

Цель занятия:

Деятельностная:

- создать условия для усвоения учащимися умения анализировать и изображать взаимное расположение прямых и плоскостей в пространстве, применять теоретические знания при решении геометрических задач.

Содержательная:

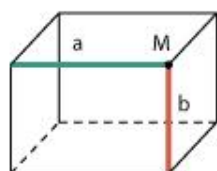
- сформировать целостное представление о различных случаях взаимного расположения прямых и плоскостей в пространстве;
- расширить знания обучающихся о свойствах параллельности в пространстве, включая параллельность прямых, прямой и плоскости;
- обеспечить усвоение признаков параллельности геометрических объектов в пространстве;
- развить умения применять теоретические знания при решении задач на построение сечений;
- сформировать навыки работы с углами между прямыми в пространстве.

План занятия:

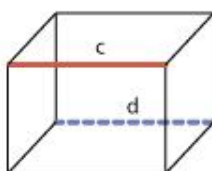
1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые
2. Параллельные прямая и плоскость

Ход занятия

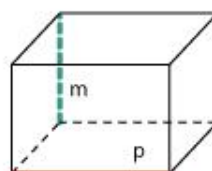
1. Пересекающиеся, параллельные и скрещивающиеся прямые



пересекаются
 $a \cap b = M$



параллельны
 $c \parallel d$



скрещиваются
 $m \not\perp p$

Прямые p и q имеют только одну общую точку $K \Rightarrow$ прямые p и q пересекаются в точке K ($p \cap q = K$).	Параллельные прямые – это прямые, которые лежат в одной плоскости и не пересекаются, сколько бы их не продолжали: $a \parallel b$.	Две прямые называются скрещивающимися, если не существует плоскости, в которой они обе лежат.

Признаки параллельных прямых

Если две прямые (a и b) пересечены третьей и оказалось, что:

- 1) какие-нибудь два накрест лежащих угла равны, ИЛИ
- 2) какие-нибудь два соответственных угла равны, ИЛИ

3) сумма хоть каких-то двух внутренних односторонних равна 180° , ИЛИ

4) сумма хоть каких – то двух внешних односторонних равна 180° ,

то прямые a и b – параллельны

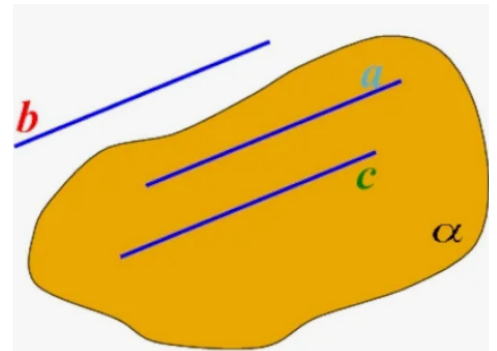
Параллельность трёх прямых

Теорема о параллельности трёх прямых: если две прямые параллельны третьей прямой, то они все параллельны между собой.

□ Пусть $a \parallel c$ и $b \parallel c$. Нужно доказать, что $a \parallel b$. Для этого необходимо показать, что прямые a и b :

1. Лежат в одной плоскости. Отметим какую-нибудь точку M на прямой b и обозначим буквой α плоскость, проходящую через прямую a и точку M .

2. Не пересекаются. Если допустить, что прямые a и b пересекаются, то через точку их пересечения проходили бы две прямые (a и b), параллельные прямой c , а это невозможно. ■

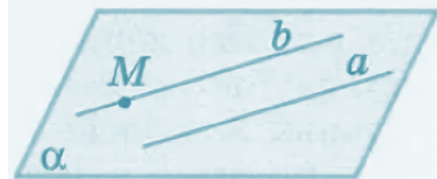
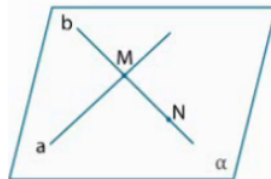
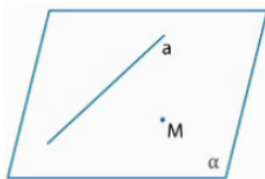


Следствия из аксиом стереометрии

Теорема 1. Через прямую и не лежащую на ней точку проходит единственная плоскость.

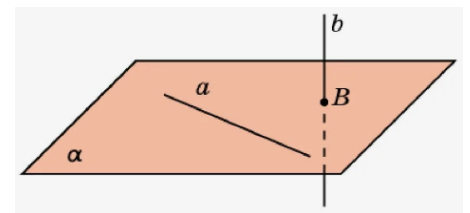
Теорема 2. Через две пересекающиеся прямые проходит единственная плоскость.

Теорема 3. Через две параллельные прямые проходит единственная плоскость.



Признак и свойство скрещивающихся прямых

Теорема 1 (признак скрещивающихся прямых). Если одна из двух прямых лежит в некоторой плоскости, а другая прямая пересекает эту плоскость в точке, не принадлежащей первой прямой, то эти прямые скрещивающиеся.



Теорема 2. Через каждую из двух скрещивающихся прямых проходит единственная плоскость, параллельная другой прямой.

2. Параллельные прямая и плоскость

Определение

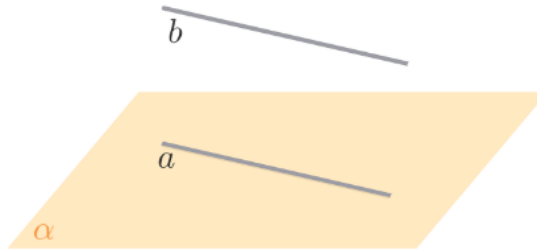
Две прямые в пространстве называются параллельными, если они лежат в одной плоскости и не пересекаются.

Прямая и плоскость называются параллельными, если они не имеют общих точек. Если прямая a параллельна плоскости β , то пишут: $a \parallel \beta$

Признак

Теорема 1 (признак параллельности прямой и плоскости). Если прямая, не лежащая в данной плоскости, параллельна какой-нибудь прямой, лежащей в этой плоскости, то она параллельна данной плоскости.

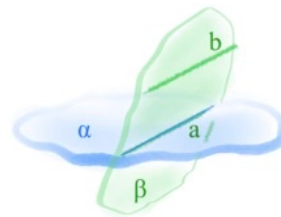
$$a \notin \alpha, b \subset \alpha, a \parallel b \rightarrow a \parallel \alpha.$$



Свойства

Свойство 1. Если плоскость проходит через данную прямую, параллельную другой плоскости, и пересекает эту плоскость, то линия пересечения плоскостей параллельна данной прямой.

□ Итак, пусть через прямую a , параллельную плоскости α , проходит плоскость β , пересекающая плоскость α по прямой b . Докажем, что прямые a и b параллельны.

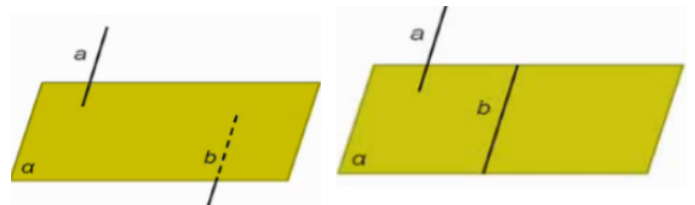


$$\left. \begin{array}{l} b \parallel \alpha \\ b \subset \beta \\ \alpha \cap \beta = a \end{array} \right\} \Rightarrow b \parallel a$$

Действительно, прямые a , b лежат в одной плоскости β и не пересекаются, ведь в противном случае прямая a пересекала бы плоскость α , что невозможно, так как по условию прямая a параллельна плоскости α . Значит прямые a и b параллельны, что и требовалось доказать. ■

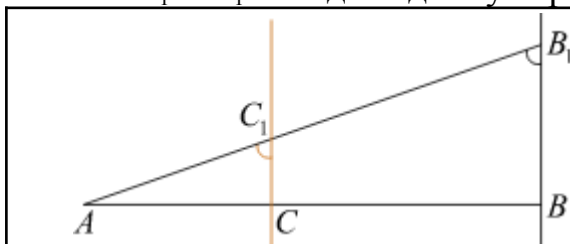
Свойство 2. Если одна из двух параллельных прямых параллельна данной плоскости, то другая прямая либо также параллельна данной плоскости, либо лежит в этой плоскости.

□ Пусть a и b – параллельные прямые, причем прямая a параллельна плоскости α . Следовательно, прямая a не пересекает плоскость α . Тогда, по лемме о пересечении плоскости параллельными прямыми, прямая b тоже не пересекает плоскость α . А это значит, что прямая b либо параллельна плоскости α , либо лежит в ней. ■



Задачи с решением

Задание 1. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α . Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 . Найдите длину отрезка CC_1 если $AC : AB = 3 : 5$, а $BB_1 = 16$.



Дано: прямая AB ; плоскость α
 $CC_1 \parallel BB_1$
 $CC_1 \cap \alpha = C_1$; $BB_1 \cap \alpha = B_1$
 $AC : AB = 3 : 5$
 $BB_1 = 16$

Найти: $CC_1 = ?$

Решение:

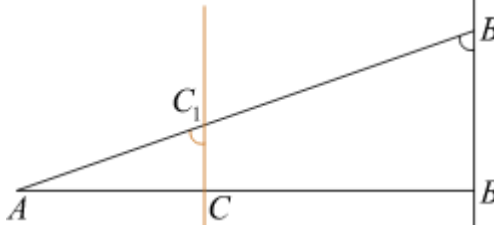
Заметим, что CC_1 и BB_1 образуют плоскость, которая пересекает плоскость α по прямой AB_1 и содержит прямую AB . Рассмотрим треугольник ΔACC_1 и ΔABB_1 : $\angle A$ – общий, $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$ – соответственные, при параллельных прямых CC_1 и BB_1 и

секущей AB . Тогда треугольники ACC_1 и ABB_1 подобны. Тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC_1}{AB_1}$.

Зная, что $AC : AB = 3 : 5$, а $BB_1 = 16$, получаем : $\frac{CC_1}{16} = \frac{3}{5} \Leftrightarrow CC_1 = 9,6$

Ответ: 9,6.

Задание 2. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α . Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 . Найдите длину отрезка CC_1 если $AC : AB = 2 : 1$, а $BB_1 = 12$.

	Дано: прямая AB; плоскость α $CC_1 \parallel BB_1$ $CC_1 \cap \alpha = C_1$; $BB_1 \cap \alpha = B_1$ $AC : AB = 2 : 1$ $BB_1 = 12$ Найти: $CC_1 = ?$
---	--

Решение:

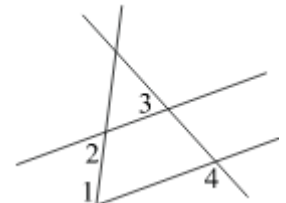
Заметим, что CC_1 и BB_1 образуют плоскость, которая пересекает плоскость α по прямой AB_1 и содержит прямую AB . Рассмотрим треугольник ΔACC_1 и ΔABB_1 : $\angle A$ – общий, $\angle ACC_1 = \angle ABB_1$ – соответственные, при параллельных прямых CC_1 и BB_1 и

секущей AB . Тогда треугольники ACC_1 и ABB_1 подобны. Тогда $\frac{AC}{AB} = \frac{CC_1}{BB_1} = \frac{AC_1}{AB_1}$.

Зная, что $AC : AB = 2 : 1$, а $BB_1 = 12$ получаем : $\frac{CC_1}{12} = \frac{2}{1} \Leftrightarrow CC_1 = 24$

Ответ: 24.

Задание 3. На плоскости даны четыре прямые. Известно, что $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 55^\circ$. Найдите $\angle 4$. Ответ дайте в градусах.

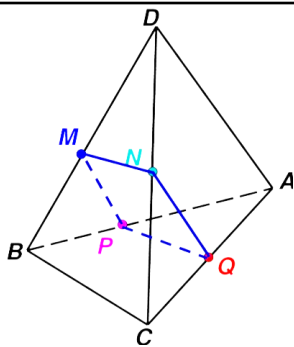
	Дано: $\angle 1 = 120^\circ$, $\angle 2 = 60^\circ$, $\angle 3 = 55^\circ$ Найти: $\angle 4 = ?$
---	--

Решение

Так как $\angle 1$ и $\angle 2$ односторонние и их сумма равна 180° , прямые, которые заключают эти углы, параллельны. Угол, смежный с $\angle 3$ равен $180^\circ - 55^\circ = 125^\circ$. Этот угол и угол 4 – соответственные при пересечении параллельных прямых секущей. Следовательно, $\angle 4 = 125^\circ$.

Ответ: 125° .

Задание 4. В тетраэдре $ABCD$ (D – вершина) на середине ребер BD , CD , CA , BA отметили точки M , N , Q , P – соответственно. Найти периметр полученной фигуры $MNQP$, если $AD = 12$ см, а $BC = 14$ см.



Дано: $ABCD$ – тетраэдр
 M – середина BD ;
 N – середина CD ;
 Q – середина AC ;
 P – середина AB ;
 $AD = 12$ см; $BC = 14$ см

Найти: P_{MNQP} - ?

Решение

- $MN \parallel BC$ по свойству средней линии треугольника $\Rightarrow MN \parallel PQ$; $PQ \parallel BC$.
 - $PM \parallel AD$ по свойству средней линии треугольника $\Rightarrow PM \parallel QN$; $NQ \parallel DA$.
 - По определению $MNQP$ – параллелограмм.
 - $PQ = 7$ см; $PM = 6$ см $\Rightarrow P_{MNQP} = 2 \cdot (7+6) = 26$ см².
- Ответ: $P_{MNQP} = 26$ см².

(!) Домашнее задание (!)

1. Ответьте на контрольные вопросы (письменно):

- 1.1. Сформулируйте основные следствия из аксиом стереометрии.
- 1.2. Приведите определение пересекающихся прямых, схематично изобразите.
- 1.3. Приведите определение параллельных прямых, схематично изобразите их.
- 1.4. Приведите определение скрещивающихся прямых, схематично изобразите.
- 1.5. Дайте определение параллельности прямой и плоскости.

2. Решите предложенные задания (письменно):

Задание 1. Дайте ответы на тестовое задание:

1. В пространстве параллельными называются прямые, которые:

- 1) не пересекаются;
- 2) не имеют общих точек;
- 3) лежат в одной плоскости и не пересекаются.

2. Плоскость можно задать:

- 1) любыми тремя точками;
- 2) тремя точками, не лежащими на одной прямой;
- 3) прямой и не лежащей на ней точкой;
- 4) двумя прямыми;
- 5) двумя не пересекающимися прямыми;
- 6) двумя пересекающимися прямыми;
- 7) двумя параллельными прямыми.

3. Выберите утверждения, верные для прямых, расположенных в пространстве:

- 1) если одна из двух непересекающихся прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость;
- 2) если одна из двух параллельных прямых пересекает плоскость, то и другая прямая пересекает эту плоскость;
- 3) если одна из двух параллельных прямых пересекает третью прямую, то и другая прямая пересекает эту прямую;
- 4) если две прямые параллельны третьей прямой, то они параллельны между собой.

4. Стороны AB и BC параллелограмма $ABCD$ пересекают плоскость α , тогда прямые DC и AD :

- 1) не пересекают плоскость α ;
- 2) пересекают плоскость α ;
- 3) лежат в плоскости α .

Задание 2. Через конец A отрезка AB проведена плоскость α . Через конец B и точку C этого отрезка проведены параллельные прямые, пересекающие плоскость α в точках B_1 и C_1 . Найдите длину отрезка CC_1 если $AC : AB = 2 : 7$, а $BB_1 = 14$.

Задание 3. На плоскости даны четыре прямые. Известно, что $\angle 1 = 135^\circ$, $\angle 2 = 45^\circ$, $\angle 3 = 75^\circ$. Найдите $\angle 4$. Ответ дайте в градусах.

Отчетность

Работы принимаются до 19 ноября 2025 г.

Задания выполняются от руки на тетрадных листах в клетку. Каждый лист на полях подписываете: Фамилия Имя, группа, дата (в формате ДД.ММ.ГГГГ). По выполнению фотографии каждого листа (в правильном порядке и вертикальной ориентации – без перевернутых страниц) высылаете на проверку преподавателю.

Выполненное задание контрольной работы вы присылаете на @mail:

pushistav@mail.ru

В теме письма указываем:

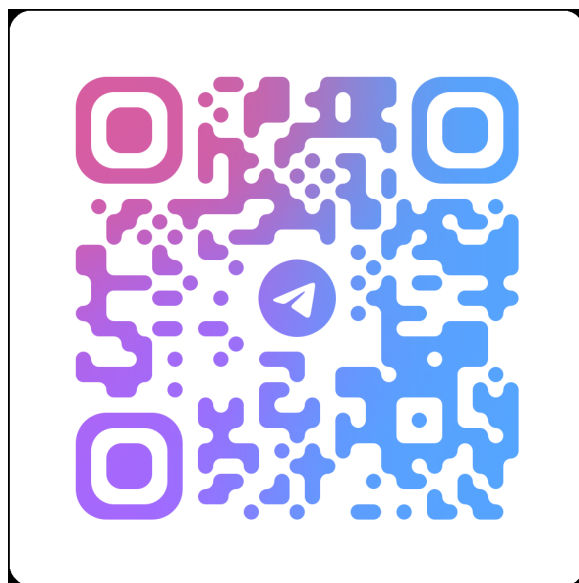
ОД.07 Математика 12.11.25 (Фамилия Имя, группа)

К примеру:

ОД.07 Математика 12.11.25 (Иванов Иван, ТТГ 1/1-9/25)

Обязательно проверьте, что Вы состоите в чате:

<https://t.me/+leGPsDn5EF8yMGly>



С уважением!

Преподаватель математики ШТЭК ДОННУЭТ
Бережная Валерия Александровна

Основная литература: Математика: алгебра и начала математического анализа, геометрия. Алгебра и начала математического анализа. 10-11 классы : базовый и

углубленный уровни : учебник / Ш.А. Алимов, Ю.М. Колягин, М.В. Ткачёва [и др.]. – 10-е изд., стер. – Москва : Просвещение, 2022. – 463.