0 \quad \forall m$$

$\Rightarrow$ Phương trình đã cho luôn có hai nghiệm phân biệt x_1, x_2 với mọi m .

Áp dụng hệ thức Vi-et ta có: $\begin{cases} x_1 + x_2 = 2m + 1 \\ x_1 x_2 = m^2 + m \end{cases}$.

Theo đề bài ta có:

$$x_1^2 + x_2^2 - 5x_1 x_2 = -17$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 2x_1 x_2 - 5x_1 x_2 = -17$$

$$\Leftrightarrow (x_1 + x_2)^2 - 7x_1 x_2 = -17$$

$$\Leftrightarrow (2m + 1)^2 - 7(m^2 + m) = -17$$

$$\Leftrightarrow 4m^2 + 4m + 1 - 7m^2 - 7m = -17$$

$$\Leftrightarrow 3m^2 + 3m - 18 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m^2 + 3m - 2m - 6 = 0$$

$$\Leftrightarrow m(m + 3) - 2(m + 3) = 0$$

$$\Leftrightarrow (m + 3)(m - 2) = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m + 3 = 0 \\ m - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} m = -3 \\ m = 2 \end{cases}$$

Vậy $m = -3$ và $m = 2$ thỏa mãn bài toán.

Bài 3. (1,0 điểm)

Cách giải:

Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} 2(x-2)^2 + \frac{1}{\sqrt{y+5}} = 3 \\ (x-2)^2 - \frac{2}{\sqrt{y+5}} = -1 \end{cases}.$$

ĐKXD: $y > -5$.

Đặt $u = (x-2)^2 \geq 0$; $v = \frac{1}{\sqrt{y+5}} > 0$, hệ phương trình trở thành:

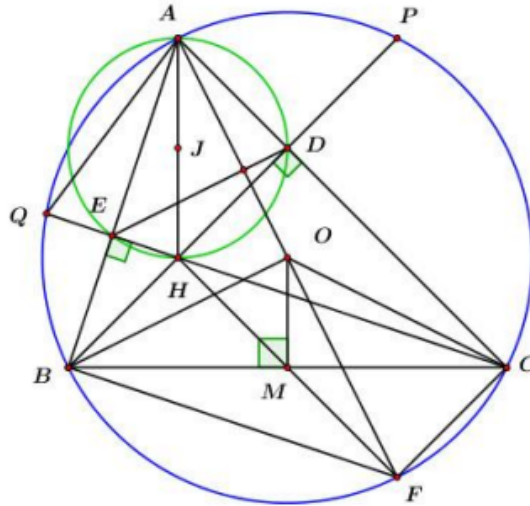
$$\begin{aligned} \begin{cases} 2u + v = 3 \\ u - 2v = -1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} 4u + 2v = 6 \\ u - 2v = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5u = 5 \\ v = 3 - 2u \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} u = 1 \text{ (tm)} \\ v = 1 \text{ (tm)} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} (x-2)^2 = 1 \\ \frac{1}{\sqrt{y+5}} = 1 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x-2 = 1 \\ x-2 = -1 \end{cases} \\ \sqrt{y+5} = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ y+5 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{cases} x = 3 \\ x = 1 \end{cases} \\ y = -4 \text{ (tm)} \end{cases} \end{aligned}$$

Vậy hệ phương trình có nghiệm $(x; y) \in \{(3; -4); (1; -4)\}$.

Bài 4. (3,0 điểm)

Cách giải:

Cho $\triangle ABC$ là tam giác nhọn nội tiếp đường tròn $(O; R)$. Hai đường cao BD, CE của $\triangle ABC$ cắt nhau tại H . Các tia BD, CE cắt đường tròn $(O; R)$ lần lượt tại điểm thứ hai là P, Q .



1) Chứng minh tứ giác $BCDE$ nội tiếp và cung $AP =$ cung AQ .

Ta có: BD, CE là các đường cao của $\triangle ABC$

$$\Rightarrow \begin{cases} BD \perp AC = \{D\} \\ CE \perp AB = \{E\} \end{cases} \Rightarrow \angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$$

Xét tứ giác $BEDC$ ta có:

$$\angle BEC = \angle BDC = 90^\circ$$

Mà hai đỉnh E, D là hai đỉnh kề nhau

$\Rightarrow BEDC$ là tứ giác nội tiếp. (đhnb)

Vì $BEDC$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$$\Rightarrow \angle EBD = \angle ECD \text{ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung } ED)$$

$$\Rightarrow \angle ABP = \angle ACQ$$

Lại có: $\angle ABP, \angle ACQ$ lần lượt là các góc nội tiếp chắn các cung AP, AQ

$\Rightarrow$ cung $AP =$ cung AQ (hai góc nội tiếp bằng nhau chắn hai cung bằng nhau) (đpcm).

2) Chứng minh E là trung điểm của HQ và $OA \perp DE$.

Xét tứ giác $AEHD$ ta có:

$$\angle AEH + \angle ADH = 90^\circ + 90^\circ = 180^\circ$$

Mà hai góc này là hai góc đối diện

$\Rightarrow AEHD$ là tứ giác nội tiếp. (dnhb)

$\Rightarrow \angle EAH = \angle EDH$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EH).

Vì $BEDC$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \angle EDB = \angle ECB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung EB)

$\Rightarrow \angle AEH = \angle ECB (= \angle EDH)$

Hay $\angle EAH = \angle BAH = \angle BCQ$

Lại có: $\angle QAB = \angle QCB$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung QB)

$\Rightarrow \angle EAH = \angle EAQ (= \angle BCQ)$

$\Rightarrow AE$ là tia phân giác của $\angle QAH$.

Xét $\triangle QAH$ ta có: AE vừa là đường cao, vừa là đường phân giác

$\Rightarrow \triangle QAH$ cân tại A . (Tính chất tam giác cân)

$\Rightarrow AE$ cũng là đường trung tuyến của $\triangle AQH$.

$\Rightarrow E$ là trung điểm của HQ . (đpcm)

Kéo dài AO cắt đường tròn (O) tại F .

Khi đó ta có: $\angle ABC = \angle AFC$ (hai góc nội tiếp cùng chắn cung AC)

Vì $BCDE$ là tứ giác nội tiếp (cmt)

$\Rightarrow \angle ADE = \angle ABC$ (góc ngoài tại một đỉnh bằng góc trong tại đỉnh đối diện)

$\Rightarrow \angle ADB = \angle AFC (= \angle ABC)$

Ta có: $\angle ACF = 90^\circ$ (góc nội tiếp chắn nửa đường tròn)

$\Rightarrow \angle CAF + \angle AFC = 90^\circ$

$\Rightarrow \angle FAC + \angle ADE = 90^\circ$

Hay $\angle DAO + \angle ADE = 90^\circ$

$\Rightarrow AO \perp DE$ (dpcm).

3) Cho $\angle CAB = 60^\circ$, $R = 6\text{cm}$. Tính bán kính đường tròn ngoại tiếp $\triangle AED$.

Theo chứng minh b) ta có: $AEDH$ là tứ giác nội tiếp

$\Rightarrow$ Đường tròn ngoại tiếp $\triangle AED$ là đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDH$.

Ta có: $\angle AEH = 90^\circ$ và là góc nội tiếp chắn cung AH

$\Rightarrow AH$ là đường kính của đường tròn ngoại tiếp tứ giác $AEDH$.

Gọi J là tâm đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE \Rightarrow J$ là trung điểm của AH .

Gọi M là trung điểm của BC .

Ta có: $\begin{cases} FC \perp AC \\ DB \perp AC \end{cases} \Rightarrow FC \parallel BD \text{ hay } BH \parallel FC.$

$$\begin{cases} CE \perp AB \\ BF \perp AB \end{cases} \Rightarrow CE \parallel BF \text{ hay } BF \parallel CH.$$

$\Rightarrow BHCF$ là hình bình hành.

$\Rightarrow BC, HF$ cắt nhau tại trung điểm của mỗi đường

Mà M là trung điểm của BC

$\Rightarrow M$ cũng là trung điểm của HF .

Xét $\triangle AHF$ ta có:

O, M lần lượt là trung điểm của AF, HF

$$\Rightarrow OM \text{ là đường trung bình của } \triangle AHF \Rightarrow \begin{cases} OM \parallel AH \\ OM = \frac{1}{2} AH \end{cases}.$$

Ta có: $\angle BOC$ là góc ở tâm chắn cung BC

$\angle BAC$ là góc ở tâm chắn cung BC

$$\Rightarrow \angle BOC = 2\angle BAC = 2.60^\circ = 120^\circ$$

$\triangle OBC$ cân tại O có đường trung tuyến OM

$\Rightarrow OM$ cũng là phân giác của $\angle BOC$

$$\Rightarrow \angle BOM = 60^\circ.$$

Xét $\triangle OBM$ ta có: $OM = OB \cdot \cos \angle BOM = 6 \cdot \cos 60^\circ = 3 \text{ cm}.$

$$\Rightarrow AH = 2OM = 2 \cdot 3 = 6 \text{ cm}.$$

Vậy bán kính của đường tròn ngoại tiếp $\triangle ADE$ là: $AJ = \frac{1}{2} AH = 3 \text{ cm}.$

Bài 5. (1,0 điểm)

Cách giải:

1) Giải phương trình: $\sqrt{2}\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{4x - 1} + 2x^2 + 3x - 3 = 0.$

Điều kiện: $x \geq \frac{1}{4}$

$$\begin{aligned} & \sqrt{2}\sqrt{2x^2 + x + 1} - \sqrt{4x - 1} + 2x^2 + 3x - 3 = 0 \\ \Leftrightarrow & \sqrt{4x^2 + 2x + 2} - 2 + 1 - \sqrt{4x - 1} + 2x^2 + 3x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4x^2 + 2x + 2 - 4}{\sqrt{4x^2 + 2x + 2} + 2} + \frac{1 - 4x + 1}{1 + \sqrt{4x - 1}} + 2x^2 + 4x - x - 2 = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{4x^2 + 2x - 2}{\sqrt{4x^2 + 2x + 2} + 2} + \frac{2 - 4x}{1 + \sqrt{4x - 1}} + 2x(x + 2) - (x + 2) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(2x^2 + x - 1)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 2} + 2} + \frac{2(1 - 2x)}{1 + \sqrt{4x - 1}} + (x + 2)(2x - 1) = 0 \\ \Leftrightarrow & \frac{2(2x - 1)(x + 1)}{\sqrt{4x^2 + 2x + 2} + 2} - \frac{2(2x - 1)}{1 + \sqrt{4x - 1}} + (x + 2)(2x - 1) = 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (2x-1) \left[\frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+2}+2} - \frac{2}{\sqrt{4x-1}+1} + x+2 \right] = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x-1=0 \\ \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+2}+2} - \frac{2}{\sqrt{4x-1}+1} + x+2 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ (tm)} \\ \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+2}+2} + x+2 - \frac{2}{\sqrt{4x-1}+1} = 0 \text{ (*)} \end{cases}$$

$$\text{Với } x \geq \frac{1}{4} \Rightarrow \sqrt{4x-1}+1 \geq 1 \Rightarrow \frac{2}{\sqrt{4x-1}+1} \leq 2$$

$$\Rightarrow 2 - \frac{2}{\sqrt{4x-1}+1} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{2x+1}{\sqrt{4x^2+2x+2}+2} + x+2 - \frac{2}{\sqrt{4x-1}+1} > 0 \quad \forall x \geq \frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow (*) \text{ vô nghiệm.}$$

Vậy phương trình có nghiệm duy nhất $x = \frac{1}{2}$.

2) Cho các số thực dương a, b, c thỏa mãn: $ab + bc + ca = 3$.

Chứng minh: $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq 1$.

Sưu tầm: Facebook.

Đặt $P = \frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}$

Áp dụng bất đẳng thức Cô-si cho hai số dương $\frac{9a^3}{b+2c}; (b+2c)a$ ta có: $\frac{9a^3}{b+2c} + (b+2c)a \geq 6a^2$

Tương tự ta có:
$$\begin{cases} \frac{9b^3}{c+2a} + (c+2a)b \geq 6b^2 \\ \frac{9c^3}{a+2b} + (a+2b)c \geq 6c^2 \end{cases}$$

Cộng vế với vế ba bất đẳng thức cùng chiều ta có:

$$\begin{aligned} & 9\left(\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b}\right) + (b+2c)a + (c+2a)b + (a+2b)c \geq 6a^2 + 6b^2 + 6c^2 \\ & \Leftrightarrow 9P + 3(ab + bc + ca) \geq 6(a^2 + b^2 + c^2) \\ & \Leftrightarrow 9P + 9 \geq 6(a^2 + b^2 + c^2) \\ & \Leftrightarrow 3P + 3 \geq 2(a^2 + b^2 + c^2) \end{aligned}$$

Lại có: $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + bc + ca = 3$

$$\Rightarrow 3P \geq 2 \cdot 3 - 3 = 3$$

$$\Leftrightarrow P \geq 1.$$

Vậy $\frac{a^3}{b+2c} + \frac{b^3}{c+2a} + \frac{c^3}{a+2b} \geq 1$.