

1.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 3|$

(a) Estudia la derivabilidad de f .

Resolución

Como $x + 3 < 0 \Leftrightarrow x < -3$ y $x + 3 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq -3$ entonces

$$f(x) = \begin{cases} -x - 3, & \text{si } x < -3 \\ x + 3, & \text{si } x \geq -3 \end{cases}$$

Si $x \neq -3$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

Además, para $x \neq -3$, $f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -3 \\ 1, & \text{si } x > -3 \end{cases}$

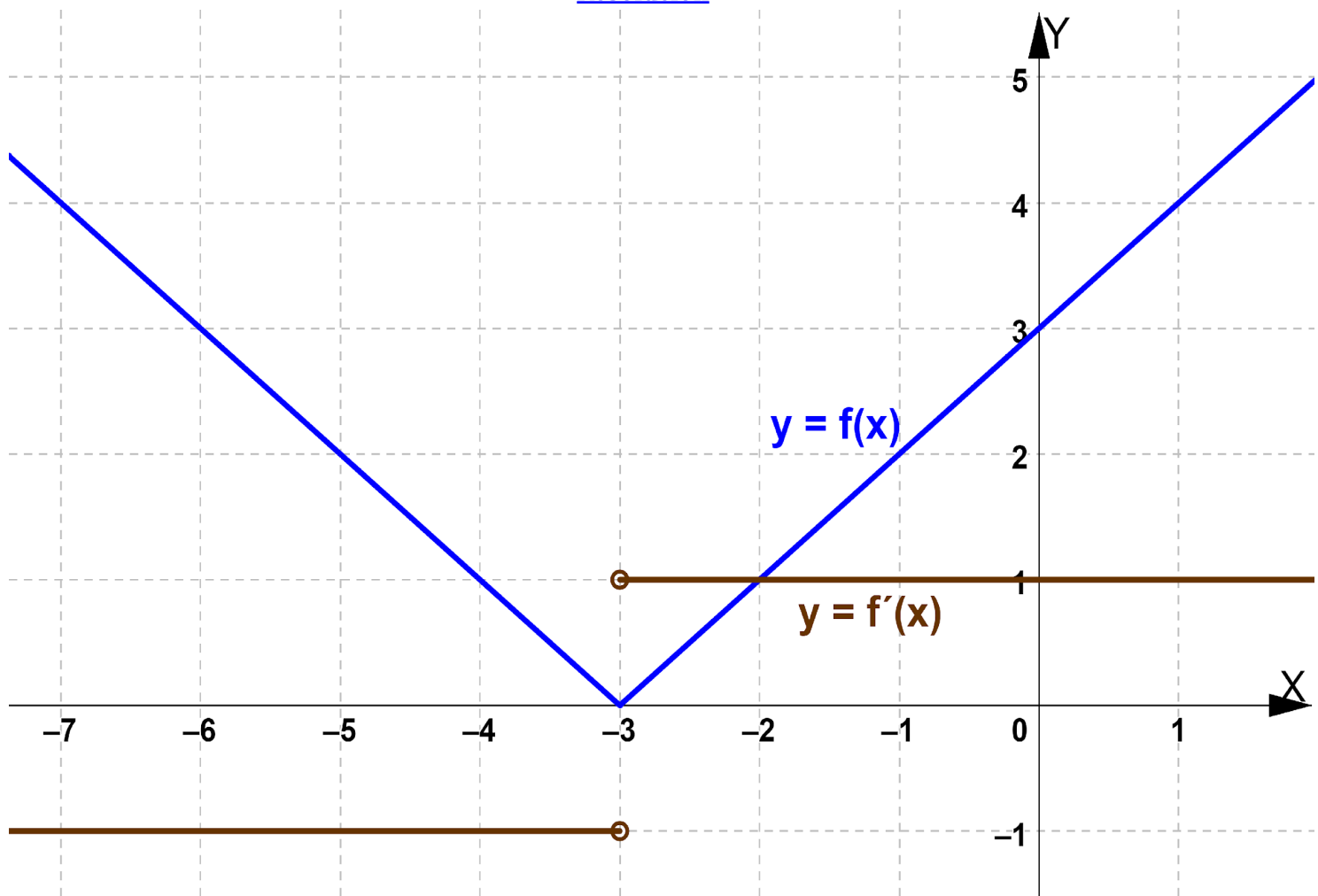
$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f(x) = -(-3) - 3 = 0 = \lim_{x \rightarrow -3^+} f(x) = -3 + 3 = 0 \Rightarrow f \text{ es continua en } x = -3.$$

$$\lim_{x \rightarrow -3^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -3^+} f'(x) = 1 \Rightarrow f \text{ NO es derivable en } x = -3$$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-3\}$

(b) Dibuja las gráficas de f y f' .

Resolución



2.-

- (a) Representa las curvas de ecuaciones $y = x^2 - 3x + 3$ e $y = x$, calculando donde se cortan.
 (b) Halla el área del recinto limitado por dichas curvas.

Resolución

Hallamos los puntos de corte entre la parábola, $y = f(x) = x^2 - 3x + 3$ y la recta:

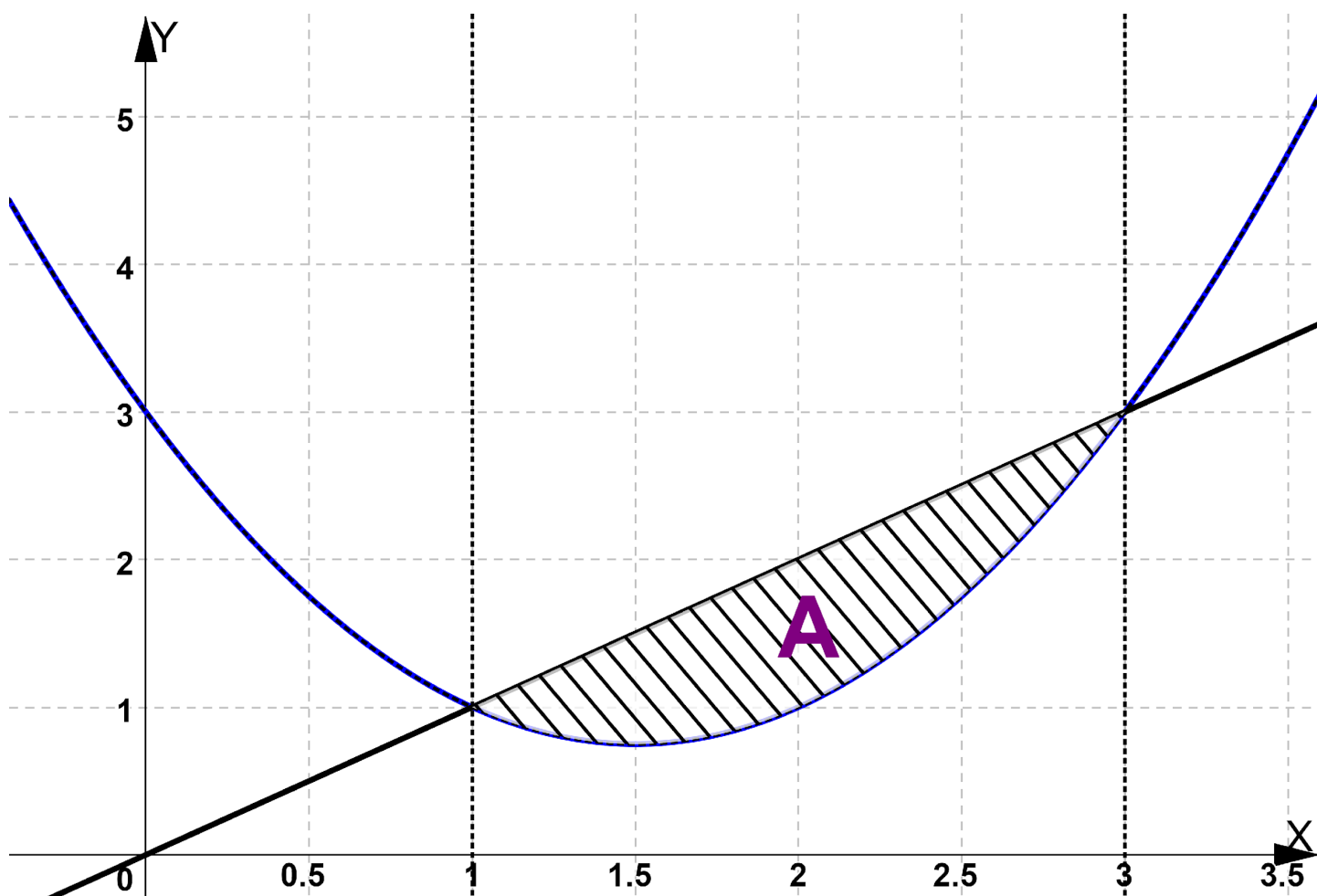
$$\{y = x^2 - 3x + 3 \quad y = x \Rightarrow x^2 - 3x + 3 = x \Rightarrow x^2 - 4x + 3 = 0; x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{4 \pm 2}{2}, x = 3, x = 1.$$

Se cortan en (1, 1) y (3, 3).

La gráfica de f es una parábola convexa y como $x^2 - 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3 \pm \sqrt{9 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1} = \frac{2 \pm \sqrt{-3}}{2}$ (imposible)

y $f(0) = 0^2 - 3 \cdot 0 + 3 = 3$, la parábola sólo corta al eje Y en (0, 3)

Como $f'(x) = 2x - 3 = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}$, $f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 - 3 \cdot \frac{3}{2} + 3 = \frac{3}{4}$, el vértice de la parábola (mínimo) es $V\left(\frac{3}{2}, \frac{3}{4}\right)$.



$$\text{El área que se pide es } A = \int_1^3 [x - (x^2 - 3x + 3)] dx = \int_1^3 (4x - x^2 - 3) dx$$

$$\text{Una primitiva es } p(x) = 2x^2 - \frac{x^3}{3} - 3x = \frac{6x^2 - x^3 - 9x}{3}$$

Por la regla de Barrow, $A = p(3) - p(1) = \frac{6 \cdot 3^2 - 3^3 - 9 \cdot 3}{3} - \frac{6 \cdot 1^2 - 1^3 - 9 \cdot 1}{3} = \frac{4}{3} \cong 1,33 u^2$

3.-

(a) Sabiendo que F es una primitiva de una función f, halla una primitiva de f que se anule en el punto $x = a$.

Resolución

Si F es una primitiva de f sabemos que las infinitas primitivas de f son de la forma $G(x) = F(x) + k$.

Como G debe anularse en $x = a$ entonces $G(a) = 0$. Luego, $F(a) + k = 0$ y $k = -F(a)$.

Por tanto, la primitiva que se pide es $G(x) = F(x) - F(a)$.

(b) De una función $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ se sabe que es dos veces derivable y también que $g(0) = 5$, $g'(0) = 0$ y $g''(x) = 8$, para todo x perteneciente a $\mathbb{R}$. Calcula una expresión algebraica de esta función g.

Resolución

$$g'(x) = \int g''(x) dx = \int 8 dx = 8x + a. \text{ Como } g'(0) = 0 \text{ entonces } 8 \cdot 0 + a = 0, a = 0 \Rightarrow g'(x) = 8x$$

$$g(x) = \int g'(x) dx = \int 8x dx = 4x^2 + b. \text{ Como } g(0) = 5 \text{ entonces } 4 \cdot 0^2 + b = 5, b = 5 \Rightarrow g(x) = 4x^2 + 5.$$

4.- Calcula $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x}$ siendo $\ln x$ el logaritmo neperiano de x.

Resolución

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x} = \frac{1 - \cos(1-1)}{(\ln 1)^2} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación. Aplicamos la regla de L'Hôpital:}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[1 - \cos(x-1)]'}{(x)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sin(x-1)}{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-1)}{1} = \frac{1 \sin(1-1)}{1} = \frac{0}{1} \text{ Indeterminación.}$$

Aplicamos de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{[x \sin(x-1)]'}{(1)'} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 \cdot \sin(x-1) + x \cos(x-1)}{1} = \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x \sin(x-1) + x \cos(x-1)}{1} = \frac{1 \sin 0 + 1 \cos 0}{1} = \frac{1}{1}$$

Por tanto, por la regla de L'Hôpital, $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{1 - \cos(x-1)}{x} = \frac{1}{2}$

5.- Una compañía aérea ofrece vuelos para grupos de estudiantes con las siguientes condiciones: Para organizar un vuelo, el número mínimo de pasajeros debe ser de 80, los cuales pagarían 210 euros cada uno. Sin embargo, esta tarifa se reduce en 1 euro por cada pasajero que exceda el número de 80. Suponiendo que la capacidad de cada avión es de 105 pasajeros y que el coste para la compañía es de 100 euros por plaza ocupada. ¿qué número de pasajeros ofrecen el máximo y, respectivamente, el mínimo beneficio para la compañía?

Resolución

Si x es el nº de pasajeros que excede de 80, $0 \leq x \leq 25$, entonces el nº total de pasajeros sería $80 + x$ que pagarían cada uno $(210 - x) \text{ €}$ suponiendo un coste para la compañía de $100(80 + x)$.

Hay que maximizar/minimizar el beneficio, f, que es igual a ingresos menos costes, f: $[0, 25] \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(x) = (80 + x)(210 - x) - 100(80 + x) = 16800 + 130x - x^2 - 8000 - 100x = 8800 + 30x - x^2$$

$$f'(x) = 30 - 2x = 0 \Leftrightarrow x = 15 ; f''(x) = -2 ; f''(15) = -2 < 0 \text{ (en } x = 15 \text{ está el máximo)}$$

$$f(15) = 8800 + 30 \cdot 15 - 15^2 = 9025 \quad f(0) = 8800 + 30 \cdot 0 - 0^2 = 8800$$

$$f(25) = 8800 + 30 \cdot 25 - 25^2 = 8925$$

El nº de pasajeros que maximiza el beneficio es $80 + 15 = 95$ y el que lo minimiza es $80 + 0 = 80$

6.- Se sabe que la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \begin{cases} x^2 + ax + b, & \text{si } x < 1 \\ cx, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$ es derivable en todo su dominio y que en los puntos $x = 0$ y $x = 4$ toma el mismo valor.

(a) Halla a , b y c .

Resolución

Al ser derivable, en particular es derivable en $x = 1$.

Para $x \neq 1$, f es continua y derivable independientemente de los valores de a y b por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables

Además, $f'(x) = \begin{cases} 2x + a, & \text{si } x < 1 \\ c, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

Como es continua en $x = 1$, $f(x) = f(x) \Rightarrow 1^2 + a \cdot 1 + b = c \cdot 1 \Rightarrow a + b - c = -1$

Como es derivable en $x = 1$, $f'(x) = f'(x) \Rightarrow 2 \cdot 1 + a = c \Rightarrow a = c - 2$

Como $f(0) = f(4)$ entonces $0^2 + a \cdot 0 + b = c \cdot 4 \Rightarrow b = 4c$. Nos queda el sistema $\begin{cases} a + b - c = -1 \\ a = c - 2 \\ b = 4c \end{cases}$.

Sustituyendo las ecuaciones 2ª y 3ª en la 1ª, $c - 2 + 4c - c = -1 \Rightarrow 4c = 1 \Rightarrow c = \frac{1}{4}$.

$a = \frac{1}{4} - 2 = \frac{-7}{4}$, $b = 4 \cdot \frac{1}{4} = 1$. Conclusión: $a = \frac{-7}{4}$, $b = 1$, $c = \frac{1}{4}$,

$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{-7}{4}x + 1, & \text{si } x < 1 \\ \frac{1}{4}x, & \text{si } 1 \leq x \end{cases}$

(b) Calcula $I = \int_0^2 f(x) dx$.

Resolución

Por la propiedad de aditividad de la integral definida respecto al intervalo de integración nos queda:

$$I = \int_0^1 f(x) dx + \int_1^2 f(x) dx = \int_0^1 \left(x^2 + \frac{-7}{4}x + 1\right) dx \overset{I_1}{=} + \int_1^2 \frac{1}{4}x dx \overset{I_2}{=}$$

Para I_1 , una primitiva de la función a integrar es $p(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{7}{4} \cdot \frac{x^2}{2} + x = \frac{8x^3 - 21x^2 + 24x}{24}$.

Por la regla de Barrow, $I_1 = p(1) - p(0) = \frac{8 \cdot 1^3 - 21 \cdot 1^2 + 24 \cdot 1}{24} - \frac{8 \cdot 0^3 - 21 \cdot 0 + 24 \cdot 0}{24} = \frac{11}{24}$

Para I_2 , una primitiva de la función a integrar es $q(x) = \frac{1}{4} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{8}$.

Por la regla de Barrow, $I_2 = q(2) - q(1) = \frac{2^2}{8} - \frac{1^2}{8} = \frac{3}{8}$. Luego, $I = I_1 + I_2 = \frac{11}{24} + \frac{3}{8} = \frac{5}{6}$

7.- Sea $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ la función definida por $f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4}$.

(a) Dibuja el recinto limitado por la gráfica de la función f y sus tangentes en los puntos de abscisas $x = \frac{1}{2}$ y $x = -\frac{1}{2}$.

Resolución

La gráfica de f es una parábola convexa

$$f(x) = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} = \frac{-\sqrt{2} \pm 1}{2}, x \cong -1,2 \quad x \cong -0,2$$

$f(0) = 0^2 + \sqrt{2} \cdot 0 + \frac{1}{4} = 0,25$. La parábola corta a los ejes en $(-1,2; 0)$, $(-0,2; 0)$ y $(0; 0,25)$

$$f'(x) = 2x + \sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-\sqrt{2}}{2} \cong -0,7; f\left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right) = \left(\frac{-\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \frac{-\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{4} = \frac{-1}{4} = -0,25$$

El vértice de la parábola (mínimo) es $V(-0,7; -0,25)$

La ecuación de la recta tangente en un punto $A(x_0, f(x_0))$ es $rtg: y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

$$x_0 = \frac{1}{2}; f'(x_0) = f'\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} + \sqrt{2} = 1 + \sqrt{2}; f(x_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}.$$

La ecuación de la recta tangente es $rtg_1: y = (1 + \sqrt{2})\left(x - \frac{1}{2}\right) + \frac{1+\sqrt{2}}{2}; rtg_1: y = (1 + \sqrt{2})x$

$$x_0 = -\frac{1}{2}; f'(x_0) = f'\left(-\frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{-1}{2} + \sqrt{2} = \sqrt{2} - 1;$$

$$f(x_0) = f\left(-\frac{1}{2}\right) = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \sqrt{2} \cdot \frac{-1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{1-\sqrt{2}}{2}.$$

La ecuación de la recta tangente es $rtg_2: y = (\sqrt{2} - 1)\left(x + \frac{1}{2}\right) + \frac{1-\sqrt{2}}{2}; rtg_2: y = (\sqrt{2} - 1)x$

Puntos de corte de las tangentes y la parábola:

$$\{y = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} \quad y = (1 + \sqrt{2})x \text{ . Igualando, } x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} = (1 + \sqrt{2})x \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} = \frac{1}{2}; y = (1 + \sqrt{2}) \frac{1}{2} = \frac{1+\sqrt{2}}{2}. \text{ Sólo se cortan en el punto de tangencia}$$

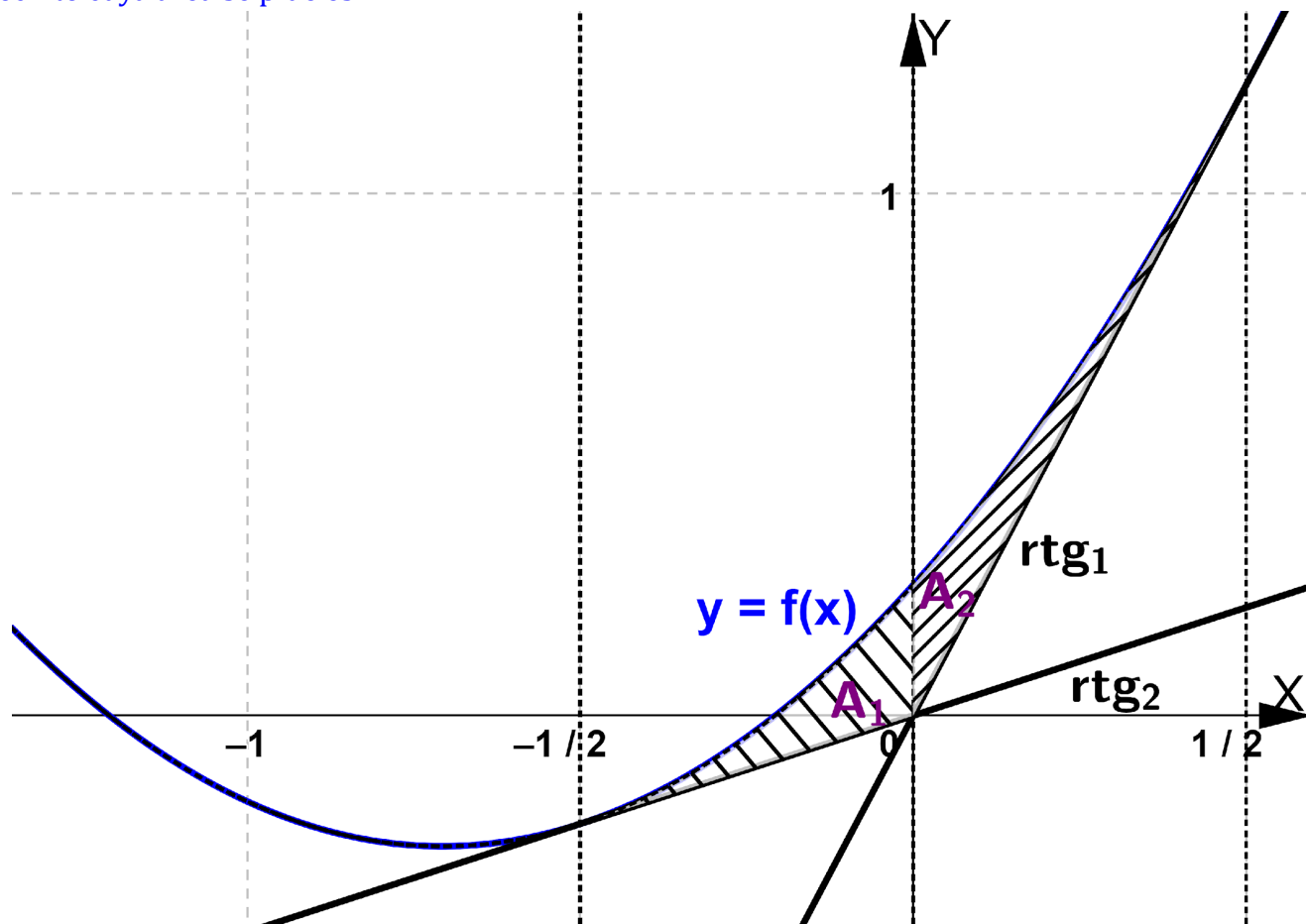
$$\{y = x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} \quad y = (\sqrt{2} - 1)x \text{ . Igualando, } x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} = (\sqrt{2} - 1)x \Leftrightarrow x^2 + x + \frac{1}{4} = 0$$

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4 \cdot 1 \cdot \frac{1}{4}}}{2 \cdot 1} = \frac{-1}{2}; y = (\sqrt{2} - 1) \frac{-1}{2} = \frac{1 - \sqrt{2}}{2}. \text{ Sólo se cortan en el punto de tangencia}$$

$$\{y = (1 + \sqrt{2})x \quad y = (\sqrt{2} - 1)x \text{ . Igualando, } (1 + \sqrt{2})x = (\sqrt{2} - 1)x \Leftrightarrow x = 0$$

Las rectas tangentes sólo se cortan en el punto (0, 0).

El recinto cuya área se pide es



(b) Prueba que el eje de ordenadas divide el recinto anterior en dos que tienen igual área.

Resolución

Hay que comprobar que $A_1 = A_2$

$$A_1 = \int_{-1/2}^0 \left[x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} - (\sqrt{2} - 1)x \right] dx = \int_{-1/2}^0 \left(x^2 + x + \frac{1}{4} \right) dx.$$

$$\text{Una primitiva es } p(x) = \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} = \frac{4x^3 + 6x^2 + 3x}{12}.$$

$$\text{Por la regla de Barrow, } A_1 = p(0) - p\left(\frac{-1}{2}\right) = \frac{4 \cdot 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0}{12} - \frac{4\left(\frac{-1}{2}\right)^3 + 6\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + 3 \cdot \frac{-1}{2}}{12} = \frac{1/2}{12} = \frac{1}{24}$$

$$A_2 = \int_0^{1/2} \left[x^2 + \sqrt{2}x + \frac{1}{4} - (1 + \sqrt{2})x \right] dx = \int_{-1/2}^0 (x^2 - x + \frac{1}{4}) dx.$$

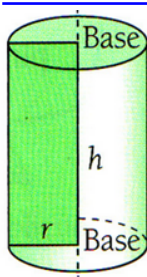
Una primitiva es $q(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4} = \frac{4x^3 - 6x^2 + 3x}{12}$.

Por la regla de Barrow, $A_2 = q\left(\frac{1}{2}\right) - q(0) = \frac{4\left(\frac{1}{2}\right)^3 - 6\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 3\frac{1}{2}}{12} - \frac{4 \cdot 0^3 - 6 \cdot 0^2 + 3 \cdot 0}{12} = \frac{1/2}{12} = \frac{1}{24}$

Por tanto, $A_1 = A_2$

8.- Se quiere construir un envase cerrado con forma de cilindro cuya área total (incluyendo las tapas) sea 900 cm^2 . ¿Cuáles deben ser el radio de la base y la altura para que el volumen del envase sea lo más grande posible? ¿Cuánto vale ese volumen máximo?

Resolución



La superficie total del cilindro es $S(\text{cilindro}) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 900 \Rightarrow h = \frac{900 - 2\pi r^2}{2\pi r} = \frac{450 - \pi r^2}{\pi r}$

Función a maximizar: $V(\text{cilindro}) = V(r) = \pi r^2 h = \pi r^2 \frac{450 - \pi r^2}{\pi r} = r(450 - \pi r^2) = 450r - \pi r^3$

$V'(r) = 450 - 3\pi r^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = \frac{450}{3\pi} = \frac{150}{\pi} \Rightarrow$ El radio es $r_0 = \sqrt{\frac{150}{\pi}} \cong 6,9 \text{ cm}$

$V''(r) = -6\pi r$; $V''(r_0) = -6\pi \sqrt{\frac{150}{\pi}} < 0$. Para $r = r_0$ el volumen es máximo.

La altura es

$$h = \frac{450 - \pi \left(\sqrt{\frac{150}{\pi}} \right)^2}{\pi \sqrt{\frac{150}{\pi}}} = \frac{450\pi - 150}{\pi^2 \sqrt{\frac{150}{\pi}}} = \frac{450\pi - 150}{\pi \sqrt{150\pi}} = \frac{150(3\pi - 1) \sqrt{150\pi}}{150\pi^2} = \frac{(3\pi - 1) \sqrt{150\pi}}{\pi^2} \cong 18,53 \text{ cm}$$

El volumen máximo es, aproximadamente, $V = \pi r^2 h = 3,14 \cdot 6,9^2 \cdot 18,53 = 2770,15 \text{ cm}^3$

9.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = (3x - 2x^2)e^x$.

(a) Estudia el crecimiento y el decrecimiento de f .

Resolución

$f'(x) = (3 - 4x)e^x + (3x - 2x^2)e^x = (-2x^2 - x + 3)e^x = 0 \Leftrightarrow -2x^2 - x + 3 = 0$.

$x = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4(-2)3}}{2(-2)} = \frac{1 \pm 5}{-4}$; $x = 1$ ó $x = -\frac{3}{2}$. Hagamos una tabla de signos de $f'(x)$:

	$\left(-\infty, -\frac{3}{2}\right)$	$-\frac{3}{2}$	$\left(-\frac{3}{2}, 1\right)$	1	$(1, +\infty)$
--	--------------------------------------	----------------	--------------------------------	---	----------------

$f'(x)$	-	0	+		-
$f(x)$	decreciente	mínimo	creciente	máximo	decreciente

f es decreciente en $(-\infty, -\frac{3}{2}) \cup (1, +\infty)$ y creciente en $(-\frac{3}{2}, 1)$

(b) Calcula los máximos y los mínimos relativos de f .

Resolución

Mínimo relativo: $x = -\frac{3}{2}$, $y = f(-\frac{3}{2}) = \left[3 \cdot \frac{-3}{2} - 2 \left(\frac{-3}{2}\right)^2\right] e^{-\frac{3}{2}} = \frac{-9}{\sqrt{e^3}}$. Punto, $\left(-\frac{3}{2}, \frac{-9}{\sqrt{e^3}}\right)$

Máximo relativo: $x = 1$, $y = f(1) = (3 \cdot 1 - 2 \cdot 1^2) e^1 = e$. Punto $(1, e)$

10.-

(a) Halla el área del triángulo formado por el eje OX y las rectas tangentes y normal a la curva de ecuación $y = e^{-x}$ en el punto de abscisa $x = -1$.

(b) Halla el área de la región limitada por la curva de ecuación $y = e^{-x}$ y el eje OX para los valores $-1 \leq x \leq 0$.

Resolución

$f(x) = e^{-x}$; $f'(x) = -e^{-x}$. La ecuación de la recta tangente a la gráfica de una función f en un punto

$A(x_0, f(x_0))$ es rtg: $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$ y la de la recta normal es rn: $y = \frac{-1}{f'(x_0)}(x - x_0) + f(x_0)$.

En este caso, $x_0 = -1$, $f'(x_0) = f'(-1) = -e^1 = -e$, $f(x_0) = f(-1) = e^1 = e$.

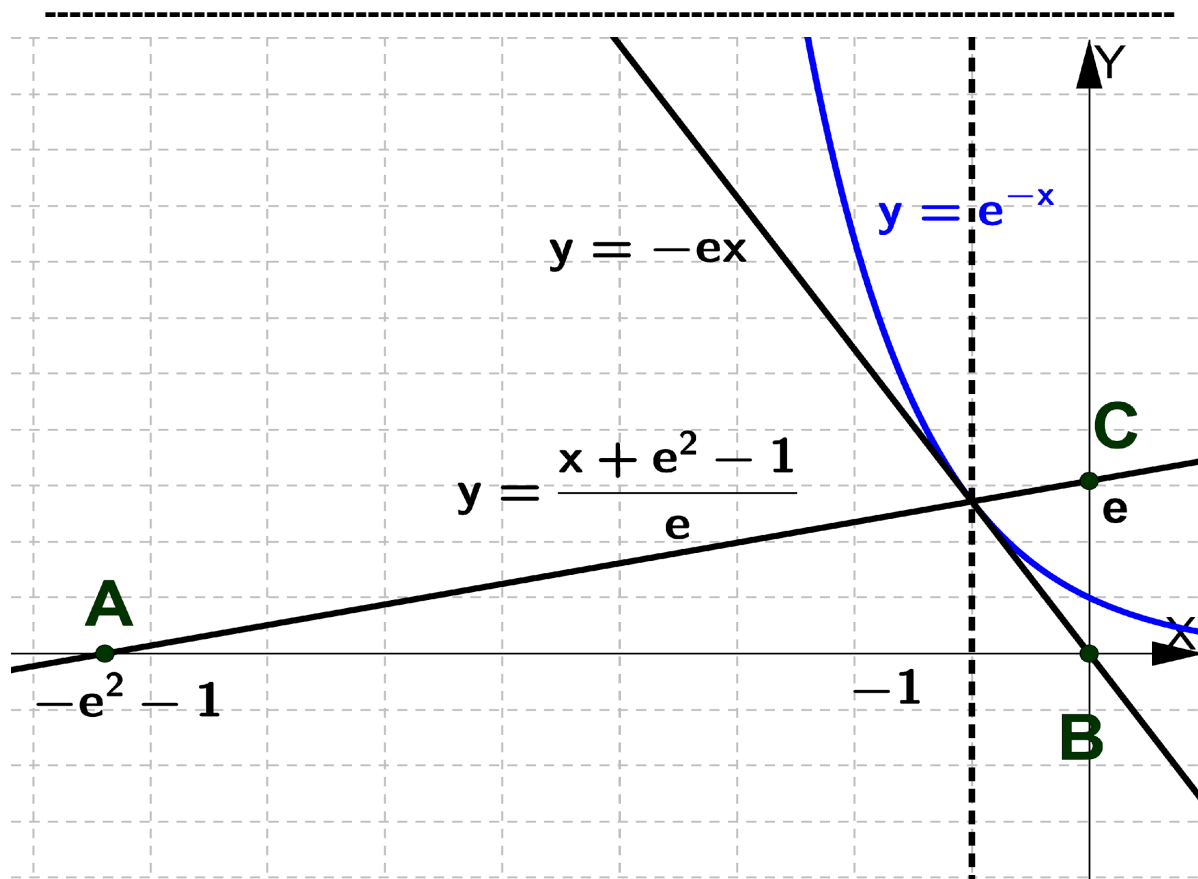
rtg: $y = -e(x + 1) + e \Rightarrow \text{rtg: } y = -ex$; rn: $y = \frac{-1}{-e}(x + 1) + e \Rightarrow \text{rn: } y = \frac{x + e^2 + 1}{e}$

Hallamos los puntos de corte entre la tangente y la normal:

$\{y = \frac{x + e^2 + 1}{e} \mid y = -ex \Rightarrow \frac{x + e^2 + 1}{e} = -ex \Rightarrow (e^2 + 1)x + e^2 + 1 = 0; x = -1, y = -e(-1) = e$. Punto $(-1, e)$.

Sólo se cortan en el punto de tangencia con la curva. Además, $\frac{x + e^2 + 1}{e} = 0 \Leftrightarrow x = -e^2 - 1$

Para la gráfica de f como $f'(x) = -e^{-x} < 0$, f es decreciente. Además, $f(0) = e^0 = 1$ y $f(-1) = e$.



Usando la figura, el área del triángulo es $A = \frac{\text{base} \cdot \text{altura}}{2} = \frac{AB \cdot BC}{2} = \frac{(e^2 + 1)e}{2} \cong 11,31 \text{ u}^2$

La otra área que se pide es $A = \int_{-1}^0 e^{-x} dx$. Una primitiva es $p(x) = -e^{-x}$.

Por la regla de Barrow, $A = p(0) - p(-1) = -e^0 - (-e^1) = e - 1 \cong 1,71 \text{ u}^2$
11.-

(a) Calcula los extremos relativos y absolutos de la función $f: [-7, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3 + 6x^2 + 49$.

Resolución

f es continua y derivable en $[-7, 1]$ por ser una función polinómica.

Al ser continua en un intervalo cerrado, por el teorema de Weierstrass f tiene máximo y mínimo absoluto.

$$f'(x) = 3x^2 + 12x = 3x(x + 4) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ó } x = -4; \quad f''(x) = 6x + 12$$

$$f''(0) = 6 \cdot 0 + 12 = 12 > 0. \text{ Mínimo relativo: } x = 0, y = f(0) = 0^3 + 6 \cdot 0^2 + 49 = 49.$$

$$f''(-4) = 6(-4) + 12 = -12 < 0. \text{ Máximo relativo: } x = -4, y = f(-4) = (-4)^3 + 6(-4)^2 + 49 = 81.$$

Evaluamos f en los extremos del intervalo, $x = -7, x = 1$:

$$f(-7) = (-7)^3 + 6(-7)^2 + 49 = 0 \quad ; \quad f(1) = 1^3 + 6 \cdot 1^2 + 49 = 56$$

Luego, el máximo absoluto es 81 y se alcanza en $x = -4$ y el mínimo absoluto es 0 y se alcanza en $x = -7$.

(b) Sea β el punto en el que f alcanza su máximo absoluto. Calcula $\int_{-7}^{\beta} f(x) dx$.

Resolución

Sabemos que $\beta = -4$. Luego, se pide $\int_{-7}^{-4} f(x) dx = \int_{-7}^{-4} (x^3 + 6x^2 + 49) dx$

Una primitiva de f es $F(x) = \frac{x^4}{4} + 2x^3 + 49x = \frac{x^4 + 8x^3 + 196x}{4}$. Por la regla de Barrow,

$$\int_{-7}^{-4} f(x) dx = F(-4) - F(-7) = \frac{(-4)^4 + 8(-4)^3 + 196(-4)}{4} - \frac{(-7)^4 + 8(-7)^3 + 196(-7)}{4} = \frac{-1040}{4} - \frac{-1715}{4} = \frac{675}{4}$$

12.- Sea $f: (-\pi, \pi)$ la función derivable que para $x \neq 0$ verifica $f(x) = \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x}$

(a) ¿Cuánto vale $f(0)$?

Resolución

No existe $f(0)$. Sin embargo, podemos definir

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{\sin x} = \frac{\ln(1+0^2)}{\sin 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si se puede aplicar la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x^2)]'}{(\sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{\cos x} = \frac{\frac{2 \cdot 0}{1+0^2}}{\cos 0} = \frac{0}{1} = 0$$

Se puede aplicar. Por tanto, $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$

(b) ¿Cuánto vale $f'(0)$?

Resolución

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{\ln(1+x^2)}{\sin x} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x^2)}{x \sin x} = \frac{\ln(1+0^2)}{0 \sin 0} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

Veamos si se puede aplicar la regla de L'Hôpital: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{[\ln(1+x^2)]'}{(x \sin x)'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{2x}{1+x^2}}{x} =$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{(1+x^2)(x)} = \frac{2 \cdot 0}{(1+0^2)(0)} = \frac{0}{0} \text{ Indeterminación}$$

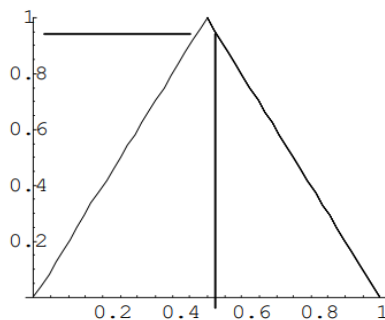
Veamos si se puede aplicar de nuevo la regla de L'Hôpital:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(2x)'}{[(1+x^2)(x)]'} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2x(\operatorname{sen} x + x \operatorname{cscos} x) + (1+x^2)(\operatorname{cscos} x - x \operatorname{sen} x)} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{2x(\operatorname{sen} x + x \operatorname{cscos} x) + (1+x^2)(2 \operatorname{cscos} x - x \operatorname{sen} x)} = \frac{2}{2.0(\operatorname{sen} 0 + 0 \operatorname{cscos} 0) + (1+0^2)(2 \operatorname{cscos} 0 - 0 \operatorname{sen} 0)} = \frac{2}{0+2} = 1$$

Se puede aplicar. Por tanto, podemos tomar $f'(0) = 1$

13.- En la figura adjunta se representa la gráfica de la función derivada f' de una cierta función $f: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$.



(a) Halla una expresión algebraica de f sabiendo que su gráfica pasa por el origen de coordenadas.

Resolución

Observamos que la gráfica de $f'(x)$ está formada por dos trozos de recta.

El primer trozo pasa por $(0, 0)$ y $(0,5 ; 1)$. Como $\frac{y-0}{x-0} = \frac{1-0}{0,5-0} = 2$, la ecuación es $y = 2x$

El segundo trozo pasa por $(0,5 ; 1)$ y $(1, 0)$. Como $\frac{y-0}{x-1} = \frac{0-1}{1-0,5} = -2$, la ecuación es $y = 2 - 2x$

Luego, $f'(x) = \{2x, \text{ si } 0 \leq x \leq 0,5 \quad 2 - 2x, \text{ si } 0,5 \leq x \leq 1\}$. Como $f(x) = \int f'(x) dx, \Rightarrow$

$$f(x) = \{x^2 + a, \text{ si } 0 \leq x \leq 0,5 \quad 2x - x^2 + b, \text{ si } 0,5 \leq x \leq 1$$

Como la gráfica de f pasa por el origen de coordenadas, $f(0) = 0 \Rightarrow 0^2 + a = 0 \Rightarrow a = 0$

$$\text{Queda } f(x) = \{x^2, \text{ si } 0 \leq x \leq 0,5 \quad 2x - x^2 + b, \text{ si } 0,5 \leq x \leq 1.$$

Por ser f continua en $x = 0,5$, $f(x) = f(x) \Rightarrow 0,5^2 = 2.0,5 - 0,5^2 + b \Rightarrow b = -0,5$

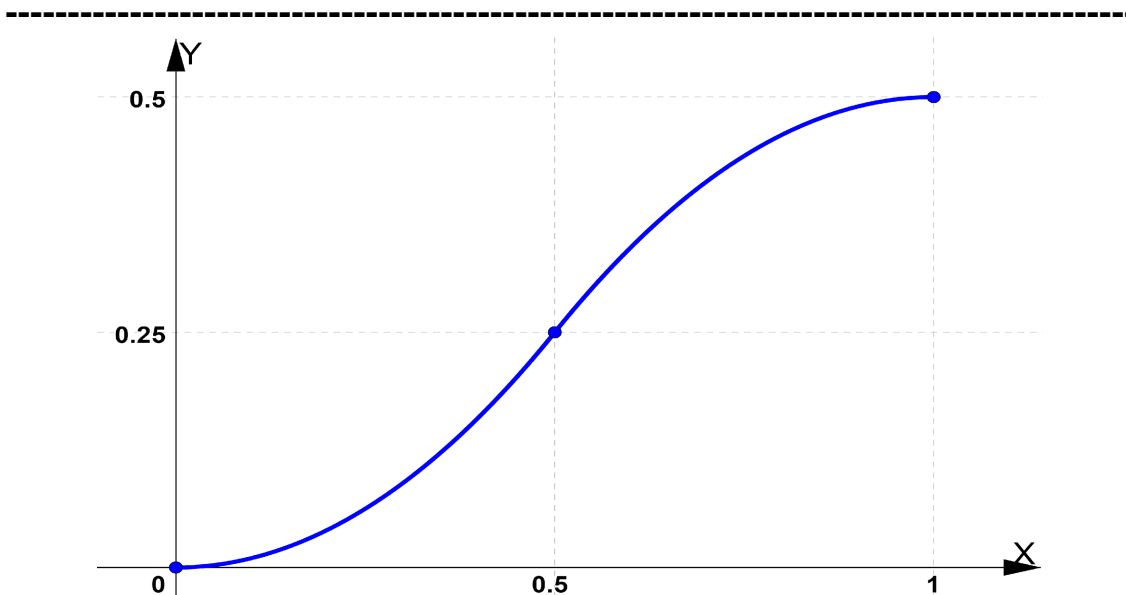
Por tanto, una expresión algebraica de f es $f(x) = \{x^2, \text{ si } 0 \leq x \leq 0,5 \quad -x^2 + 2x - 0,5, \text{ si } 0,5 \leq x \leq 1$

(b) Representa gráficamente la función f .

Resolución

Como en el intervalo $(0, 1)$ la gráfica de f' está "por encima del eje X" entonces $f'(x) > 0$.

Luego, f es creciente en $(0, 1)$. Además, $f(0) = 0$, $f(0,5) = 0,5^2 = 0,25$ y $f(1) = -1^2 + 2.1 - 0,5 = 0,5$



(c) Estudia la derivabilidad de f' .

Resolución

Sabemos que $f'(x) = \{2x, \text{ si } 0 \leq x < 0,5 \quad 2 - 2x, \text{ si } 0,5 \leq x \leq 1\}$. Si $x \neq 0,5$, f' es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables y

$$f''(x) = \{2, \text{ si } 0 \leq x < 0,5 \quad -2, \text{ si } 0,5 < x \leq 1\}$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f'(x) = f'(0,5) = 2 \cdot 0,5 = 1 = \lim_{x \rightarrow 0,5^+} f'(x) = 2 - 2 \cdot 0,5 = 1. \text{ Luego, } f' \text{ es continua en } x = 0,5.$$

$$\lim_{x \rightarrow 0,5^-} f''(x) = 2 \neq \lim_{x \rightarrow 0,5^+} f''(x) = -2. \text{ Luego, } f' \text{ NO es derivable en } x = 0,5.$$

Conclusión: f' es continua en $[0, 1]$ y derivable en $[0, 1] - \{0,5\}$ y

$$f''(x) = \{2, \text{ si } 0 \leq x < 0,5 \quad -2, \text{ si } 0,5 < x \leq 1\}$$

14.- Se sabe que la temperatura, medida en grados centígrados, de una cámara frigorífica viene dada por la expresión $f(t) = at^2 + bt + c$ donde t representa las horas transcurridas desde su conexión a la red y a , b y c son tres constantes reales. Al conectarla, la temperatura interior asciende, por efecto del calor del motor, y alcanza su máximo a los tres cuartos de hora. A partir de ese momento comienza a descender la temperatura y transcurrida una hora desde su conexión alcanza los cero grados centígrados.

A las dos horas de haberla conectado es de menos tres grados centígrados. Usando estos datos, determina los valores de las constantes a , b y c .

Resolución

$$f(t) = at^2 + bt + c$$

$$f'(t) = 2at + b.$$

El máximo se produce para $t = 0,75 \Rightarrow f'(0,75) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 0,75 + b = 0 \Rightarrow b = -1,5a$; $f(t) = at^2 - 1,5at + c$

En 1 h la temperatura es de $0^\circ\text{C} \Rightarrow 0 = f(1) = a \cdot 1^2 - 1,5a \cdot 1 + c \Rightarrow c = 0,5a$; $f(t) = at^2 - 1,5at + 0,5a$

En 2 h la temperatura es de $-3^\circ\text{C} \Rightarrow -3 = f(2) = a \cdot 2^2 - 1,5a \cdot 2 + 0,5a \Rightarrow -3 = 1,5a \Rightarrow a = -2$

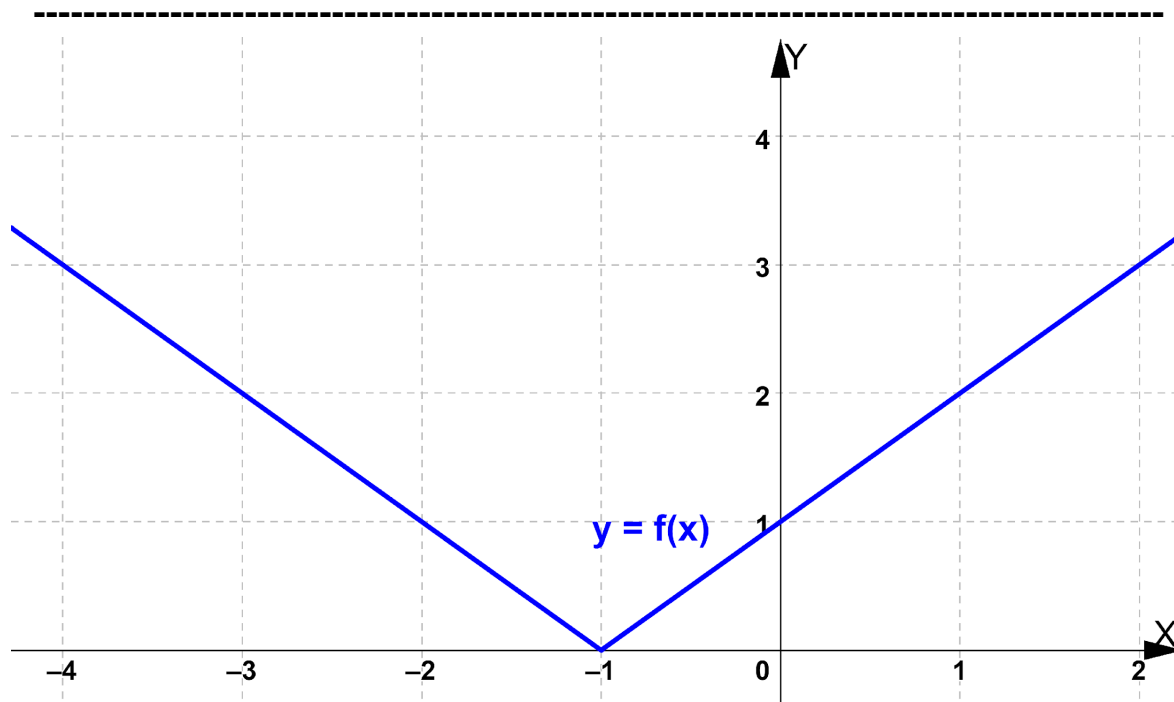
Sustituyendo, $b = -1,5 \cdot (-2) = 3$, $c = 0,5 \cdot (-2) = -1$ y $f(t) = -2t^2 + 3t - 1$

15.- Considera la función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = |x + 1|$.

(a) Represéntala gráficamente.

Resolución

Como $x + 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ entonces $f(x) = \{-x - 1, \text{ si } x < -1 \quad x + 1, \text{ si } x \geq -1\}$; $f(-1) = 0$, $f(0) = 1$ y $f(-2) = 1$



(b) Estudia su derivabilidad.

Resolución

Si $x \neq -1$, f es continua y derivable por ser el resultado de operar con funciones continuas y derivables.

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) = -(-1) - 1 = 0 = \lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) = f(-1) = -1 + 1 = 0. \text{ Luego, } f \text{ es continua en } x = -1$$

$$\text{Para } x \neq -1, f'(x) = \begin{cases} -1, & \text{si } x < -1 \\ 1, & \text{si } x > -1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f'(x) = -1 \neq \lim_{x \rightarrow -1^+} f'(x) = 1. \text{ Luego, } f \text{ NO es derivable en } x = -1$$

Conclusión: f es continua en $\mathbb{R}$ y derivable en $\mathbb{R} - \{-1\}$

(c) Calcula $\int_{-2}^3 f(x) dx$

Resolución

Por la aditividad de la integral definida respecto al intervalo, $\int_{-2}^3 f(x) dx = \int_{-2}^{-1} f(x) dx + \int_{-1}^3 f(x) dx$

$$\int_{-2}^{-1} f(x) dx = \int_{-2}^{-1} (-x - 1) dx. \text{ Una primitiva es } p(x) = \frac{-x^2}{2} - x = \frac{-x^2 - 2x}{2}.$$

Por la regla de Barrow, $\int_{-2}^{-1} f(x) dx = p(-1) - p(-2) = \frac{-(-1)^2 - 2(-1)}{2} - \frac{-(-2)^2 - 2(-2)}{2} = \frac{1}{2}$

$$\int_{-1}^3 f(x) dx = \int_{-1}^3 (x + 1) dx. \text{ Una primitiva es } q(x) = \frac{x^2}{2} + x = \frac{x^2 + 2x}{2}.$$

Por la regla de Barrow, $\int_{-1}^3 f(x) dx = q(3) - q(-1) = \frac{3^2 + 2 \cdot 3}{2} - \frac{(-1)^2 + 2(-1)}{2} = \frac{16}{2}$

Por tanto, $\int_{-2}^3 f(x) dx = \frac{1}{2} + \frac{16}{2} = \frac{17}{2} = 8,5$

16.- La temperatura medida en una ciudad andaluza, desde las 12 horas del mediodía hasta la medianoche de un cierto día de agosto, viene dada por la expresión $T(x) = ax^2 + bx + c$, en la que x representa el número de horas transcurridas desde el mediodía.

(a) Calcula a , b y c sabiendo que a las 5 de la tarde se alcanzó una temperatura máxima de 35°C y que a las 12 del mediodía se midieron 30°C .

Resolución

T está definida en el intervalo $[0, 12]$, $T(x) = ax^2 + bx + c$ y $T'(x) = 2ax + b$.

A las 5 horas transcurridas T es máxima $\Rightarrow T'(5) = 0 \Rightarrow 2a \cdot 5 + b = 0 \Rightarrow b = -10a$; $T(x) = ax^2 - 10ax + c$

A las 5 horas transcurridas la temperatura era $35^{\circ}\text{C} \Rightarrow 35 = T(5) = a \cdot 5^2 - 10a \cdot 5 + c \Rightarrow -25a + c = 35$

En el momento inicial la temperatura era $30^{\circ}\text{C} \Rightarrow 30 = T(0) = a \cdot 0^2 - 10a \cdot 0 + c \Rightarrow c = 30$

Sustituyendo, $-25a + 30 = 35 \Rightarrow a = \frac{-1}{5} = -0,2$; $b = -10 \cdot \frac{-1}{5} = 2$

Conclusión: $a = \frac{-1}{5}$, $b = 2$, $c = 30$ y $T(x) = \frac{-1}{5}x^2 + 2x + 30$

(b) Determina de forma razonada los puntos en los que la función anterior alcanza sus extremos absolutos y relativos.

Resolución

Máximo relativo: $x = 5$, $T(5) = 35$. Punto $(5, 35)$. No hay mínimo relativo

Al ser continua en el intervalo cerrado $[0, 12]$, por el teorema de Weierstrass T tiene máximo y mínimo absoluto.

Además, $T(0) = 30$ y $T(12) = \frac{-1}{5}12^2 + 2 \cdot 12 + 30 = 25,2$

El máximo absoluto es 35 y se alcanza en $x = 5$ y el mínimo absoluto es 25,2 y se alcanza en $x = 12$.